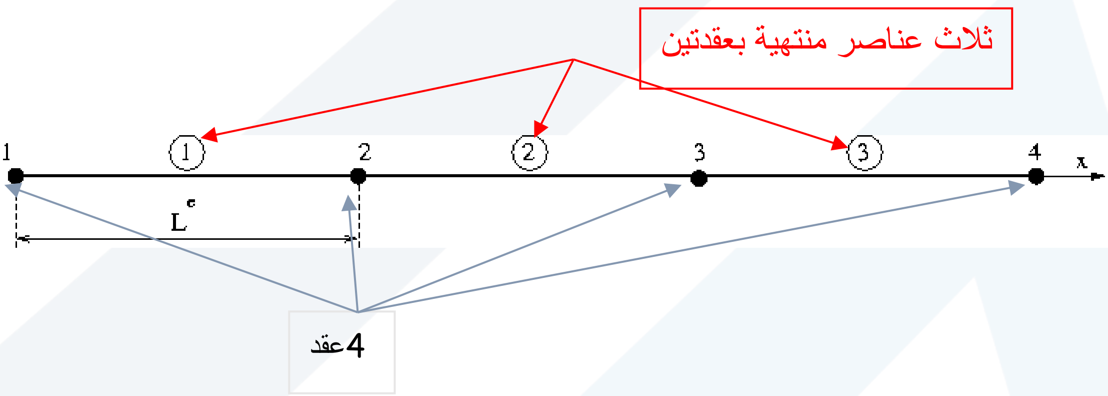
الحالة العامة للموديل الرقمي

وجود عدة عناصر منتهية



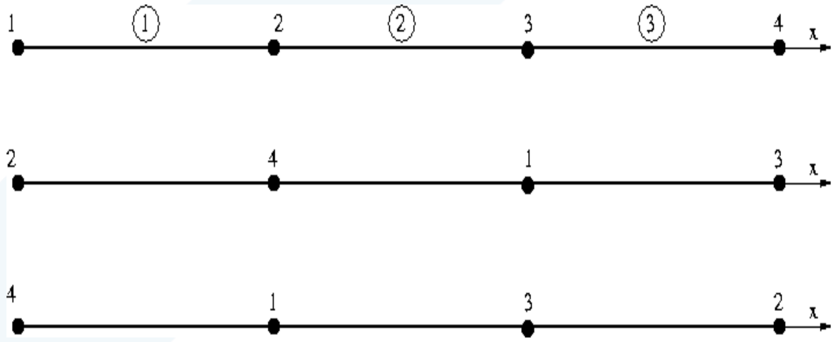
لوصف شبكة العناصر المنتهية نحتاج إلى:

☐ جدول بإحداثيات النقاط $vcorg = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]$

☐ جدول يصف طريقة توصيل العقد المرتبطة $kconec = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

ملاحظات على شبكة العناصر المنتهية:

- ترقيم النقاط في شبكة العناصر المنتهية عشوائي

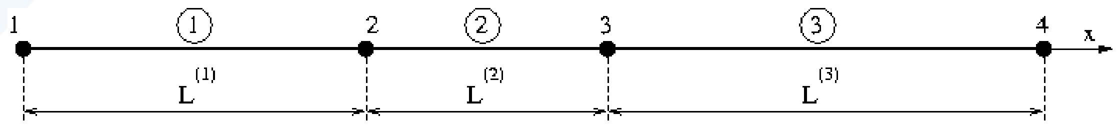


$$conec = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$conec = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$conec = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

- أطوال العناصر المنتهية قد تكون مختلفة



التّقريب الرقمي للشّكل التّكاملي

الشّكل التّكاملي (التّعبير الرياضي الضعيف) لموديل أحادي البعد في مسألة التّوازن الحراري يُكتب كما يلي:

$$W=\underbrace{\int_0^L \frac{d\psi(x)}{dx}k\frac{dT(x)}{dx}dx-\int_0^L \psi(x)f\,dx}_{W_{int}}\underbrace{+\psi(L)h\left(T(L)-T_{ext}\right)-\psi(0)q(0)}_{W_{CL}}=0$$

