جَامعة المَنارة
MANARA UNIVERSITY

التحليل الرياضي ١

المحاضرة 2 ميكاترونيكس

نظري

Prepared by
Dr. Sami INJROU

ملاحظة: التابع الأسي الطبيعي

$$f(x)=e^{g(x)}$$

مثال

أوجد مجموعة تعريف التابعين

$$1)\ f(x)=\frac{1-e^{x^2}}{1-e^{1-x^2}} \qquad 2)\ f(x)=\frac{1+x}{e^{\cos x}}$$

$$1)\ (-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty) \qquad 2)\ R$$

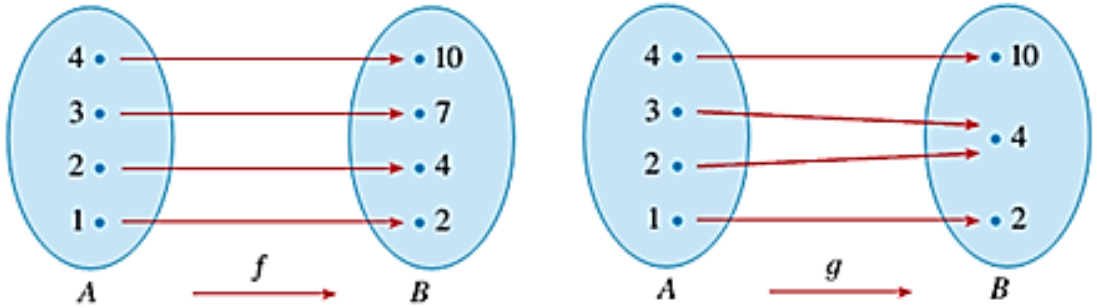
التابع المتباين One to one

تعريف: نقول أن التابع $y=f(x)$ متبايناً إذا أدى تباين قيم المتحول x إلى تباين قيم التابع y ، أي أنه إذا تحقق:

$$x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2) \qquad \text{أو} \qquad f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$$

اختبار الخط الأفقي

الخط الأفقي يقطع بيان التابع المتباين في نقطة واحدة فقط.



متباين

غير متباين

ملاحظة: ينتج من هذه التعاريف أن التابع المتزايد تماماً (أو المتناقص تماماً) في مجالٍ ما متباين في هذا المجال.

التابع العكسي

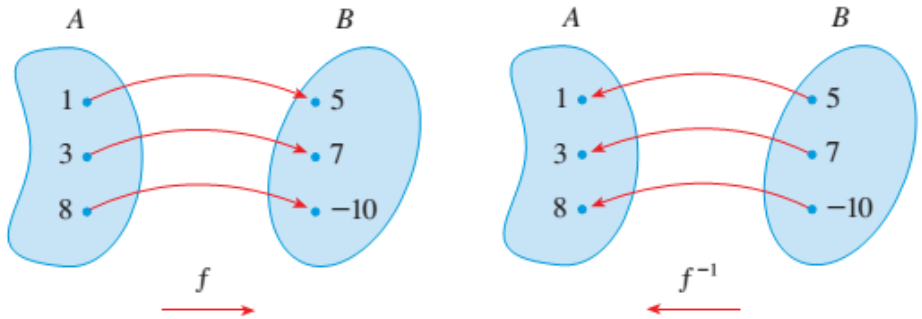
ليكن $f(x)$ تابعاً متبايناً مجموعة تعريفه I ومداه I_1، فإذا كان $g(x)$ تابعاً آخر مجموعة تعريفه I_1 ومداه I، فإن التابع $g(x)$ يسمى التابع العكسي للتابع $f(x)$ إذا تحقق الشرط الآتي:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$$

وذلك من أجل كل x من I ومن أجل كل y من I_1.

Note that

$$\text{domain of } f^{-1} = \text{range of } f$$
$$\text{range of } f^{-1} = \text{domain of } f$$



لتعيين التابع العكسي $y = f^{-1}(x)$ للتابع $y = f(x)$ نتبع الخطوات التالية:

1) نتأكد من أن التابع $f(x)$ متباين في مجالٍ ما وليكن I_0،

2) نحل المعادلة $y = f(x)$ بالنسبة لـ x، فنحصل على التابع $x = f^{-1}(y)$،

3) نستبدل كل x بـ y وكل y بـ x، فنحصل على التابع $y = f^{-1}(x)$.

