جَامعة المَنارة
MANARA UNIVERSITY

التحليل الرياضي ١

المحاضرة 1 ميكاترونيكس

نظري

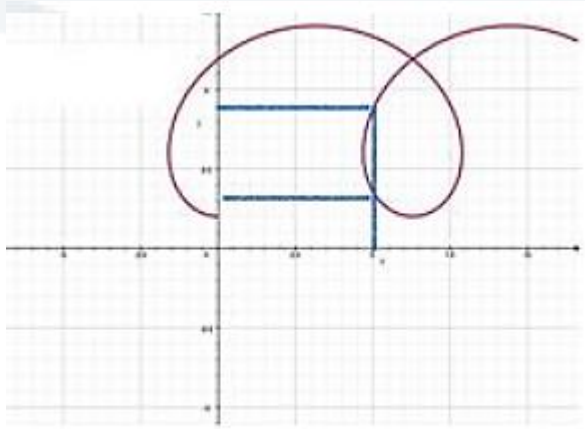
Prepared by
Dr. Sami INJROU

مفهوم التّابع :

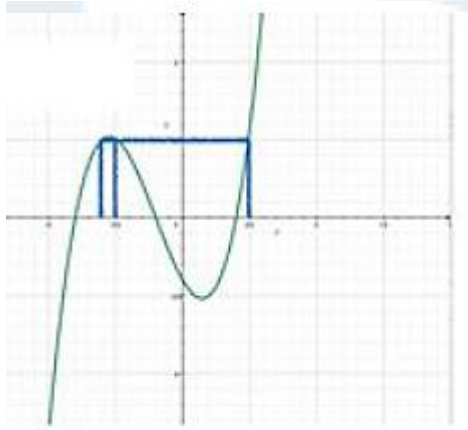
التّابع لقيم حقيقيّة بقيم حقيقيّة f، يعرف بـ مجموعة المنطلق $(I \subset \mathbb{R})$، ومجموعة المستقر $(J \subset \mathbb{R})$، وبعلاقة تربط كلّ عنصر من عناصر المنطلق بعنصر واحد على الأكثر من عناصر المستقر.

اختبار الخط الشاقولي

لا يمكن أن يقطع أي خط شاقولي بيان تابع بأكثر من نقطة.



ليس تابع



تابع

تعريف 2 (مجموعة تعريف التّابع Domain)

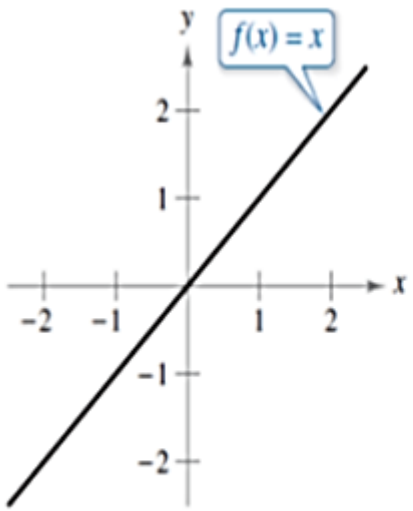
ليكن $(I \subset \mathbb{R})$ و $(J \subset \mathbb{R})$ تدعى مجموعة عناصر المنطلق I الّتي تملك صورة وفق التّابع f ضمن J **مجموعة تعريف التّابع** f، ونرمز لها بـ $\mathcal{D}_f$.

ملاحظة : المستقر الفعليّ (المدى- Range) للتابع هو مجموعة جزئيّة من المستقر J، تحتوي فقط على صور عناصر مجموعة التّعريف.