تعتمد طريقة التّقريب الرقمي بالعناصر المنتهية على مبدأ التّقريب العُقدي على مجالات عنصريّة صغيرة وهي الّتي أسميناها عناصر محدودة أو منتهية. وبالتّالي يجب تجزئة المجال الهندسي إلى شبكة من العناصر المنتهية نسميّها mesh.

$$V=\sum_{e=1}^{nelt}V_e$$

نستطيع إذاً أن نستبدل التّكامل في التّعبير الرياضي الضعيف بمجموع تكاملات عنصرية وفق الآتي:

$$\int_0^L(\ldots)dx=\sum_{i=1}^{N-1}\underbrace{\int_{x_i}^{x_{i+1}}(\ldots)dx}_{\text{تكامل عنصري}}$$

$$x_1=0$$
$$x_N=L$$

حيثُ إنّ:

$$W=W_{int}+W_{CL}=\sum_{e=1}^{nelt}W_{int}^{e}+W_{CL}=0$$

Nelt : هو عدد العناصر المنتهية.

$$W_{int}^{e}=\int_{x_i}^{x_{i+1}}\frac{d\psi(x)}{dx}k\frac{dT(x)}{dx}dx-\int_{x_i}^{x_{i+1}}\psi(x)f\,dx$$

سنقوم بإدخال التقريبات العقدية ضمن التّعبير الرياضي الضعيف الموافق لعنصر منتهٍ.

تُعطى توابع التّقريب بالعلاقة التّالية:

$$N_1(X)=\frac{x_{i+1}-x}{x_{i+1}-x_i}\qquad\qquad N_2(X)=\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}$$

$$T(x) = N_1(x)\ T_i + N_2(x)\ T_{i+1} \Rightarrow$$

$$T(x) = \langle N_1(x) \quad N_2(x) \rangle \begin{Bmatrix} T_i \\ T_{i+1} \end{Bmatrix} = \langle N \rangle \{T_e\}$$

$$\psi(x) = \langle \psi_i \quad \psi_{i+1} \rangle \begin{Bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \end{Bmatrix} = \langle \psi_e \rangle \{N\}$$

تُحسَب المشتقات كما يلي:

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = \langle \psi^e \rangle \left\{ \frac{dN}{dx} \right\} \qquad \frac{dT(x)}{dx} = \left\langle \frac{dN}{dx} \right\rangle \{T^e\}$$

نُعوّض في العلاقة التّالية:

$$W_{\text{int}}^e = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\psi(x)}{dx} k \frac{dT(x)}{dx} dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \psi(x) f\ dx$$

$$W_{\text{int}} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \langle \psi_i \quad \psi_{i+1} \rangle \begin{Bmatrix} N_1{}' \\ N_2{}' \end{Bmatrix} k \langle N_1{}' \quad N_2{}' \rangle \begin{Bmatrix} T_i \\ T_{i+1} \end{Bmatrix} dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \langle \psi_i \quad \psi_{i+1} \rangle \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} f\ dx$$

$$\Rightarrow$$

$$W_{\text{int}} = \langle \psi^e \rangle \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left\{ \frac{dN}{dx} \right\} k \left\langle \frac{dN}{dx} \right\rangle \{T^e\} dx - \langle \psi^e \rangle \int_{x_i}^{x_{i+1}} \{N\} f\ dx$$

$$\Downarrow$$

$$W_{\text{int}} = \langle \psi^e \rangle [K^e] \{T^e\} - \langle \psi^e \rangle \{f^e\}$$

حيث أنّ:

$[K^e]$: هي مصفوفة الصّلابة العنصريّة the elementary stiffness matrix

$$[K^e] = \frac{k}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\left\{ f^{e} \right\}$: شعاع التحريضات العنصري the elementary vector forces

$$\left\{ f^{e} \right\} = \frac{f\ .L_e}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

العلاقة السّابقة هي عِبارة عن تطبيق لمعادلة التّوازن الحراري على مستوى عنصري ولكنّها تفتقد إلى تأثير العناصر المجاورة، إذاً لا بُدَّ من تجميع كلّ المكونات العنصرية وهذا ما يتمّ في مرحلة التّجميع assemblage step.

