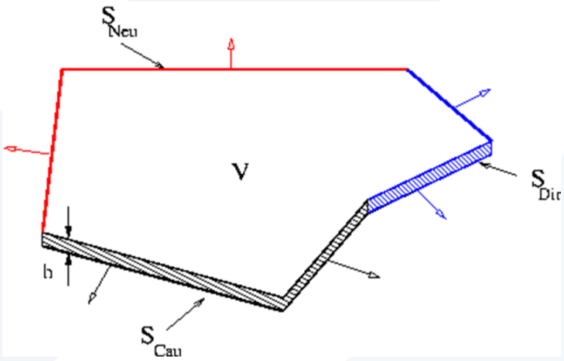
العناصر المنتهية في موديل ثنائي البعد

تعطى معادلة التوازن الحراري في موديل ثنائي البعد بالعلاقة:

$$\vec{\nabla}.\vec{q} - f = 0, \forall(x,y) \in A$$



$$T(x,y) = T_0 \ on \ S_{Dir}$$

$$\vec{q}.\vec{n} = q_0 \left(\text{معلوم}\right) on \ S_{Neu}$$

$$\vec{q}.\vec{n} = h(T - T_{ext}) \ on \ S_{Cau}$$

<u>الشكل التكاملي في الموديل ثنائي البعد:</u>

يتم اتباع خطوات مماثلة للموديل أحادي البعد 1D

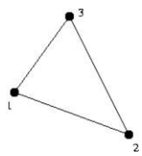
<u>طريقة الرواسب الترجيحية:</u>

$$W = \iint_A \vec{\nabla}\psi(x,y)k\vec{\nabla}T(x,y)dxdy - \oint_S \psi(s).k.\vec{\nabla}T.\vec{n}ds - \iint_A \psi(x,y)fdxdy = 0$$

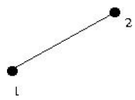
$$W = W_{\text{int}} + W_{CL} = 0$$

العناصر المنتهية التي تم اختيارها:

1- مثلث بثلاث عقد T3



2- عنصر أحادي البعد بعقدتين



الحد الذي يتضمن الشروط الحدية يمكن كتابته وفق الآتي:

$$W_{BC} = -\oint_{S} \psi(s) k . \vec{\nabla} T \, ds$$

$$= \int_{S_{Dir}} \psi(s) \underbrace{\left(-k \vec{\nabla} T\right)}_{\text{تدفق مجهول}} \vec{n} \, ds + \int_{S_{Neu}} \psi(s) \underbrace{\left(-k \vec{\nabla} T\right)}_{=q_0} \vec{n} \, ds + \int_{S_{Cau}} \psi(s) \underbrace{\left(-k \vec{\nabla} T\right)}_{=h(T - T_{ext})} \vec{n} \, ds$$

حد التدفق المجهول سيتم استبعاده بعد الأخذ بالاعتبار لشرط Dirichlet

حساب التكاملات على مستوى العناصر:

$$W = \sum_e W_{T3}^e + \sum_e W_{Neu}^e + \sum_e W_{Cau}^e + W_{Dir} = 0$$

$$W_{T3}^e = \iint_{Ae} \vec{\nabla} \psi(x,y) k \vec{\nabla} T(x,y) dxdy - \iint_{Ae} \psi(x,y) f \, dxdy$$

$$W_{Neu}^e = \int_0^{Le} \psi q_0 \, ds$$

$$W_{Cau}^e = \int_0^{Le} \psi h (T - T_{ext}) ds$$

التقريب العقدي للمتحولات:

$$T^*(x,y) = N_1(x,y)T_1 + N_2(x,y)T_2 + N_3(x,y)T_3 = \langle N_1(x,y) \quad N_2(x,y) \quad N_3(x,y) \rangle \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix}$$

تكون توابع تقريب خطية (معادلة مستوي) وتعطى وفق الآتي من مثلث باسكال:

$$N_i(x,y) = a_i + b_i x + c_i y, \quad i = 1,2,3$$

يتم حساب توابع التقريب اعتماداً على خصائصها:

$$N_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

بحل جملة المعادلات الموافقة لثلاثة مجاهيل:

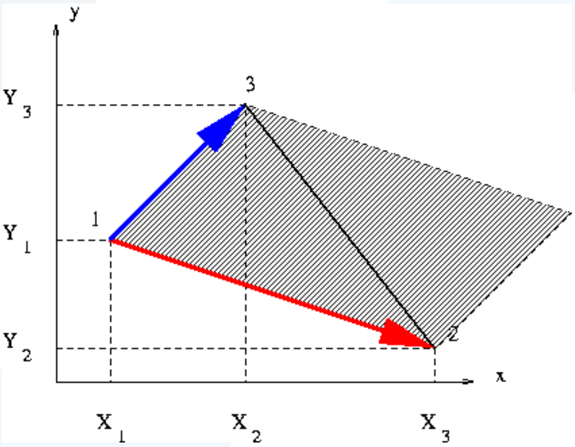
$$\begin{cases} N_1(x_1,y_1)=1=a_1+b_1x_1+c_1y_1 \\ N_1(x_2,y_2)=0=a_1+b_1x_2+c_1y_2 \\ N_1(x_3,y_3)=0=a_1+b_1x_3+c_1y_3 \end{cases}, \begin{cases} N_2(x_1,y_1)=0=a_2+b_2x_1+c_2y_1 \\ N_2(x_2,y_2)=1=a_2+b_2x_2+c_2y_2 \\ N_2(x_3,y_3)=0=a_2+b_2x_3+c_2y_3 \end{cases}, \begin{cases} N_3(x_1,y_1)=0=a_3+b_3x_1+c_3y_1 \\ N_3(x_2,y_2)=0=a_3+b_3x_2+c_3y_2 \\ N_3(x_3,y_3)=1=a_3+b_3x_3+c_3y_3 \end{cases}$$