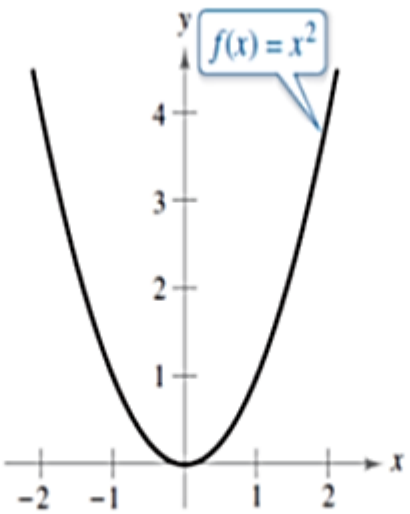
تعريف 4 :

بيان التّابع $f: U \to \mathbb{R}$، هي المجموعة Γ_f الجزئيّة من $\mathbb{R}^2$ المعرّفة بالشّكل

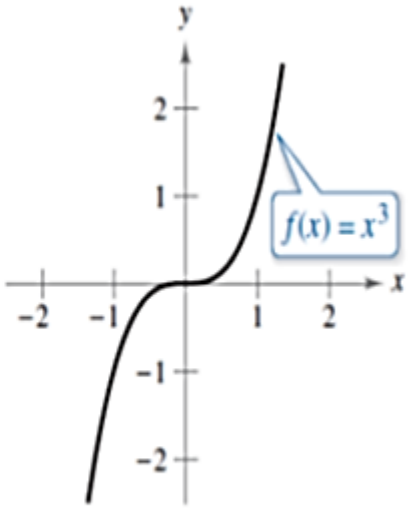
$$\Gamma_f := \{(x, f(x)); \quad x \in U\}$$



التابع الخطي (المطابق)



التابع التربيعي



التابع التكعيبي

مثال

أوجد مجموعة التّعريف والمدى للتّابع $f(x) = \sqrt{x-1}$

مجموعة تعريف التّابع، هي :

$$x - 1 \geq 0 \implies x \in [1, +\infty[$$

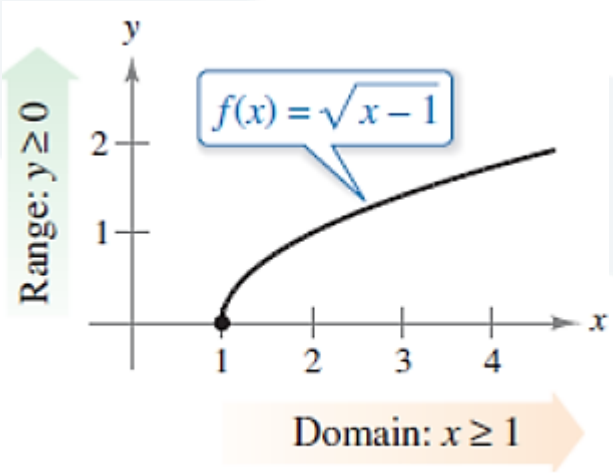
المدى : $[0, +\infty[$

مثال

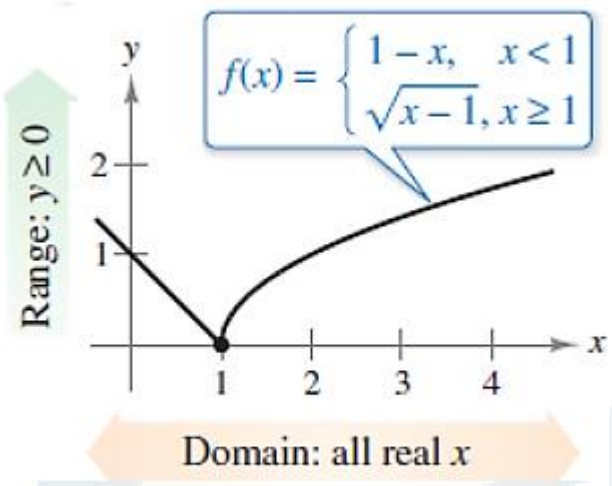
أوجد مجموعة التّعريف والمدى للتابع $f(x) = \begin{cases} 1-x & if \ \ x < 1 \\ \sqrt{x-1} & if \ x \geq 1 \end{cases}$