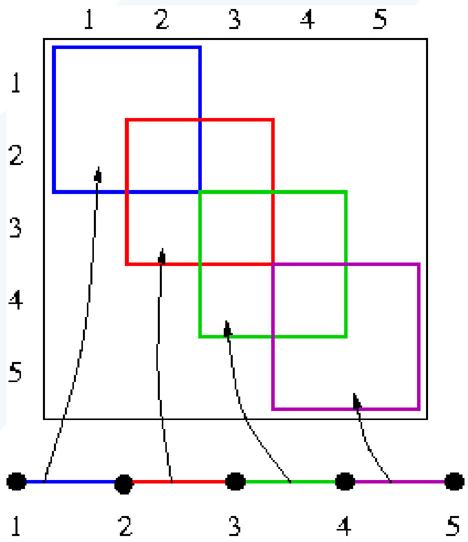
مرحلة التّجميع

بعد حساب كل المكونات العنصرية للمعادلة التفاضلية نحصل على العلاقة التالية:

$$W = \sum_{e=1}^{nelt} \left\langle \psi_i \quad \psi_{i+1} \right\rangle^{e} \left[K^{e} \right] \begin{Bmatrix} T_i \\ T_{i+1} \end{Bmatrix}^{e} - \sum_{e=1}^{nelt} \left\langle \psi_i \quad \psi_{i+1} \right\rangle^{e} \left\{ F^{e} \right\} + W_{CL} = 0$$

تهدف مرحلة التّجميع إلى جمع كل مصفوفات الصّلابة العنصرية $\left[K^{e} \right]$ في مصفوفة واحدة هي [K].

وكلّ الأشعّة العنصرية $\left\{ F^{e} \right\}$ في شعاع واحد هو $\left\{ F \right\}$



$$W = \left\langle \psi_1 \quad \cdots \quad \psi_N \right\rangle \left(\underset{N\times N}{\left[K \right]} \begin{Bmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_N \end{Bmatrix} - \underbrace{\left\{ F \right\} - \left\{ R \right\}}_{N\times 1} \right) = 0$$

بحيث أنه من أجل ثلاثة عناصر:

$$W=\langle\psi_1\quad\psi_2\rangle\left(\left[K^{el_1}\right]\begin{Bmatrix}T_1\\T_2\end{Bmatrix}-\left\{F^{el_1}\right\}\right)+$$
$$\langle\psi_2\quad\psi_3\rangle\left(\left[K^{el_2}\right]\begin{Bmatrix}T_2\\T_3\end{Bmatrix}-\left\{F^{el_2}\right\}\right)+$$
$$\langle\psi_3\quad\psi_4\rangle\left(\left[K^{el_3}\right]\begin{Bmatrix}T_3\\T_4\end{Bmatrix}-\left\{F^{el_3}\right\}\right)=0$$

$$W=\langle\psi_1\quad\psi_2\quad\psi_3\quad\psi_4\rangle\left(\underset{N\times N}{[K]}\begin{Bmatrix}T_1\\T_2\\T_3\\T_4\end{Bmatrix}-\underset{N\times 1}{\{F\}}\right)+W_{cl}=0$$

$$W=\langle\psi_1\quad\psi_2\quad\psi_3\quad\psi_4\rangle\left(\underbrace{\begin{bmatrix}k_{11}&k_{12}&k_{13}&k_{14}\\k_{21}&k_{22}&k_{23}&k_{24}\\k_{31}&k_{32}&k_{33}&k_{34}\\k_{41}&k_{42}&k_{43}&k_{44}\end{bmatrix}}_{N\times N}\begin{Bmatrix}T_1\\T_2\\T_3\\T_4\end{Bmatrix}-\underset{N\times 1}{\begin{Bmatrix}f_1\\f_2\\f_3\\f_4\end{Bmatrix}}\right)+W_{cl}=0$$

$$W=\underbrace{\langle\psi_1\quad\psi_2\quad\psi_3\quad\psi_4\rangle}_{1\times N}\left(\underbrace{\begin{bmatrix}k_{11}T_1+&k_{12}T_2+&k_{13}T_3+&k_{14}T_4-f_1\\k_{21}T_1+&k_{22}T_2+&k_{23}T_3+&k_{24}T_4-f_2\\k_{31}T_1+&k_{32}T_2+&k_{33}T_3+&k_{34}T_4-f_3\\k_{41}T_1+&k_{42}T_2+&k_{43}T_3+&k_{44}T_4-f_4\end{bmatrix}}_{N\times 1}\right)+W_{cl}=0$$

