**مبادئ الاحتمالات ( التحليل المزجي)**

**تعريف** : إن مجموعة كل النتائج الممكنة للتجربة الإحصائية يدعى بفضاء العينة و يرمز لفضاء العينة بالرمز  **.**

ففي تجربة إلقاء قطعة نرد مرة واحدة ، فإن فضاء العينة هو:

****

و في تجربة إلقاء قطعة نقود مرة واحدة ، فإن فضاء العينة هو: ****

**التحليل المزجي**

تذكير بالمبدأ الأساسي في العد

عندما يكون فضاء العينة صغيراً يكون حساب عناصره وترقيمها ثم حســاب احتمالاتها سهلاً.

ولكن عندما يكون الفضاء كبيراً فإن الحساب أو العد المباشر (للحالات الممكنة أو الملائمة) يصبح معقداً أو مستحيلاً . في مثل هذه الحالات لابد من الاستعانة بالتحليل المزجيمتمثلاً بالمبدأ الأساسي في العد.

سوف نتعرف في هذه المحاضرة على

* بالمبدأ الأساسي في العد
* التراتيب والتوافيق
* السحب مع إعادة أو بدون إعادة.

**المبدأ الأساسي في العد**

إذا كان حادث ما يظهر بـ  طريقة مختلفة وحادث آخر بعده يظهر بـ  طريقة مختلفة فإن عدد الطرق التي يظهر بها هذان الحادثان معاً هو  , وإذا كان عدد الحوادث الذي يظهر فيها واحد تلو الآخر  حادثاً بطرق قدرها  فإن عدد الطرق الكلية الناتجة من هذه العملية هو طريقة.

**تعرف هذه الحقيقة بالمبدأ الأساسي في العد**

**مثال 1 :**كم عددا" زوجيا" مؤلفا" من ثلاثة أرقام يمكن تشكيله من الأرقام التالية :

 **1,2,5,6**,9في الحالتين الآتيتين :

1- كل رقم يمكن استخدامه مرة واحدة فقط في تشكيل العدد المطلوب .

2- لا توجد شروط على عدد مرات تكرار الرقم في تشكيل العدد المطلوب ؟

الحل :

1- عدد طرق اختيار الآحاد هو 2 و ذلك لأنه لدينا فقط عددان زوجيان فقط.

 عدد طرق اختيار العشرات هو 4

 عدد طرق اختيار المئات هو 3

و بالتالي فإن عدد طرق تشكيل الأعداد الزوجية هو : 

 2- عدد طرق اختيار الآحاد هو 2 و ذلك لأنه لدينا فقط عددان زوجيان فقط .

 عدد طرق اختيار العشرات هو 5

 عدد طرق اختيار المئات هو 5

و بالتالي فإن عدد طرق تشكيل الأعداد الزوجية هو : 

ملاحظة : إذا كان لدينا العدد الطبيعي n , فإننا نعرف العدد  ( يقرأ nعاملي)

 بالشكل التالي : 

و هكذا نجد أن :  و نصطلح أن : 

**مثال 2 : لدى سيدة معطفان وثلاثة قمصـان وزوجين من الأحذية. بكم طريقة تستطيع تغيير هندامها؟**

**الحــل** . لنرمز لعدد المعاطف بالرمز فيكون عدد طرق اختيارها 

 و لعدد القمصان بالرمز  فيصبح عدد طرق اختيارها 

 ولعدد الأحـذية بالرمز  فيصبح عدد طرق اختيارها 

 فيكون عدد طرق تغيير الهندام بحسب القانون الأساسي للعد:



**التراتيب والتباديل:**

**تعرف تراتيب  من  على أنها عدد الطرق التي نرتب بها  عنصر مأخوذة من  من العناصر المختلفة ونرمز لها بالرمز**  .

بما أن  هي عدد طرق اختيار  من  عنصر فإنه:

**⮘** يوجد  طريقة للاختيار الأول أي  من  .

**⮘** يوجد  طريقة للاختيار الثاني أي  من  .

**⮘** .............. ................. ........................

**⮘** يوجد  طريقة للاختيار الأخير إي  من  .

لذلك ونتيجة للمبدأ الأساسي في العد يكون:

 

**ملاحظة1. في** الحالة التي يكون  يكون لدينا

 

في هذه الحالة تسمى التراتيب  بالتباديل

**ملاحظة2**. بالإمكان الاستفادة من رمز العاملي ! لوضع التراتيب بالشكل:



**مثال 3 : لتكن  مجموعة من الأحرف .**

**كم طريقة نستطيع تشكيل كلمات مكونة من ثلاثة أحرف مختلفة من هذه المجموعة ؟**

**الحـل:** عدد الاختيار للحرف الأول هو 

 فيصبح عدد الاختيار للحرف الثاني 

 ويصبح عدد الاختيار للحرف الثالث 

فيكون مجموع طرق تراتيب 3 من 7 أي أن

 

أو باستخدام رمز العاملي:

 

**الاختيارات المرتبة**

نحتاج في الاحصاء وفي حساب الاحتمالات لحساب اختيارات من نوع معين مثل:

⯇ سحب كرة (أو كرات) من صندوق .

