المحاضرة الرابعة

الموديل الرقمي:

إضعاف المعادلة الرياضية التي تحكم الموديل الفيزيائي بطريقة الرواسب الترجيحية:

1- التعبير الرياضي القوي: $k\dfrac{d^2T(x)}{dx^2}+f_v=0,\quad \forall x\in[0,L]$

2- الشروط الحدية: $T(x=0)=30\ C^\circ$

$$q(x=L)=-k\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=L}=h(T(L)-10)=q_L$$

3- نعرف الراسب: $\mathrm{Res}(x)=k\dfrac{d^2T^*(x)}{dx^2}+f$

4- نضرب الراسب بتابع تجريبي:

$$\psi(x)\times\underbrace{\left(k\frac{d^2T^*(x)}{dx^2}+f\right)}_{\text{راسب}}=0,\quad \forall x\in[0,L],\ \forall\psi(x)$$

5- نكامل على طول المجال:

$$W=\int_0^L\psi(x)\times\left(k\frac{d^2T^*(x)}{dx^2}+f\right)dx=0,\quad \forall x\in[0,L],\ \forall\psi(x)$$

6- نكامل بالتجزئة:

$$W=-\int_0^L\frac{d\psi(x)}{dx}k\frac{dT^*(x)}{dx}dx+\left[\psi(x)k\frac{dT^*(x)}{dx}\right]_0^L+\int_0^L\psi(x)f\,dx=0$$

$$\forall x\in[0,L],\ \forall\psi(x)$$

7- نأخذ بالاعتبار الشروط الحدية:

$$W=-\int_0^L\frac{d\psi(x)}{dx}k\frac{dT^*(x)}{dx}dx+\underbrace{\psi(L)k\left.\frac{dT^*}{dx}\right|_L}_{-h\left(T(L)-T_{ext}\right)}-\psi(0)k\left.\frac{dT^*}{dx}\right|_0+\int_0^L\psi(x)f\,dx=0$$

مناقشة الحد: $-\psi(0)k\left.\dfrac{dT^*}{dx}\right|_0$

يوجد احتمالان:

- ❖ اعتبار تدفق مجهول عند $x=0$:

$$-\psi(0)k\left.\frac{dT^*}{dx}\right|_0=\psi(0).q(0)$$

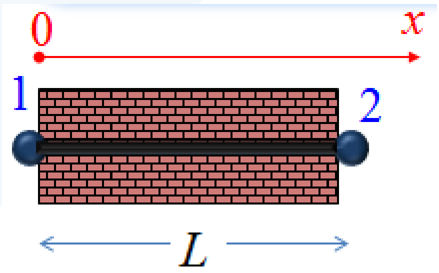
- ❖ استبعاد هذا الحد: $\psi(0)=0$

الشكل الضعيف للمعادلة التفاضلية:

$$W=\underbrace{+\int_0^L\frac{d\psi(x)}{dx}k\frac{dT^*(x)}{dx}dx-\int_0^L\psi(x)f\,dx}_{W_{\text{int}}}\underbrace{+\psi(L)h\left(T^*(L)-T_{ext}\right)-\psi(0)q(0)}_{W_{CL}}=0$$

التقريب الرقمي باستخدام العناصر المنتهية

في المرحلة الأولى من هذه الدراسة ولتوضيح مبدأ طريقة العناصر المنتهية نفترض أن الجدار مؤلف من عنصر منتهٍ واحد له عقدتان كما هو مبين في الشكل أدناه ومن ثم نعمم المبدأ بتجزئة الجدار إلى عدد كبير من العناصر المنتهية الخطية.



يتطلب إجراء التكامل تقريب عقدي للمتحولات $\psi(x),T(x)$ ولمشتقاتهما $\dfrac{d\psi}{dx},\dfrac{dT}{dx}$

يعطى التقريب العقدي للمتحول T(x) على عنصر محدود بعقدتين كما يلي:

$$T^*(x)=N_1(x)\,T_1+N_2(x)\,T_2$$

نسمي التوابع الرياضية $N_1(x),N_2(x)$ توابع التقريب العقدي أو توابع الشكل (وهي توابع متعددة الحدود).