<u>آلية تجميع المصفوفات العنصرية بشكل عام:</u>

- **التّجميع بطريقة الامتداد** (قليلة الاستخدام) يعتمد مبدأ هذه الطّريقة على زيادة أبعاد المصفوفات والأشعة العنصرية إلى أبعاد مصفوفة الصّلابة النهائية وشّعاع التحريض الكلّي.

$$W_{int} = W_{int}^{1} + W_{int}^{2} + W_{int}^{3} = \langle \psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3 \quad \psi_4 \rangle \left(\frac{k}{L^{(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} - f \frac{L^{(1)}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \right.$$

$$\left. \frac{k}{L^{(2)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} - f \frac{L^{(2)}}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{k}{L^{(3)}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} - f \frac{L^{(3)}}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \right)$$

التّجميع بطريقة الإسقاط

المبدأ: يهدف إلى تحديد المكان في المصفوفة النّهائية الذي سيتمُّ إسقاط المصفوفة العنصرية فيه، هذا المكان له نفس أبعاد المصفوفة العنصرية.

الحل: إنشاء جدول يتضمّن في كلّ صفٍ من صفوفه العقد المتصلّة kconec

$$conec = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

السطر N° = رقم العنصر

محتوى الأعمدة = قائمة بعقد العنصر

الخطوات العامة

نُشكّل حلقة على كافّة العناصر

1. نحسب $[K^e]$ و $\{F^e\}$
2. نستخرج عقد الاتصال لكل عنصر
3. نعزل في المصفوفة الكلّية والشّعاع الكلّي الأعمدة والأسطر الموافقة
   1. نسقط $[K^e]$ في $[K]$
   2. نسقط $[F^e]$ في $[F]$

- عودة إلى الحلقة

تطبيق على شبكة ثلاث عناصر

- تجميع للعنصر الأول: kconec(1,[1 2])=[1 2]

N° العنصر   N° الأعمدة   قائمة بالعقد

$$\frac{k}{L^e}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = f\,\frac{L^e}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- تجميع للعنصر الثاني: kconec(2,[1 2])=[2 3]

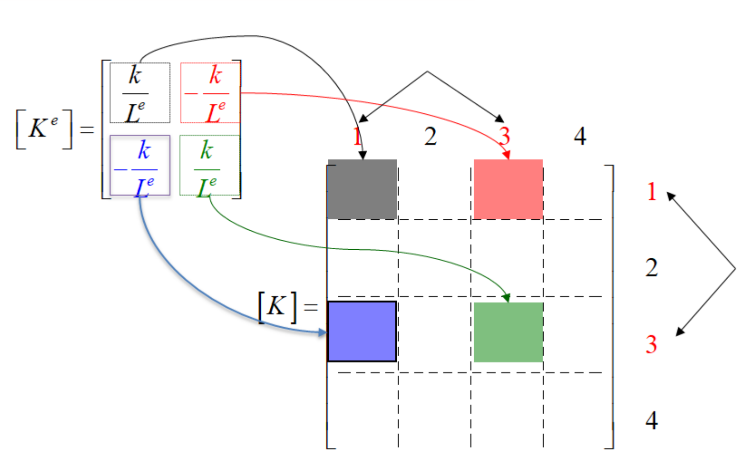
$$\frac{k}{L^e}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = f\,\frac{L^e}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1+1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- تجميع للعنصر الثالث: kconec(3,[1 2])=[3 4]

$$\frac{k}{L^e}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = f\,\frac{L^e}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1+1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

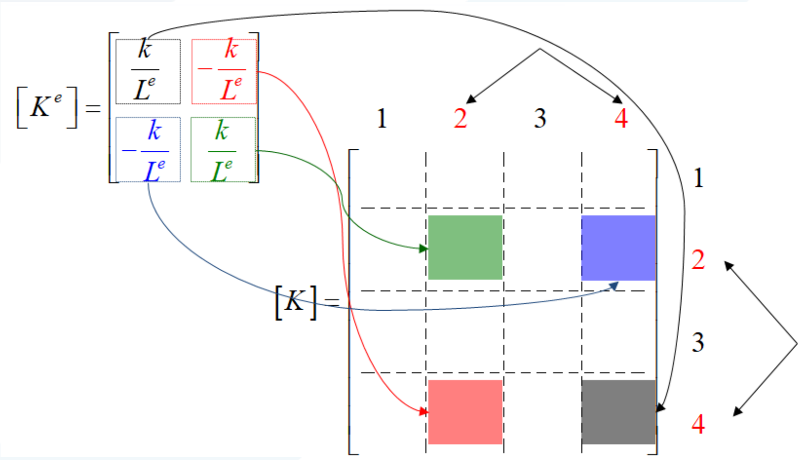
بفرض أنّ: $L^{(1)} = L^{(2)} = L^{(3)} = L^e$