⯇ سحب ورقة (أو ورقات) من ورق اللعب.

⯇ اختيار شخص من مجتمع ما ....الخ

وتتم هذه الاختيارات أحياناً مع الإعادة وأحياناً بدون إعادة.

من أجل الاختيار( أو السحب) بدون إعادة لدينا النظرية الآتية:

**مبرهنة 1** . **ليكن :** ا - **لدينا  من العناصر(كرات مثلاً).**

ﭒ- **نختار عنصراً ما بدون إعادة.**

ﭹ - **نعيد التجربة  مرة**

 **عندئذ نحصل على :**

****

 **من الطرق المرتبة ذات الحجم  من مجتمع يحتوي على  من العناصر.**

ومن أجل الاختيار( أو السحب) مع إعادة لدينا النظرية الآتية:

**مبرهنة 2** . **ليكن :** ﺁ - **لدينا  من العناصر(كرات مثلاً).**

ﭒ- **نختار عنصراً ما مع الإعادة.**

ﭹ - **نعيد التجربة  مرة**

**عندئذ نحصل على : **

 **من الطرق المرتبة مع الإعادة ذات الحجم  من ** .

------------------------

**مثال 4 : بكم طريقة نستطيع تكوين أعداد مكونة من أربعة أرقام من أصل عشرة**

 **أرقام :  إذا كانت :**

 **ﺁ - الإعادة مسموح بها ؟**

 **ﭒ- الإعادة غير مسموح بها؟**

**ﭹ - الإعادة غير مسموح بها والرقم الأخير هو ؟**

 **الحـل:** ﺁ **- يوجد تسع طرق لاختيار الرقم الأول من  (لأن الصفر لا يعد) وتوجد  طرق لكل من الأرقام الثاني والثالث والرابع (لأن السحب مع الإعادة)**

**بذلك يكون عدد الطرق هو : **

ﭒ- **يوجد تسع طرق لاختيار الرقم الأول من 10 . وبما أن السحب بدون إعادة فإن عدد الاختيارات الباقية هو تراتيب 3 من 9.**

 **وبذلك يكون عدد الطرق في هذه الحالة : **

ﭹ - **يوجد طريقة واحدة فقط لاختيار الصفر كرقم أخير . ولذلك سيكون عدد الأعداد الممكنة هو : .**

**التوافيق :**

 **تدعى عملية اختيار  عنصر من  عنصر (حيث لا يلعب الترتيب دوراً) بتوافيق  من  ويرمز لها بالرمز  حيث يعطى عدد التوافيق بالعلاقة :** 

**ملاحظة3: إذا كان الترتيب يلعب دوراً في الاختيار فإن عدد طرق الذي يمثلها هذا الدور هو  من التراتيب . أي أن**



**مثال 5 :** بكم طريقة يمكن اختيار لجنة تضم آنستين و ثلاثة شبان من مجموعة مكونة من 9 آنسات و 10 شبان .

الحل : إن عدد طرق اختيار الآنسات هو :

   

 إن عدد طرق اختيار الشبان هو :

  

و بالتالي حسب المبدأ الأساسي في العد فإن عدد طرق اختيار اللجنة المطلوبة هو :

 

**مثال 6 : بكم طريقة نستطيع اختيار لجنة مكونة من  أشخاص من أصل  إذا كانت اللجنة تتكون من: ﺁ - رئيس ونائب رئيس وأمين سر ؟**

 **ﭒ- من أي 3 أشخاص**؟

ا**لحـل**. ﺁ - بما أن الترتيب يلعب دوراً فالاختيار هو تراتيب **** من **** أشخاص. أي أن

 عدد الطرق هو:

 . 

 ﭒ- بما أن الترتيب لا يلعب دوراً هنا فالاختيار هو توافيق 3 من 8 أشخاص وعدد

 الطرق هو:

. 

# *تمارين عامة*

1. بكم طريقة يمكن أن نسحب ثلاث ورقات على التتالي من مجموعة ورق اللعب في الحالتين التاليتين :

 أ- السحب مع إعادة .

 ب) السحب بدون إعادة .

2) بكم طريقة يستطيع  شخصاً الجلوس:

 ٱ۔ في صف يحتوي على 12 كرسي ؟ ب- حول طاول مستديرة ؟

3) يحتوي صندوق على عشر كرات. أوجد العينات المرتبة ذات الحجم 3 في الحالتين التاليتين :

 أ- السحب مع إعادة . ب) السحب بدون إعادة .

4) أ- بكم طريقة يستطيع 3 شباب و 4 بنات الوقوف في صف واحد؟

#  ب- بكم طريقة يستطيعون فعل ذلك إذا كان على الفتيات أن يقفوا بجانب بعضهم البعض؟