جامعة المنارة
كلية الهندسة
قسم الهندسة المعلوماتية

مقرر الرياضيات المتقطعة

جلسة العملي الثالثة

Predicates

- لتكن p(x) تمثل العبارة $x+1\leq 3$ ،أوجد قيمة الحقيقة لـ p(0),p(6),p(3)
  - p(3): $3+1 \leq 3$ False
  - p(6): $6+1 \leq 3$ False
  - p(0): $0+1 \leq 3$ True
- لتكن Q(x) تمثل العبارة $x>4$، أوجد قيمة الحقيقة لـ Q(2),Q(5)
  - Q(5): $5>4$ True
  - Q(2): $2>4$ False
- لتكن p(x,y) تمثل العبارة $x\neq y+3$ ،أوجد قيمة الحقيقة لكل من p(3,0), p(1,2)
  - p(3,0): $3 \neq 0+3$ False
  - p(1,2): $1 \neq 2+3$ True
- لتكن Q(x,y) تمثل العبارة x is the capital of y ، أوجد قيمة الحقيقة لكل من Q(Damascus,Syria),Q(Baghdad,Lebanon)
  - Q(Damascus,Syria): Damascus is the capital of Syria True
  - Q(Baghdad,Lebanon): Baghdad is the capital of Lebanon False

Universal quantifier(∀)

- ليكن $p(x):x+1>x$ ، و مجال التعريف هو مجموعة الأعداد الحقيقية R، أوجد قيمة الحقيقة لعبارة التكميم $\forall x\ p(x)$.

إن العبارة $P(x)$ صحيحة من أجل كل الأعداد الحقيقية x ، بالتالي التكميم الشمولي $\forall x\ p(x)$ يكون صحيح True .

- ليكن $p(x):x^2>0$ ومجال التعريف هو مجموعة الأعداد الصحيحة Z ، أوجد قيمة الحقيقة لعبارة التكميم $\forall x\ p(x)$.

إن $p(x)$ تكون خاطئة من أجل $x=0$، و بالتالي $p(x)$ ليست صحيحة من أجل كل عدد صحيح و تكون قيمة التكميم False .

- ليكن $p(x):x^2 < 10$ و مجال التعريف هو $D=\{1,2,3,4\}$، أوجد قيمة الحقيقة لعبارة التكميم $\forall x\ p(x)$.

إن $p(x)$ تكون خاطئة من أجل $x=4$ ، و بالتالي $p(x)$ ليست صحيحة من أجل كل عدد صحيح في المجموعة D و تكون قيمة التكميم False .

Existence quantifier(∃)

- ليكن $p(x):x>3$ ، و مجال التعريف هو مجموعة الأعداد الحقيقية R، أوجد قيمة الحقيقة لعبارة التكميم $\exists x\ p(x)$

إن $x>3$ صحيحية من أجل عدة قيم في المجموعة R ، مثلاً من أجل $x=4$ تكون $p(4):4>3$ صحيحة ، و بالتالي قيمة التكميم الوجودي $\exists x\ p(x)$ صحيحة True .

- ليكن $p(x):x+1=x$ ، و مجال التعريف هو مجموعة الأعداد الحقيقية R، أوجد قيمة الحقيقة لعبارة التكميم $\exists x\ p(x)$.

إن $p(x)$ خاطئة من أجل كل قيمة x من R ، و بالتالي لايوجد عنصر يحقق هذه العبارة و تكون قيمة التكميم الوجودي False .

- ليكن $p(x):x^2 < 10$ ، و مجال التعريف هو$D=\{1,2,3,4\}$، أوجد قيمة الحقيقة لعبارة التكميم $\exists x\ p(x)$.

يوجد على الأقل $x=3 \in D$ تحقق العلاقة $3^2 < 10$ وبالتالي قيمة التكميم الوجودي True .

أوجد مثالاً معاكساً (counter example) يثبت أن قيمة الحقيقة للعبارات التالية المكممة شمولياً False :

- $\forall x \in R, x > \frac{1}{x}$

من أجل x=1 فإن العبارة 1>1/1 تكون خاطئة False .