مثال أوجد التابع العكسي للتابع $f(x)=x^3+1\ ;\ x\geq 0$

الحل

١- نثبت أن التابع المعطى متباين

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1^3+1=x_2^3+1\Rightarrow x_1^3=x_2^3\Rightarrow x_1=x_2$$

٢- نحل المعادلة $y=x^3+1$

$$x^3=y-1\Rightarrow x=\sqrt[3]{y-1}$$

$$x=f^{-1}(y)=\sqrt[3]{y-1}\quad ;\ y\geq 1$$

٣- نستبدل كل x بـ y وكل y بـ x، فنحصل على التابع $y=f^{-1}(x)$.

$$y=f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-1}\quad ;\ x\geq 1$$

مثال أوجد التابع العكسي للتابع $f(x) = 3x - 5$

الحل

بما أن التابع المعطى متزايد تماماً، فهو متباين ومجاله $(-\infty , \infty)$ وهو نفس مجاله المقابل. وبما أن:

$$y = 3x - 5$$

$$\Downarrow$$

$$x = \frac{y+5}{3} \equiv f^{-1}(y)$$

$$\Downarrow$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$$

10. التابع اللوغاريتمي

يسمى التابع العكسي للتابع الأسي $f(x)=a^x$ بالتابع اللوغاريتمي بالنسبة للأساس a ويكتب بالشكل

$$f^{-1}(x)=\log_a x$$

$$a^{\log_a x}=x \quad \text{for } x>0$$

$$\log_a a^x=x \quad \text{for } x\in R$$

$$\log_a(s.t)=\log_a(s)+\log_a(t)$$

$$\log_a(s/t)=\log_a(s)-\log_a(t)$$

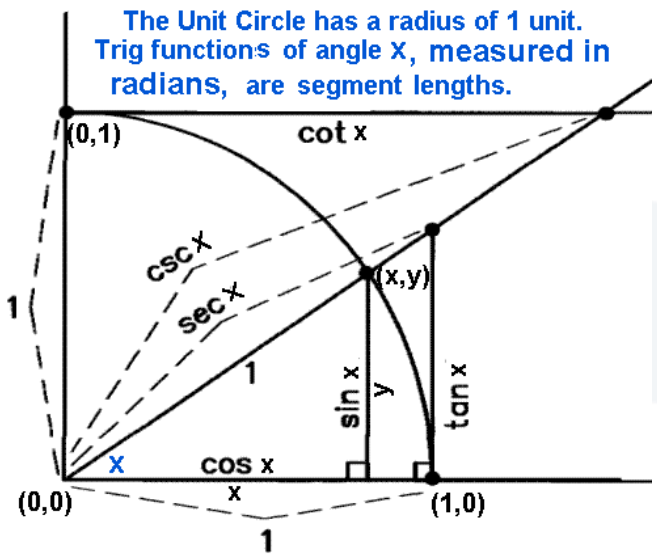
$$\log_a(s^r)=r\log_a(s) \qquad ; \quad r\in R$$

تابع اللوغاريتم الطبيعي

$$\log_e x=\ln x$$

ملاحظة من أجل العدد الموجب غير الصفري a لدينا

$$(1)\ \log_a x=\frac{\ln x}{\ln a} \qquad (2)\ a^x=e^{x\ln a}=\exp(x\ln a) \qquad (3)\ \log_{1/a} x=-\log_a x$$