للتوضيح: kconec(ie, [1 2]) = [1 3]



<u>حالة خاصة لمرحلة التجميع: عقد العنصر المنتهي ليست متعاقبة</u>

مثال: kconec(ie, [1 2]) = [4 2]



<u>أخذ الشّروط الحدّية بالاعتبار:</u>

- معالجة شرط $T(x=0)=T_1=30$: Drichelet

نعوّض في جملة المعادلات ونُلاحظ أنّه في نهاية هذه العمليّة

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{k}{L^e} & 2\dfrac{k}{L^e} & -\dfrac{k}{L^e} & 0 \\ 0 & -\dfrac{k}{L^e} & 2\dfrac{k}{L^e} & -\dfrac{k}{L^e} \\ 0 & 0 & -\dfrac{k}{L^e} & \dfrac{k}{L^e} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 30 \\ fL^e \\ fL^e \\ f\dfrac{L^e}{2} \end{Bmatrix}$$

<u>معالجة الشرط من نوع Cauchy</u>

$$\psi(L)h\left(T(L)-T_{ext}\right)=\psi_4 hT_4-\psi_4 hT_{ext}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{k}{L^e} & 2\dfrac{k}{L^e} & -\dfrac{k}{L^e} & 0 \\ 0 & -\dfrac{k}{L^e} & 2\dfrac{k}{L^e} & -\dfrac{k}{L^e} \\ 0 & 0 & -\dfrac{k}{L^e} & \dfrac{k}{L^e}+h \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 30 \\ fL^e \\ fL^e \\ f\dfrac{L^e}{2}+hT_{ext} \end{Bmatrix}$$

<u>الجزء العملي من المحاضرة:</u>

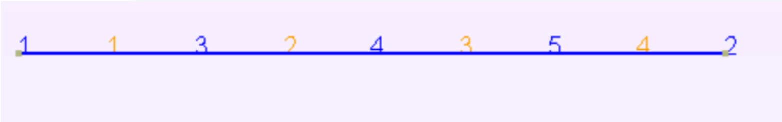
بهدف حل جملة المعادلات التفاضلية في موديل أحادي البعد لا بد من وجود شبكة عناصر أحادية البعد لذلك نقوم بتوليد الشبكة وبالبداية نختار ثلاثة عناصر فقط حتة نتمكن من تتبع الكود البرمجي بسهولة

5nods.geo - Notepad

File Edit Format View Help

```
// Gmsh project created on Sun May 21 14:35:44 2023
Point(1) = {0,0,0,0.2};
Point(2) = {1,0,0,0.2};
Line(1) = {1,2};
```

وتكون شبكة العناصر المتولدة مؤلفة من خمس عقد وأربعة عناصر:




```
$MeshFormat
2 0 8
$EndMeshFormat
$Nodes
5
1 0 0 0
2 1 0 0
3 0.2499999999995734 0 0
4 0.4999999999997156 0 0
5 0.7500000000005518 0 0
$EndNodes
$Elements
6
1 15 2 0 1 1
2 15 2 0 2 2
3 1 3 0 1 0 1 3
4 1 3 0 1 0 3 4
5 1 3 0 1 0 4 5
6 1 3 0 1 0 5 2
$EndElements
```