$$N_1(x,y)=\frac{1}{2A^e}\left((y_3-y_2)(x_2-x)-(x_3-x_2)(y_2-y)\right)$$

$$N_2(x,y)=\frac{1}{2A^e}\left((y_1-y_3)(x_3-x)-(x_1-x_3)(y_3-y)\right)$$

$$N_3(x,y)=\frac{1}{2A^e}\left((y_2-y_1)(x_1-x)-(x_2-x_1)(y_1-y)\right)$$

حساب مساحة السطح المثلثي لعنصرٍ منتهٍ:



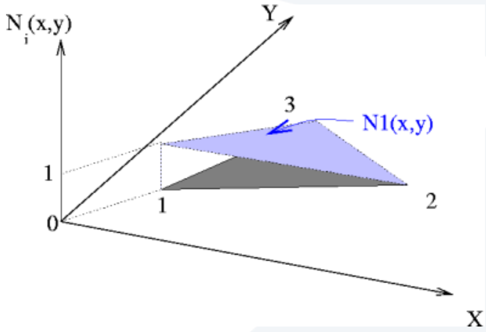
$$\left(\vec{X}_2-\vec{X}_1\right)\wedge\left(\vec{X}_3-\vec{X}_1\right)=\begin{vmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \end{vmatrix}\wedge\begin{vmatrix} x_3-x_1 \\ y_3-y_1 \end{vmatrix}$$

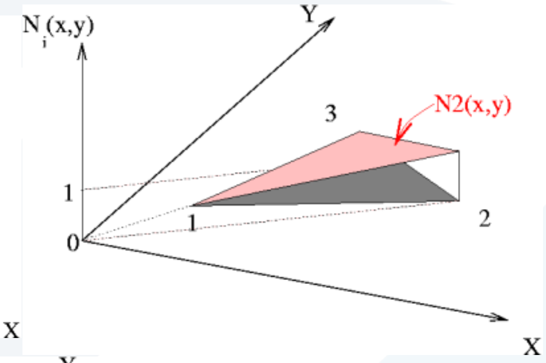
$$=\left(x_2-x_1\right)\left(y_3-y_1\right)-\left(x_3-x_1\right)\left(y_2-y_1\right)$$

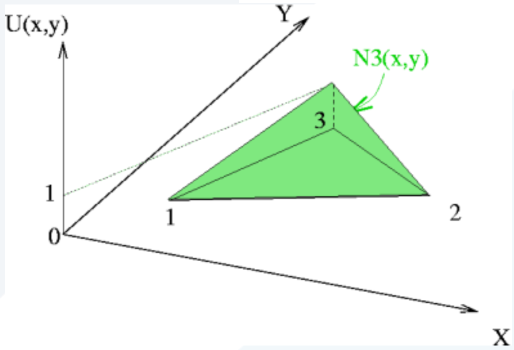
$$=2\times A^e$$

$$A^e=\frac{(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)}{2}$$

يتم تمثيل توابع الشكل وفق الأشكال أدناه.







$$\vec{\nabla} T(x,y)=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial T}{\partial x}\\ \dfrac{\partial T}{\partial y}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x}\\ N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}T_1\\ T_2\\ T_3\end{Bmatrix}=\underbrace{\frac{1}{2A^e}\begin{bmatrix}y_{23} & y_{31} & y_{12}\\ x_{32} & x_{13} & x_{21}\end{bmatrix}}_{=[B]}\begin{Bmatrix}T_1\\ T_2\\ T_3\end{Bmatrix}$$

التكامل على مستوى العنصر المثلثي يأخذ الشكل التالي:

$$W_{T3}^{e}=\iint_{Ae}\langle\psi_1\ \ \psi_2\ \ \psi_3\rangle[B]^T k\,[B]\begin{Bmatrix}T_1\\ T_2\\ T_3\end{Bmatrix}dxdy-\iint_{Ae}\langle\psi_1\ \ \psi_2\ \ \psi_3\rangle\begin{Bmatrix}N_1\\ N_2\\ N_3\end{Bmatrix}\underset{cte}{f}\ dxdy$$

$$W_{T3}^{e} = \langle \psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3 \rangle [K^e] \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} - \langle \psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3 \rangle \{F^e\}$$

$$vke^{T_3} = k\,.A^e \left[B\right]^T \left[B\right], \ vfe^{T_3} = f \ \frac{A^e}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\left(\iint_{Ae} N_i\left(x\,, y\right) dx\, dy = \frac{A^e}{3}, \ \ i = 1,2,3 \right)$$