من خصائص توابع الشكل أنها تحقق العلاقة التالية:

$$N_i(x_j)=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$$

$$\begin{cases}N_1(0)=1\\ N_1(L)=0\end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases}N_2(0)=0\\ N_2(L)=1\end{cases}$$

نختار تقريب عقدي من نوع Galerkin وبالتالي يستخدم التابع التجريبي نفس توابع التقريب للمتحول.

يعطى تقريب التابع التجريبي $\psi(x)$ على عنصر محدود بعقدتين كما يلي:

$$\psi(x)=N_1(x)\psi_1+N_2(x)$$

$$\psi_2=\langle\psi_1 \quad \psi_2\rangle\begin{Bmatrix}N_1(x)\\ N_2(x)\end{Bmatrix}$$

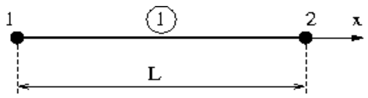
يتم حساب المشتقات كما يلي:

$$\frac{dT}{dx}=\left\langle\frac{dN_1(x)}{dx} \quad \frac{dN_2(x)}{dx}\right\rangle\begin{Bmatrix}T_1\\ T_2\end{Bmatrix}$$

$$\frac{d\psi}{dx}=\langle\psi_1 \quad \psi_2\rangle\begin{Bmatrix}\dfrac{dN_1(x)}{dx}\\ \dfrac{dN_2(x)}{dx}\end{Bmatrix}$$

حساب التوابع التقريبية N_i من أجل عنصر محدود بعقدتين:

- نختار درجة التقريب: عنصر له عقدتان إذاً نختار تابع من الدرجة الأولى.



$$N_1(x)=a_1x+b_1$$

$$N_2(x)=a_2x+b_2$$

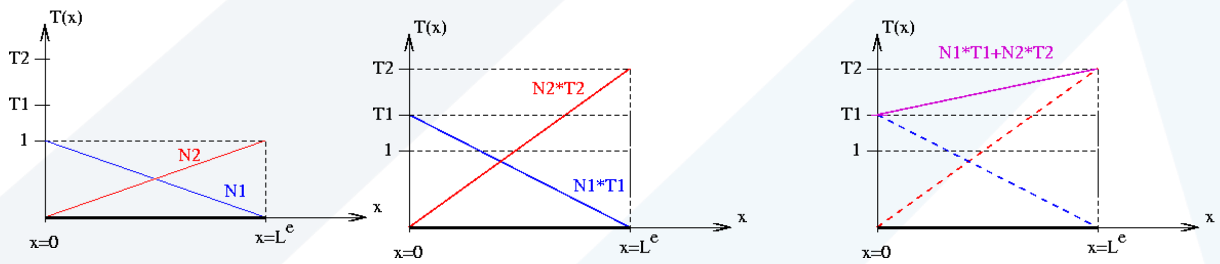
- نشكل جملة المعادلات التالية:

$$\begin{cases} N_1(x=0)=a_1\times 0+b_1=1 \\ N_1(x=L)=a_1\times L+b_1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_2(x=0)=a_2\times 0+b_2=0 \\ N_2(x=L)=a_2\times L+b_2=1 \end{cases}$$

الحل:

$$\left.\begin{aligned} N_1(x)&=1-\frac{x}{L} \\ N_2(x)&=\frac{x}{L} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} T(x)&=N_1(x)\,T_1+N_2(x)\,T_2 \\ T(x)&=\left(1-\frac{x}{L}\right)T_1+\frac{x}{L}\,T_2 \end{aligned}$$