لربط ملف الخرج لبرنامج gmsh مع ملف الماتلاب يمكن استخدام الملف التالي

get_mesh1d.m

```
% read mesh file by Dr Nisrine MOHAMAD
clc
close all
clear all
% fid = fopen('1d.msh');
fid = fopen('5nods.msh');
for i=1:4
    s = fgetl(fid);
end
nnt= fscanf(fid,'%f',1);
vcorg = zeros(nnt,2);
for n=1:nnt
    temp = fscanf(fid,'%f',1);
    vcorg(n,1) = fscanf(fid,'%f',1);
    vcorg(n,2) = fscanf(fid,'%f',1);
    temp = fscanf(fid,'%f\n',1);
end
for i=1:2
    s = fgetl(fid);
end
nelt= fscanf(fid,'%f\n',1);
kconec = zeros(nelt,2);
s22 = fgetl(fid);
s33 = fgetl(fid);
kconec([1,2],[1,2])=[0 0 ;0 0];
for ie=3:nelt
    for n=1:6
        temp = fscanf(fid,'%f',1);
    end
    kconec(ie,1) = fscanf(fid,'%f',1);
    kconec(ie,2) = fscanf(fid,'%f\n',1);
end
figure(1)
for ie=3:nelt
    n1=kconec(ie,1); n2=kconec(ie,2);
     plot(vcorg([n1 n2],1),vcorg([n1 n2],2),'-o','Linewidth',2);
    xlabel('x')
    ylabel('y')
    set(gcf,'color','w');
    grid
    hold on
end
fclose(fid);
```

<u>*سؤال: احذف التعليمة الزائدة من البرنامج السابق*</u>

برنامج الحل الرقمي للمعادلة التفاضلية لمسألة التوازن الحراري بطريقة العناصر المنتهية

يعطى وفق الآتي D1T2023.m :

```
% FEM 1D By dr Nisrine MOHAMAD
% قراءة الشبكة
get_mesh1d
%_______________
%معطيات المسألة
Kd = 2;
f = 0;
T0 = 30;
T_ext=20;
h = 10;
L=1;
%______________________________
 %أبعاد مصفوفة الصلابة و الشعاع
vkg = zeros(nnt,nnt);
vfg = zeros(nnt,1);
%______________________________
%حلقة على العناصر
for ie=3:nelt
    %تحديد عقد العنصر وحساب إحداثياتها
    kloce = kconec(ie, :);
    vcore=vcorg( kloce ,:);
    %حساب طول العنصر
    Le=abs(diff(vcore(:,1)));
    %حساب مصفوفة الصلابة العنصرية
   vke = [(Kd/Le)  -(Kd/Le);(-Kd/Le)  (Kd/Le)];
    %حساب شعاع التحريض العنصري
    vfe = [f*Le/2;f*Le/2];
   %إسقاط مصفوفة الصلابة العنصرية في المصفوفة الكلية
    vkg(kloce,kloce) = vkg(kloce,kloce) + vke;
   %إسقاط شعاع التحريض العنصري في الشعاع الكلي f
    vfg(kloce,1) = vfg(kloce,1) + vfe;
end
%الشروط الحدية
```

```
%شرطDIRICHLET
%تحديد العقدة التي تخضع لشرطDIRICHLET
point1= find(vcorg(:,1)==0);
%عناصر سطر هذه النقطة تساوي الصفر
vkg(point1,:)= zeros(1,nnt);
%سطر وعمود العقدة =1
vkg(point1,point1)=1;
%تطبيق شرط DIRICHLET في الشعاع F الموافق للعقدة
vfg(point1,1)=T0;
%شرطcauchy
%تحديد العقدة التي تخضع لشرط Cauchy
pEnd= find(vcorg(:,1)==L);
%إضافةh للحد الموافق للعقدة في مصفوفة الصلابة الكلية
vkg(pEnd,pEnd)=vkg(pEnd,pEnd)+h;
%إضافة Text×h للحد الموافق للعقدة في شعاع التحريض الكليF
vfg(pEnd)=vfg(pEnd)+h*T_ext;
%الحل: نضرب طرفي المعادلة بمقلوب مصفوفة الصلابة
vsol = inv(vkg)*vfg;
%أو
% vsol = vkg\vfg;
%تمثيل الحل
figure(2)
%ارسم على المحور الأفقي إحداثيات النقاط وعلى المحور الشاقولي درجات الحرارة
hand=plot(vcorg(:,1),vsol,'rs')
%ضاعف عرض خط الرسم
set(hand, 'LineWidth', 2);
%المحور الأفقي هو x
xlabel('x')
%المحور الشاقولي هو T
ylabel('T(x)')
%اجعل الخلفية بيضاء
set(gcf,'color','w');
%ارسم خطوطاً أفقية وشاقولية
grid
```