- $\forall x \in Z, \frac{(a-1)}{a}$ *is not an integer*

من أجل x=-1 فإن $\frac{(-1-1)}{-1} = 2 \in Z$ و بالتالي عبارة التكميم خاطئة False .

- $\forall$ positive integers n and m, $n.m \geq n + m$

من أجل n=1,m=1 تكون العبارة $1.1 \geq 1+1$ خاطئة False .

Negating quantifications

TABLE 2 De Morgan's Laws for Quantifiers.			
Negation	*Equivalent Statement*	*When Is Negation True?*	*When False?*
$\neg\exists x P(x)$	$\forall x \neg P(x)$	For every x, $P(x)$ is false.	There is an x for which $P(x)$ is true.
$\neg\forall x P(x)$	$\exists x \neg P(x)$	There is an x for which $P(x)$ is false.	$P(x)$ is true for every x.

مثال1 : كل طالب في الصف من مواليد عام 2003 $\forall x\, p(x)$

"X من مواليد 2003" :p(x) ومجال التعريف : مجموعة طلاب الصف

ما هو نفي العبارة السابقة ؟

نفي العبارة : يوجد على الأقل طالب في الصف ليس من مواليد عام 2003،و يعبر عنه بعبارة التكميم التالية: $\neg\forall x\, p(x) = \exists x \neg p(x)$

مثال2 : يوجد طالب في الصف من مواليد عام 2003 $\exists x\, p(x)$

"X من مواليد 2003" :p(x) ومجال التعريف : مجموعة طلاب الصف

ما هو نفي العبارة السابقة؟

نفي العبارة :كل طالب في الصف ليس من مواليد 2003،و يعبر عنه بعبارة التكميم التالية : $\neg\exists x\, p(x) = \forall x \neg p(x)$

Negating quantifications

أوجد نفي العبارتين :

- $\neg\forall x\,(x^2>x)$

$$\neg\forall x\,(x^2>x) \equiv \exists x\ \ (x^2 \leq x)$$

- $\neg\exists x\,(x^2=x)$

$$\neg\exists x\,(x^2=x) \equiv \forall x\ \ (x^2 \neq x)$$

أوجد قيمة الحقيقة لعبارات التكميم التالية مع التعليل ،علماً أن مجال التعريف لكل العبارات هو Z مجموعة الأعداد الصحيحة

- $\forall n \exists m\ (n^2 < m)$

True ، من أجل كل عدد صحيح n يوجد عدد m أكبر من مربعه

- $\forall n \exists m\ (n + m = 0)$

True ، من أجل كل قيمة n يوجد قيمة m=-n بحيث n+m=0 .

- $\forall n \forall m\ (n^3 \neq m^2)$

False ، يوجد n=1,m=1 تكون $1^3 = 1^2$

- $\exists n \forall m\ (nm = m)$

True ، من أجل n=1 فإنه أياً كانت m فإن 1*m=m

أوجد قيمة الحقيقة لعبارات التكميم التالية مع التعليل ،علماً أن مجال التعريف لكل العبارات هو Z مجموعة الأعداد الصحيحة

- $\exists n \exists m\ (n^2 + m^2 = 5)$

True ، يوجد n=1,m=2 تحقق عبارة التكميم

- $\forall n \forall m\ (n + m = m + n)$

True ، من أجل كل عددين $n,m \in Z$ تتحقق علاقة الجمع التبديلية

- $\exists n \forall m\ (n < m^2)$

True ، محققة من أجل n=-1 فإن مربع أي قيمة m موجب و أكبر من n

- $\forall n \forall m\ (if\ n^2 = m^2\ , then\ n = m)$

False ، يوجد n=-2,m=2 تكون $2^2 = (-2)^2$ و لكن $-2 \neq 2$

Negating Nested quantifiers

- $\neg(\forall x \forall y\, p(x,y)) \equiv \exists x \exists y\, \neg\, p(x,y)$

- $\neg(\forall y \exists x\, p(x,y)) \equiv \exists y \forall x \neg\, p(x,y)$

- $\neg(\forall y \forall x\, [p(x,y) \vee Q(x,y)]) \equiv \exists y \exists x \neg\, (p(x,y) \vee Q(x,y))$

  $\equiv \exists y \exists x\, (\neg p(x,y) \wedge \neg Q(x,y))$

Let $D = E = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Explain why the following statements are true.

a. $\forall x$ in D, $\exists y$ in E such that $x + y = 0$.

b. $\exists x$ in D such that $\forall y$ in E, $x + y = y$.