التّابع معرّف على قيم $x < 1$ وعلى قيم $x \geq 1$، وبذلك مجموعة تعريف التّابع هي كامل $\mathbb{R}$

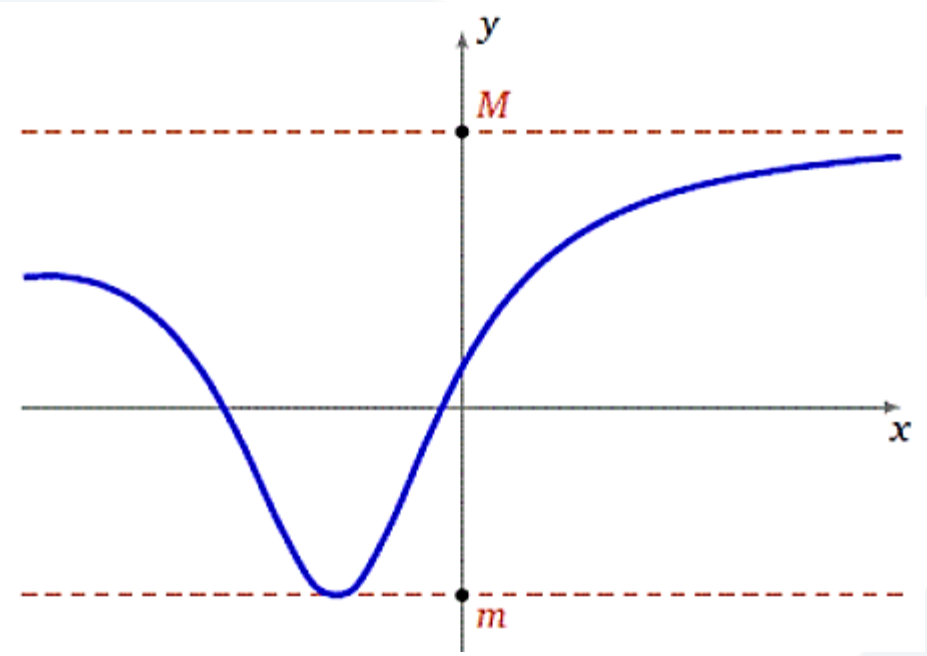
المدى : $[0, +\infty[$



مجموعة التّعريف والمدى



مجموعة التّعريف والمدى



التّوابع المحدودة :

تعريف 7: ليكن $f: U \to \mathbb{R}$ و $g: U \to \mathbb{R}$ تابعين عندئذ :

- يكون $f \geq g$ إذا تحقّق $f(x) \geq g(x)$، من أجل كلّ x من U.
- يكون $f \geq 0$ إذا تحقّق $f(x) \geq 0$ ، من أجل كلّ x من U.
- يكون $f > 0$ إذا تحقّق $f(x) > 0$، من أجل كلّ x من U.
- يكون التّابع f ثابتاً إذا تحقّق : $\exists \alpha \in \mathbb{R};\ \forall x \in U;\ f(x) = \alpha$
- يكون f تابع صفريّ إذا تحقّق $f(x) = 0$ ، من أجل كلّ x من U.

تعريف 8 : ليكن $f: U \to \mathbb{R}$ تابع يقال عن :