بالعودة إلى الشكل التكاملي (التعبير الرياضي الذي تمّ إضعافه بطريقة الرواسب الترجيحية) وتعويض البارامتر $T^*(x)$ بالتابع التقريبي:

$$T^*(x)=\left(1-\frac{x}{L}\right)T_1+\frac{x}{L}T_2$$

بتعويض كل حد $\frac{dT^*(x)}{dx}$ بمشتق هذا التابع التقريبي:

$$\frac{dT^*(x)}{dx}=\frac{d}{dx}N_1(x)\,T_1+\frac{d}{dx}N_2(x)\,T_2=N_1'\,T_1+N_2'\,T_2$$

يعطى التعبير الرياضي الضعيف بالعلاقة التالية:

$$W=\underbrace{+\int_0^L\frac{d\psi(x)}{dx}k\,\frac{dT^*(x)}{dx}dx-\int_0^L\psi(x)f\,dx}_{W_{\mathrm{int}}}\underbrace{+\psi(L)h\left(T^*(L)-T_{ext}\right)-\psi(0)q(0)}_{W_{CL}}=0$$

نلاحظ وجود حدود تكامل ضمن المجال الرياضي المطلوب W_{int}، وحدود أخرى ناتجة عن الأخذ بالاعتبار للشروط الحدية W_{CL} بحيث $W = W_{int} + W_{CL}$

- نبدأ بالحد W_{int} :

$$W_{int} = +\int_0^L \frac{d\psi(x)}{dx}\, k\, \frac{dT^*(x)}{dx} dx - \int_0^L \psi(x) f\, dx$$

$$W_{int} = \int_0^L \langle \psi_1 \quad \psi_2 \rangle \begin{Bmatrix} N_1' \\ N_2' \end{Bmatrix} k \langle N_1' \quad N_2' \rangle \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} dx - \int_0^L \langle \psi_1 \quad \psi_2 \rangle \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} f\, dx$$

نُشكّل مصفوفة الجداء $\begin{Bmatrix} N_1' \\ N_2' \end{Bmatrix} \times \langle N_1' \quad N_2' \rangle$

نّعوّض في التكامل:

$$W_{int} = \int_0^L \langle \psi_1 \quad \psi_2 \rangle k \begin{bmatrix} (N_1')^2 & N_1'N_2' \\ N_1'N_2' & (N_2')^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} dx - \int_0^L \langle \psi_1 \quad \psi_2 \rangle \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} f\, dx$$

نعلم أنَّ: $N_1' = -\frac{1}{L} \quad \& \quad N_2' = \frac{1}{L}$

يصبح التكامل على الشكل التالي:

$$W_{int} = \int_0^L \langle \psi_1 \quad \psi_2 \rangle k \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{L}\right)^2 & -\left(\frac{1}{L}\right)^2 \\ -\left(\frac{1}{L}\right)^2 & \left(\frac{1}{L}\right)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} dx - \int_0^L \langle \psi_1 \quad \psi_2 \rangle \begin{Bmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{Bmatrix} f\, dx$$

نتيجة التكامل:

$$\boxed{W_{int} = \langle \psi_1 \quad \psi_2 \rangle \frac{k}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} - \langle \psi_1 \quad \psi_2 \rangle \frac{L}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} f}$$

الحد W_{CL} :

$$W_{CL} = +\psi(x=L)\, h\, \left(T(x=L) - T_{ext}\right) - \left(\psi(x=0)\, q(x=0)\right)$$

$$W_{CL} = \psi_2\, h\, \left(T_2 - T_{ext}\right) - \psi_1\, q_0$$

يجب أن نكتب هذا الحد بشكل ينسجم مع الحد W_{int} بحيث تظهر درجات الحرارة عند العقد على شكل مصفوفة فيها عمود واحد والتابع التجريبي عند العقد على شكل مصفوفة فيها سطر واحد فقط وفق الآتي:

$$W_{CL} = \left(\psi_2\, h\, T_2\right) - \left(\psi_2\, h\, T_{ext}\right) - \psi_1\, q_1$$

$$\boxed{W_{CL} = \langle \psi_1 \quad \psi_2 \rangle \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ hT_{ext} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} q_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \right)}$$

$$W = W_{\text{int}} + W_{CL} = 0$$

$$W = \langle \psi_1 \quad \psi_2 \rangle \frac{k}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} - \langle \psi_1 \quad \psi_2 \rangle \frac{L}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} f +$$

$$\langle \psi_1 \quad \psi_2 \rangle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} - \langle \psi_1 \quad \psi_2 \rangle \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ hT_{ext} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} q_1 \\ 0 \end{Bmatrix} \right) = 0$$