11. التوابع المثلثية والمثلثية العكسية

أ) تابع الجيب $y = \sin x$ ، وهو معرف على مجموعة الأعداد الحقيقي R ،

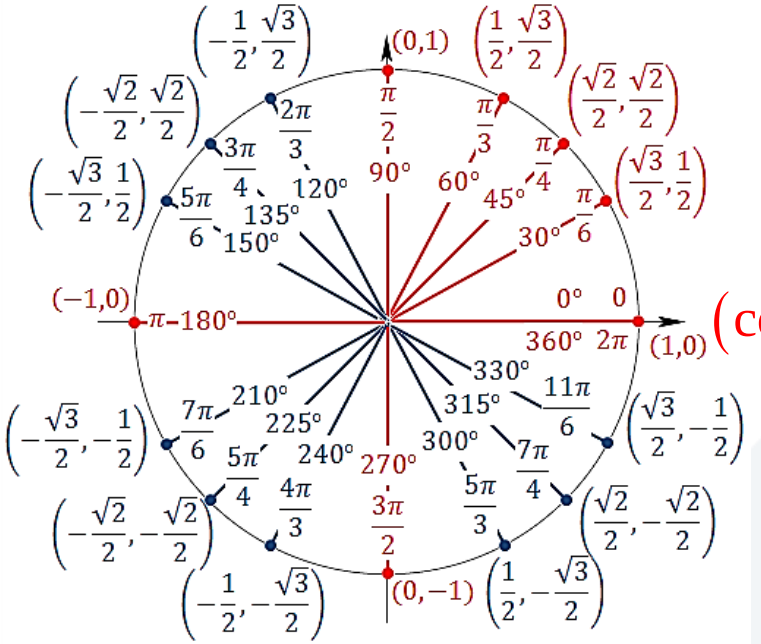
ب) تابع جيب التمام أو التجيب $y = \cos x$ ، وهو معرف على R ،

جـ) تابع الظل $y = \tan x$ ، وهو معرف على مجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء القيم

$$x = \frac{\pi}{2} + n\pi \;;\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

توجد بعض التوابع المثلثية الأخرى منها:

$$\operatorname{ctan} x = \frac{1}{\tan x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$



متطابقات مثلثية

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \qquad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

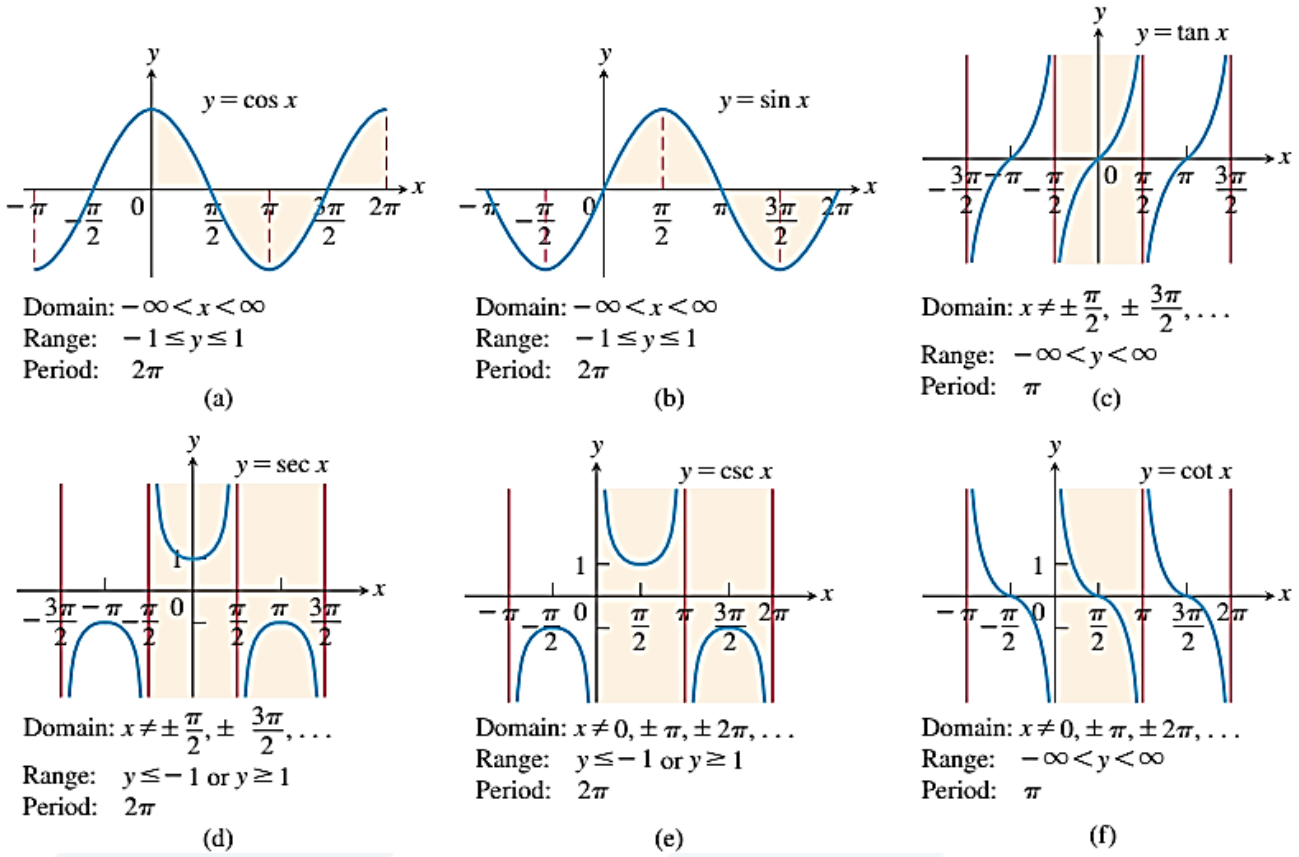
$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