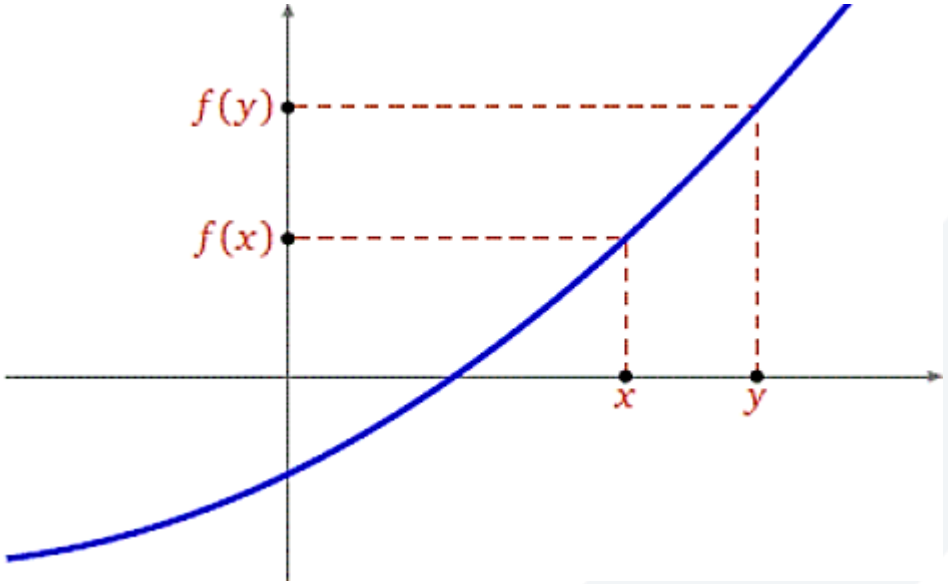
- f إنّه تابع محدود من الأعلى على U إذا تحقّق : $\exists M \in \mathbb{R};\ \forall x \in U;\ f(x) \leq M$
- f إنّه تابع محدود من الأدنى على U إذا تحقّق : $\exists m \in \mathbb{R};\ \forall x \in U;\ f(x) \geq m$

f إنّه تابع محدود على U إذا كان محدوداً من الأعلى والأدنى في آن معاً. وبكلام آخر: $\exists M \in \mathbb{R};\ \forall x \in U;\ |f(x)| \leq M$

التّوابع المضطردة

تعريف 9 (التّوابع المضطردة) : ليكن $f: U \to \mathbb{R}$ تابع ما، يقال عن :

- f إنّه تابع متزايد على U إذا تحقّق : $\forall x, y \in U\,;\quad x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$
- f إنّه تابع متزايد تماما على U إذا تحقّق : $\forall x, y \in U\;;\; x < y \implies f(x) < f(y)$
- f إنّه تابع متناقص على U إذا تحقّق : $\forall x, y \in U\;;\; x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$
- f إنّه تابع متناقص تماماً على U إذا تحقّق : $\forall x, y \in U\;;\; x < y \implies f(x) > f(y)$
- f مضطرد (مضطرد تماماً)، إذا كان متزايداً أو متناقصاً (متزايداً تماماً أو متناقصاً تماماً).



أمثلة :

- تابع الجذر التّربيعي $\begin{cases} [0,\infty[\to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{cases}$ متزايد تماماً.

- التّابع الأسيّ $\exp: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$، والتّابع اللوغاريتمي الطّبيعيّ $\ln:]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$، يمثّلان تابعين متزايدين تماماً.

- تابع القيمة المطلقة $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{cases}$ تابع ليس متزايداً ولا متناقصاً، بينما التّابع $\begin{cases} [0,\infty[\to \mathbb{R} \\ x \longmapsto |x| \end{cases}$ متزايد تماماً.

التّوابع الزّوجيّة- الفرديّة – الدّوريّة :

ليكن I مجالاً من $\mathbb{R}$ متناظراً بالنّسبة إلى الصّفر؛ (أي أنّه من الشّكل $[-a,a]$ أو $]-a,a[$ أو $\mathbb{R}$)، وليكن $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$، يقال عن f إنّه :