Solution:

a. $\forall x$ in D, $\exists y = -x$ in E : $x+y=x+(-x)=0$

b. $\exists x = 0$ in D, $\forall y$ in E : $0+y=y$

Predicates and Quantifiers

Let $D = \{-48, -14, -8, 0, 1, 3, 16, 23, 26, 32, 36\}$. Determine which of the following statements are true and which are false. Provide counterexamples for those statements that are false.

a. $\forall x \in D$, if x is odd then $x > 0$.

b. $\forall x \in D$, if x is less than 0 then x is even.

c. $\forall x \in D$, if x is even then $x \leq 0$.

d. $\forall x \in D$, if the ones digit of x is 2, then the tens digit is 3 or 4.

e. $\forall x \in D$, if the ones digit of x is 6, then the tens digit is 1 or 2.

Solution:

a. True

b. True

c. False, $\exists x = 16 \in D$ is even but $x > 0$

d. True

e. False , $\exists x = 36 \in D$,ones digit=6 but tens digit=3

Suppose the universe is the collection of numbers (1,2,3,4,5) and the following grid gives the truth value of the proposition P(X,Y) where x is the row and y is the column

P	1	2	3	4	5
1	p(1,1): T	F	F	T	T
2	p(2,1):T	F	T	T	T
3	F	F	T	T	T
4	F	T	F	T	F
5	T	F	T	T	T

1- $\forall x\ \exists y\ p\ (x, y)$: True

2- $\exists y\ \forall x\ p\ (x, y)$: True

3- $\forall y\ \exists x\ p\ (x, y)$: True

4- $\exists x\ \forall y\ p\ (x, y)$: False

Predicates and Quantifiers

Translate from English statements to quantified statements

- the sum of two positive integers is always positive.
- $\forall x \in \mathrm{Z}\ \forall y \in \mathrm{Z}$, (x>0)∧(y>0)$\longrightarrow (x + y > 0)$
- There is a real number whose square equals 5.
- $\exists x \in$ R , (x^2=5)
- The square of real number is greater than or equal 0.
- $\forall x \in$ R , ($x^2 \geq 0$)
- If an integer is divisible by 2 , then it is even.
- $\forall x \in \mathrm{Z}$, (x is divisible by 2 $\longrightarrow x\ is\ even$)
- A product of two real numbers is 0 if one of number is 0.
- $\forall x \in \mathrm{R}\ \forall y \in \mathrm{R}$, (x=0)∨(y=0)$\longrightarrow (xy = 0)$

Predicates and Quantifiers

Translate from English statements to quantified statements

- The difference between two positive integers is not necessarily positive
- $\exists x \in \mathrm{Z}\ \exists y \in \mathrm{Z}$, (x>0)∧(y>0)∧ $(x - y < 0)$
- Every positive real numbers has exactly two square roots.
- $\forall x \in$ R , (x>0) ⟶ x has two square roots
- For every odd integer number n ,there is integer number k :n=2k+1
- $\forall n \in \mathrm{Z}\ \exists k \in \mathrm{Z}$, $(n\ is\ odd)$ ⟶ (n=2k+1)
- The product of two negative real numbers is positive.
- $\forall x \in \mathrm{R}\ \forall y \in \mathrm{R}$, (x<0)∧(y<0)⟶ $(xy > 0)$
- For every non zero real number n,there is real number m : nm=1.
- $\forall n \in \mathrm{R}\ \exists m \in \mathrm{R}$, $(n \neq 0)$ ⟶(nm=1)