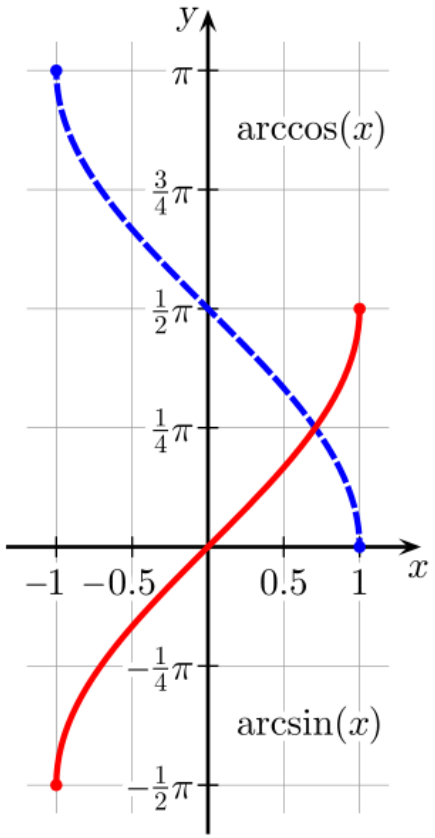
قانون ضعف الزاوية

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$
$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

قانون نصف الزاوية



التابع $y=\sin^{-1}x$ يعطي القوس الدائري (arc) الذي جيبه x ، لذا يرمز لتابع الجيب العكسي بـ $\arcsin x$.



$$\sin(\arcsin x)=x \quad ; \quad -1\le x\le 1 \qquad\qquad \arcsin(\sin x)=x \;;\; -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$$

التابع العكسي للتابع $y=\cos x$ وهو $y=\arccos x$ مجموعة تعريفه $[-1\,,1]$ ومداه $[0\,,\pi]$

$$\cos(\arccos x)=x \;;\; -1\le x\le 1 \qquad\qquad \arccos(\cos x)=x \;;\; 0\le x\le\pi$$

التابع العكسي للتابع $y=\tan x$ على أنه $\arctan x$ ومجال تعريفه $(-\infty,\infty)$ ومجاله المقابل $\left[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right]$

التابع العكسي للتابع $y=\tan x$ على أنه $\arctan x$ ومجال تعريفه $(-\infty,\infty)$ ومجاله المقابل $\left[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right]$

$$\tan(\arctan x)=x \;;\; -\infty<x<\infty \qquad\qquad \arctan(\tan x)=x \;;\; -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$$

$$\arctan(1)=\frac{\pi}{4} \qquad \arcsin(1/2)=\frac{\pi}{6} \qquad \arcsin(\sqrt{2}/2)=\frac{\pi}{4}$$