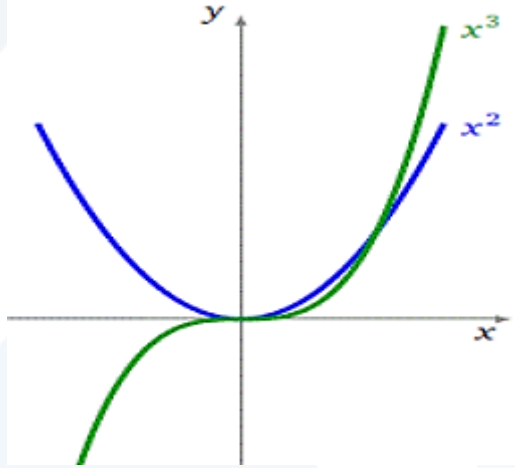
- زوجيّ إذا تحقّق : $$f(-x) = f(x)$$

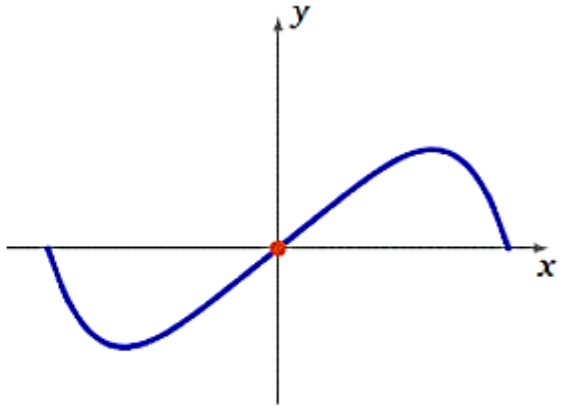
- فرديّ إذا تحقّق : $$f(-x) = -f(x)$$

التّوابع الزّوجيّة- الفرديّة – الدّوريّة :

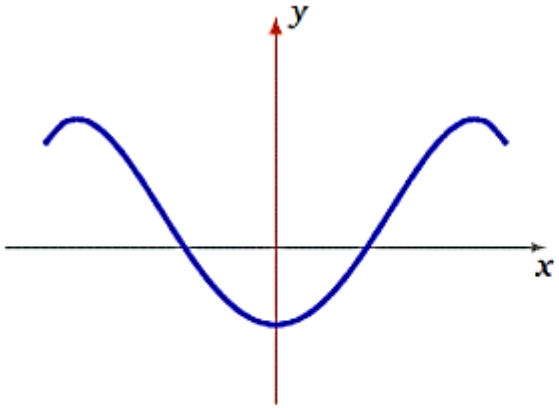
بيانيّاً :

- يكون التّابع f زوجيّاً، إذا وفقط إذا كان بيانه متناظراً بالنّسبة إلى محور التّراتيب.
- يكون التّابع f فرديّاً، إذا وفقط إذا كان بيانه متناظراً بالنّسبة إلى مبدأ الإحداثيات.





الشّكل تابع فرديّ



الشّكل تابع زوجيّ

أمثلة :

- التّابع المعرّف بالشّكل $x \longmapsto x^{2n}$; $\forall n \in \mathbb{N}$ زوجيّ.
- التّابع المعرّف بالشّكل $x \longmapsto x^{2n+1}$; $\forall n \in \mathbb{N}$ فرديّ.
- التّابع $\cos: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ زوجيّ، والتّابع $\sin: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ فرديّ.

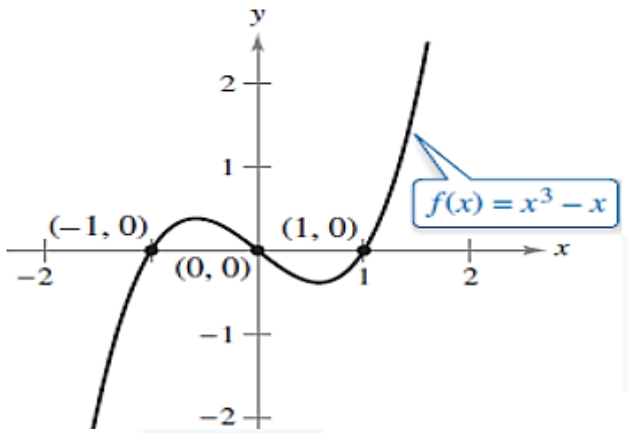
مثال

حدّد إذا كان التّابع فرديّاً أو زوجيّاً، ثمّ أوجد أصفار التّابع لكلّ من التّابعين : $f(x) = x^3 - x, \quad g(x) = 1 + \cos x$