نجمع الحدود المتشابهة:

$$W=\langle \psi_1 \quad \psi_2\rangle\left(\frac{k}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & h\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}T_1\\ T_2\end{Bmatrix}-$$

$$\langle \psi_1 \quad \psi_2\rangle\left(\frac{L}{2}\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}f+\begin{Bmatrix}0\\ hT_{ext}\end{Bmatrix}\right)-$$

$$\langle \psi_1 \quad \psi_2\rangle\begin{Bmatrix}q_1\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$W=\langle \psi_1 \quad \psi_2\rangle\left(\begin{bmatrix}\frac{k}{L} & -\frac{k}{L}\\ -\frac{k}{L} & \frac{k}{L}+h\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}T_1\\ T_2\end{Bmatrix}-$$

$$\langle \psi_1 \quad \psi_2\rangle\left(\begin{Bmatrix}f\,\frac{L}{2}\\ f\,\frac{L}{2}+hT_{ext}\end{Bmatrix}\right)-$$

$$\langle \psi_1 \quad \psi_2\rangle\begin{Bmatrix}q_1\\ 0\end{Bmatrix}$$

نستطيع ان نكتب:

$$\mathrm{W}=\langle \psi_1 \quad \psi_2\rangle\left([K]\begin{Bmatrix}T_1\\ T_2\end{Bmatrix}-\{F\}-\{R\}\right)=0,\ \ \forall\ \langle \psi_1 \quad \psi_2\rangle$$

وهي مصفوفة الصلابة $[K]=\begin{bmatrix} \frac{k}{L} & -\frac{k}{L} \\ -\frac{k}{L} & \frac{k}{L}+h \end{bmatrix}$

شعاع التحريض الخارجي $\{F\}=\begin{Bmatrix} f\,\frac{L}{2} \\ f\,\frac{L}{2}+hT_{ext} \end{Bmatrix}$

شعاع التدفقات الخارجية المجهولة القيمة $\{R\}=\begin{Bmatrix} q_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$

المعادلة السابقة تُعطي:

$$[K]\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}-\{F\}-\{R\}=0 \Rightarrow [K]\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}=\{F\}+\{R\}$$

أخذ الشروط الحدية بالاعتبار:

$$\begin{bmatrix} \frac{k}{L} & -\frac{k}{L} \\ -\frac{k}{L} & \frac{k}{L}+h \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} f\,\frac{L}{2} \\ f\,\frac{L}{2}+hT_{ext} \end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix} q_1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

شرط Dirichlet: $T(x=0)=T_1=30$

$$(1\times T_1)+(0\times T_2)=30$$

$$\begin{bmatrix} \cancel{\frac{k}{L}}=1 & -\cancel{\frac{k}{L}}=0 \\ -\frac{k}{L} & \frac{k}{L}+h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f\cancel{\frac{L}{2}}=30 \\ f\,\frac{L}{2}+hT_{ext} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \cancel{q_1}=0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

بإدخال الشروط الحدية يختفي الشعاع $\{R\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{k}{L} & \frac{k}{L}+h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ \\ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 30 \\ f\,\frac{L}{2}+hT_{ext} \end{Bmatrix}$$

وبالتالي يتم حساب T_2 بحل المعادلة التالية:

$$\left(-\frac{k}{L}\times T_1\right)+\left((\frac{k}{L}+h)\times T_2\right)=\frac{f\,.L}{2}+hT_{ext}$$