12. التوابع القطعية والقطعية العكسية

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

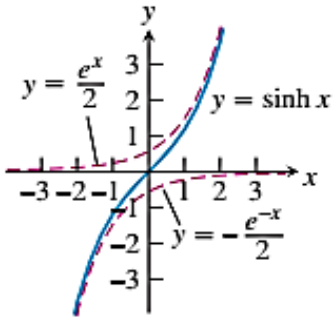
$$y = \sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \qquad y = \cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \qquad y = \tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

متطابقات

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$
$$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$$
$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

$$\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$$
$$\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$$

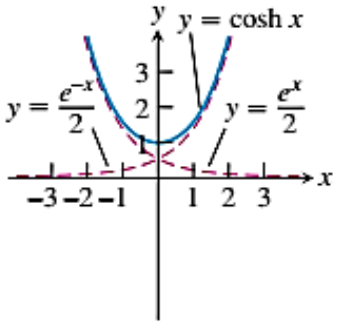
$$\tanh^2 x = 1 - \operatorname{sech}^2 x$$
$$\coth^2 x = 1 + \operatorname{csch}^2 x$$



(a)

Hyperbolic sine:

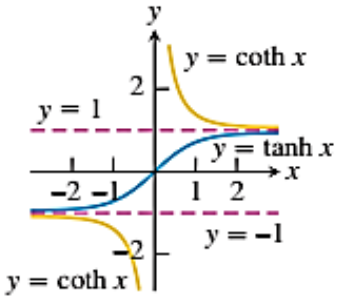
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



(b)

Hyperbolic cosine:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



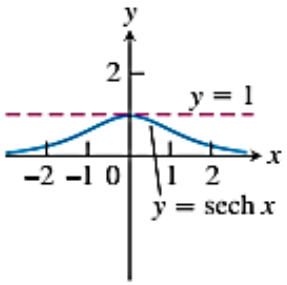
(c)

Hyperbolic tangent:

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Hyperbolic cotangent:

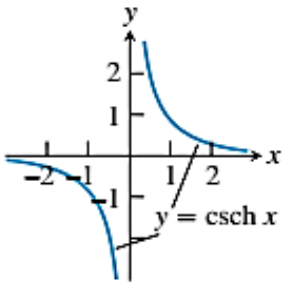
$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$



(d)

Hyperbolic secant:

$$\text{sech}\, x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$



(e)

Hyperbolic cosecant:

$$\text{csch}\, x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

العمليّات على التّوابع :

تعريف 5 :

ليكن $f: U \to \mathbb{R}$ و $g: U \to \mathbb{R}$ تابعين معرّفين على المجموعة U الجزئيّة من $\mathbb{R}$. بإمكاننا تعريف التّوابع الآتية :

- مجموع التّابعين f و g هو التّابع $f + g: U \to \mathbb{R}$ المعرّف بالشّكل $(f+g)(x) = f(x) + g(x), \ \forall x \in U$
- جداء التّابعين f و g هو التّابع $f.g: U \to \mathbb{R}$ المعرّف بالشّكل $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x), \ \forall x \in U$
- جداء التّابع f بعدد السلمي λ هو التّابع $\lambda.f: U \to \mathbb{R}$ المعرّف بالشّكل $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x), \ \forall x \in U$

تعريف 5 (مقصور التّابع f) :

ليكن f تطبيقاً معرّفاً على المجال $I \subset \mathbb{R}$. وليكن I_0 مجالاً من مجموعة الأعداد الحقيقيّة محتوى في المجال I. يدعى التّابع المعرّف على I_0 بمقصور التّطبيق f على المجال I_0 ، ويرمز له بـ $f|_{I_0}$

$$\forall x_0 \in I_0 \quad f|_{I_0}(x) = f(x)$$

تركيب التّوابع :

تعريف 6 : تركيب تابعين

ليكن f تابعاً معرّفاً على المجال $(I \subseteq \mathbb{R})$، ويأخذ قيمه في المجال $(J \subseteq \mathbb{R})$، وليكن g تابعاً معرّفاً على المجال $(J \subseteq \mathbb{R})$، ويأخذ قيمه في المجال $(K \subseteq \mathbb{R})$ تركيب التّابعين f, g هو تابع جديد، ويرمز له بـ $(g \circ f)$، ويعرّف بالشّكل :

$$\forall x \in I \quad (g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

$$g \circ f : I \xrightarrow{f} J \xrightarrow{g} K$$

$$x \mapsto f(x) \mapsto g\big(f(x)\big)$$

مثال

ليكن $g(x) = \cos x$ ، $f(x) = 2x - 3,$ أوجد $(f \circ g)$ و $(g \circ f)$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\cos x) = 2\cos x - 3$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x - 3) = \cos(2x - 3)$$