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x)$$

التّابع f فردي

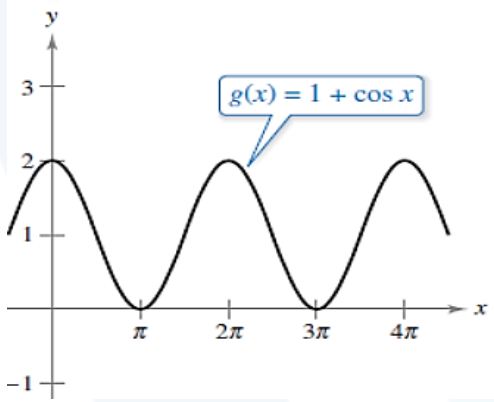
$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 0, 1, -1$$



$$g(-x) = 1 + \cos(-x) = 1 + \cos x = g(x)$$

التّابع g زوجي

$$g(x) = 0 \Rightarrow 1 + \cos x = 0 \Rightarrow x = (2n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$



بعض التوابع العددية المألوفة

1. التّابع الثابت :

التّابع الثابت هو تابع معرّف على $I = \mathbb{R}$ كما يلي :

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto a$$

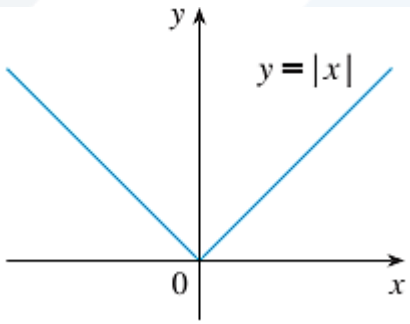
حيث a عدد حقيقيّ.

2. التّابع المطابق :

$$Id: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x$$

3. تابع القيمة المطلقة :

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = |x| = \begin{cases} x & if \quad x \geq 0 \\ -x & if \ x < 0 \end{cases}$$



5. تابع القوى الصّحيحة :

تعريف :

ليكن $a \in \mathbb{R}$ عدداً حقيقيّاً غير معدوم، وn عدداً طبيعيّاً, تعرف قوّة العدد a من الدّرجة n بالشّكل : $a^n = a \times a \times a \times \ldots \times a$

خاصة :

ليكن a, b عددين حقيقيّين، وليكن n, p عددين طبيعيّين. الخصائص الآتية محقّقة :

$$a^n . a^p = a^{n+p} \quad , \quad (a^n)^p = a^{np} \, , \quad a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

عندما $b \neq 0$ يكون :

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n , \quad b^n = \frac{1}{b^{-n}}$$

والآن لنعرّف تابع القوى الصّحيحة بالشّكل الآتي :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^n$$

نميز الحالات الآتية :

- عندما $n = 0$, نحصل على التّابع الثّابت.
- عندما $n = 1$, نحصل على التّابع المطابق.
- عندما n زوجيّ, يكون التّابع f زوجيّاً.
- عندما n فرديّ, يكون التّابع f فرديّاً.
- إذا كان n سالباً، علينا الانتباه إلى أنّ مجموعة تعريف التّابع f، تكون $\mathbb{R}^*$.
- عندما $n = -1$, نحصل على تابع المقلوب .