القسم البرمجي:

قراءة ملف الخرج mesh1.msh لبرنامج GMSH عن طريق ملف الربط على برنامج الماتلاب get_mesh

```
[vcorg, kconec, ktype, kprop, typ_nod,nnt,nelt] = get_mesh('mesh1.msh')

function [vcorg, kconec, ktype, kprop,typ_nod,nnt,nelt] = get_mesh(filename)
fid = fopen(filename);%
                    قراءة الأربع أسطر الأولى وهي ليست ذات أهمية%
for i=1:4
    s = fgetl(fid);
end
                                                    قراءة عدد العقد %
nnt= fscanf(fid,'%f',1);

                                                    قراءة عقد الشبكة %
vcorg = zeros(nnt,2);
for n=1:nnt
```

```
    temp = fscanf(fid,'%f',1); % غير مهم
    vcorg(n,1) = fscanf(fid,'%f',1);
    vcorg(n,2) = fscanf(fid,'%f',1);
    temp = fscanf(fid,'%f\n',1);
end
                    % قراءة سطرين من التعليقات غير المهمة
for i=1:2
    s = fgetl(fid);
end
         % قراءة عدد العناصر المنتهية بما فيها عناصر حدود المجال
nelt= fscanf(fid,'%f',1);
                                     % قراءة عناصر الشبكة

kconec = zeros(nelt,3);
ktype=zeros(nelt,1);
kprop=ktype;
typ_nod=zeros(nnt,1);
for ie=1:nelt
    temp = fscanf(fid,'%f',1); % غير مهم
    geo = fscanf(fid,'%f',1); % =1 if 1D, =2 if 2D
    ktype(ie)=geo+1;
    temp = fscanf(fid,'%f',1); % غير مهم
    nlog= fscanf(fid,'%f',1);
    kprop(ie)=nlog;
    temp = fscanf(fid,'%f',1);
    temp = fscanf(fid,'%f',1);
    for in=1:geo
        kconec(ie,in) = fscanf(fid,'%f',1);
    end
    kconec(ie,geo+1) = fscanf(fid,'%f\n',1);

          % تحديد تبعية العقدة للعنصر حسب الرقم الفيزيائي الأعلى
if (geo==1)
     typ_nod(kconec(ie,[1 2]))=max(typ_nod(kconec(ie,[1 2])),nlog);
   end
end
                              رسم شبكة العناصر المنتهية%
femplot(vcorg',kconec',typ_nod);
axis equal
xlabel('x')
ylabel('y(x)')
set(gcf,'color','w');
```

```
grid
colorbar
                                                                  % إظهار عناصر الحدود أحادية البعد حسب الرقم الفيزيائي
hold on
for ie=1:nelt
    iprop=kprop(ie);
    switch iprop
        case {10}
            n1=kconec(ie,1); n2=kconec(ie,2);
            plot(vcorg([n1 n2],1),vcorg([n1 n2],2),'k','Linewidth',2)
            text(vcorg(n1,1),vcorg(n1,2),'10')
            hold on
        case {7}
            n1=kconec(ie,1); n2=kconec(ie,2);
            plot(vcorg([n1 n2],1),vcorg([n1 n2],2),'b','Linewidth',2)
            text(vcorg(n1,1),vcorg(n1,2),'7')
            hold on
        case {8}
            n1=kconec(ie,1); n2=kconec(ie,2);
            plot(vcorg([n1 n2],1),vcorg([n1 n2],2),'r','Linewidth',2)
            hold on
                text(vcorg(n1,1),vcorg(n1,2),'8')
        case {9}
            n1=kconec(ie,1); n2=kconec(ie,2);
            plot(vcorg([n1 n2],1),vcorg([n1 n2],2),'m','Linewidth',2)
            text(vcorg(n1,1),vcorg(n1,2),'9')

            hold on
    end
end
fclose(fid);
```