نلاحظ أنّ : $(g \circ f) \neq (f \circ g)$

مثال

ليكن لدينا التابع $F(x) = \cos\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)$ أوجد التوابع f, g, h بحيث يكون $F(x) = f \circ g \circ h(x)$

الحل

$$h(x) = x^2 \ , \ g(x) = \frac{x}{x+1} \ , f(x) = \cos x$$

نهاية تابع عددي

إذا كان $f(x)$ تابعاً معرفاً في المجال $(a\ ,\ b)$ الذي يحوي x_0 (يمكن للتابع أن لا يكون معرفاً عند x_0) نقول إن العدد الحقيقي A هو نهاية التابع $f(x)$ عندما يسعى x إلى x_0، ونعبر عن ذلك رياضياً بالرمز $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$،

مبرهنة: يكون العدد الحقيقي A هو نهاية التابع $f(x)$ عندما يسعى x إلى x_0، إذا وفقط إذا كان:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = A$$

خواص النهايات

1) إذا وجدت نهاية التابع العددي فهي وحيدة.

2) إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ تابعان عدديان بحيث أن نهاية كل منهما موجودة عندما يسعى x إلى x_0، وكان a و b ثابتان عدديان، فإن:

$$\lim_{x\to x_0}[af(x)\pm bg(x)]=\lim_{x\to x_0} af(x)\pm b\lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} \quad ; \quad \lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[(f(x))^{g(x)}\right]=\left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]^{\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right)}$$

وإذا كان n عدداً صحيحاً فردياً أو كان n عدداً صحيحاً زوجياً و $\lim_{x\to x_0} f(x)>0$ ، فإن:

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to x_0} f(x)}$$

مثال

احسب النهاية الآتية: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+3}{x+1}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+3}{x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+3)}{\lim\limits_{x\to 1}(x+1)}=\frac{2(1)+3}{1+1}=\frac{5}{2}$$

مثال

احسب النهاية الآتية: $\lim\limits_{x\to 2}(2x+3)^{(x-1)}$

$$\lim_{x\to 2}(2x+3)^{(x-1)}=\left(2(2)+3\right)^{(2-1)}=7$$

مثال

احسب النهاية الآتية: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}\,\frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+9}+3}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+9-9}{x^2\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}$$

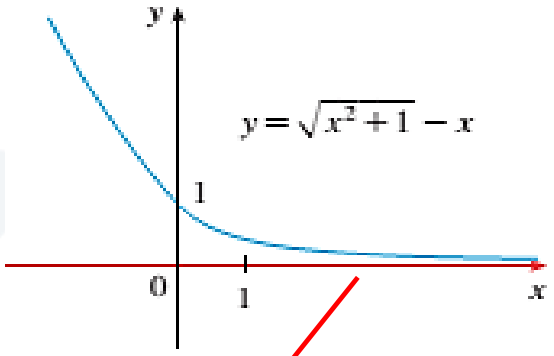
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+9}+3}=\frac{1}{6}$$

مثال

احسب النهاية الآتية: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

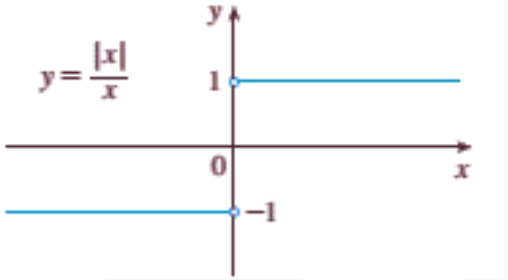


مقارب افقي

مثال

هل النهاية الآتية موجودة $\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$

$$|x|=\begin{cases} x & ;\ x\geq 0 \\ -x & ;\ x<0 \end{cases}$$



$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1\neq\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

النهاية غير موجودة