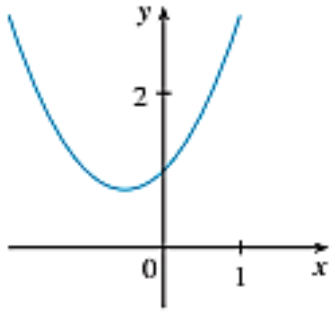
$$f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

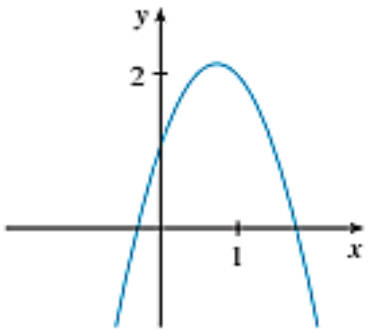
6. تابع كثيرات الحدود :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

حيث $a_0, a_1, \ldots, a_n$ أعداد حقيقيّة، (قد تكون معدومة)، تدعى أمثال كثيرة الحدود.



(a) $y = x^2 + x + 1$



(b) $y = -2x^2 + 3x + 1$

7. التابع الكسري

$$f(x)=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_{m-1}x^{m-1}+b_mx^m}$$

مجموعة تعريف التابع الكسري هي كل مجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء القيم التي تعدم المقام، فمثلاً التابع:

$$y=\frac{x-1}{x^2-7x+12}$$

تابع كسري مجموعة تعريفه هي $\mathbb{R}\setminus\{3,4\}$

8. تابع الجذر النوني

$$f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$$

حيث أن $g(x)$ تابع صحيح غير ثابت، وأن n عدد صحيح أكبر من الواحد.

عندما يكون n عدداً زوجياً، فإن مجال تعريف التابع الجذري هي مجموعة قيم x التي يكون لأجلها التابع $g(x)$ معرفاً وغير سالب، وعندما يكون n عدداً فردياً، فإن مجال تعريف التابع الجذري هو نفس مجال تعريف التابع $g(x)$

التابع $y=\sqrt{x+4}$ معرف عندما تكون $x\geq -4$،

التابع $y=\sqrt[3]{x+4}$ معرف من أجل أي قيمة لـ x.

9. التابع الأسي

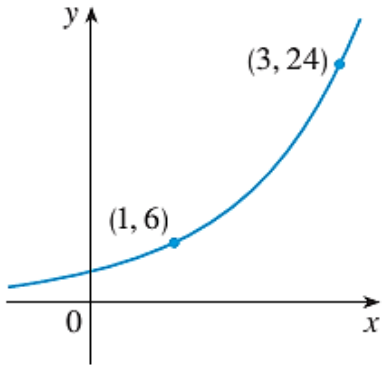
$$f(x)=a^{g(x)}$$

حيث أن a عدد حقيقي موجب لا يساوي الواحد، وأن $g(x)$ تابع عددي.

مجموعة تعريف التابع هي مجموعة تعريف التابع $g(x)$ نفسها.

التابع $y=e^{\frac{1}{x-1}}$ معرف على مجموعة الأعداد الحقيقية باستثناء القيمة $x=1$.

مثال أوجد التابع الأسي $f(x)=Cb^{x}$ الذي بيانه معطى بالشكل الآتي



بما أن بيان التابع يمر بالنقطتين الموضحتين في الرسم، فإن

$$6=f(1)=Cb^{1}$$

$$24=f(3)=Cb^{3}$$

من المعادلة الأولى لدينا $C=\frac{6}{b}$ وبالتعويض في المعادلة الثانية نحصل على $24=\frac{6}{b}b^{3}\Rightarrow 4=b^{2}\Rightarrow b=\pm 2$

بما ان b يجب أن يكون موجب حسب تعريف التابع الأسي، فإن $b=2$ ومنه $C=3$

$$f(x)=3\times 2^{x}$$

ملاحظة: التابع الأسي الطبيعي

$$f(x)=e^{g(x)}$$

مثال

أوجد مجموعة تعريف التابعين

$$1)\ f(x)=\frac{1-e^{x^2}}{1-e^{1-x^2}} \qquad 2)\ f(x)=\frac{1+x}{e^{\cos x}}$$

$$1)\ (-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,\infty) \qquad 2)\ R$$