التحليل الرياضي ١

المحاضرة 3 ميكاترونيكس

نظري

Prepared by
Dr. Sami INJROU

مثال

احسب النهاية الآتية: $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x}$

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$$

$$-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1 \quad \Rightarrow \quad -x^2 \le x^2 \sin\frac{1}{x} \le x^2$$

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0 \qquad , \qquad \lim_{x\to 0}\left(-x^2\right) = 0$$

$$f(x) = -x^2,\ g(x) = x^2 \sin\frac{1}{x},\ \text{and}\ h(x) = x^2 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$$

مثال

احسب نهاية التابع التالي من اليسار ونهايته من اليمين عندما تسعى x إلى الواحد، واستنتج نهايته عندما تسعى x إلى الواحد إن وجدت:

$$f(x)=\begin{cases}3-x & ; \ x<1\\ x^2+1 & ; \ x\geq 1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(3-x)=2$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x^2+1)=2$$

فإن النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار وتساوي 2 عندما تسعى x إلى الواحد، وبالتالي فإن نهاية التابع تساوي 2 عندما تسعى x إلى الواحد.

مثال

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}\frac{\cos x+1}{\cos x+1}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x-1}{x\,(\cos x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 x}{x\,(\cos x+1)}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\frac{\sin x}{(\cos x+1)}\right)=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{(\cos x+1)}=-1.\frac{0}{1+1}=0$$

مثال

أوجد $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=1^2+1+1=3$$

استمرار تابع عددي

تعريف: نقول أن التابع $y = f(x)$ مستمراً في النقطة $x = x_0$ إذا كان معرفاً في هذه النقطة ونهايته موجودة وتساوي $f(x_0)$.

تعريف: نقول أن التابع $y = f(x)$ مستمراً في المجال (a , b) إذا كان مستمراً في كل نقطة من نقاط هذا المجال.

تعريف : ليكن I مجالاً ليس خالياً من $\mathbb{R}$ و $f: I \to \mathbb{R}$ تابع ما.

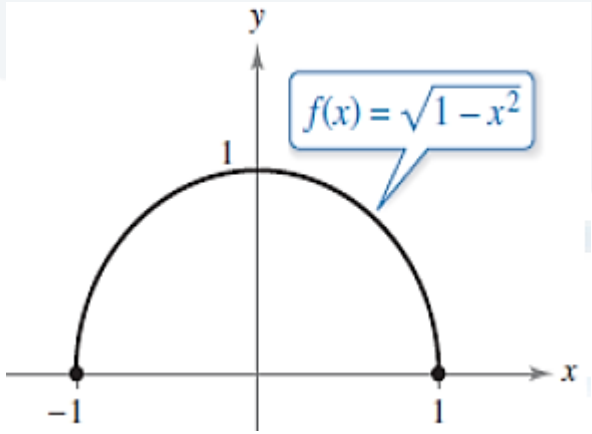
- يقال عن التّابع f إنّه مستمرّ من اليسار في النّقطة $x_0 \in I$، إذا وفقط إذا تحقّق أنّ : $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.
- يقال عن التّابع f إنّه مستمرّ من اليمين في النّقطة $x_0 \in I$، إذا وفقط إذا تحقّق أنّ : $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

تعريف (الاستمرار على مجال مغلق) :

يقال عن التّابع f إنّه مستمرّ على المجال المغلق $[a, b]$، إذا كان مستمرّاً على المجال المفتوح $]a, b[$ وكان $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ و $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$؛ أي أنّ التّابع مستمرّ من اليمين عند a، ومن اليسار عند b.

أمثلة :

- التّابع الثّابت $x \mapsto a;\ \ a \in \mathbb{R}$ مستمرّ على كامل $\mathbb{R}$.
- التّابع المطابق $x \mapsto x$ مستمرّ على $\mathbb{R}$.
- تابع القوى الصّحيحة $x \mapsto x^n$ مستمرّ على كامل $\mathbb{R}$ عندما $n \geq 0$, ومستمرّ على $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ عندما $n < 0$.
- تابع الجذر النّوني $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$ مستمرّ على $\mathbb{R}^+$ عندما n زوجيّ، وعلى $\mathbb{R}$ عندما n فرديّ.
- التّوابع المثلّثيّة $\sin,\ \cos$ مستمرّة على كامل $\mathbb{R}$, و $\tan$ مستمرّ على $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.
- التّوابع الزّائديّة مستمرّة على $\mathbb{R}$.
- تابع القيمة المطلقة $x \longmapsto |x|$ مستمرّ على كامل $\mathbb{R}$.
- التّابع الأسّي $\exp$ مستمرّ على كامل $\mathbb{R}$.
- التّابع اللوغاريتمي $\ln$ مستمرّ على $]0, +\infty[$.



مثال

ناقش استمرار التّابع $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

مجموعة تعريف التّابع f هي المجال المغلق $[-1,1]$

التّابع مستمرّ على جميع نقاط المجال المفتوح $]-1,1[$, وبما أنّ

$$\lim_{x\to -1^+} \sqrt{1-x^2} = 0 = f(-1)$$ (استمرار من اليمين)

$$\lim_{x\to +1^-} \sqrt{1-x^2} = 0 = f(+1)$$ (استمرار من اليسار)

التابع المعطى مستمر على المجال المغلق

مثال

: ناقش استمراريّة كلّ من التّوابع الآتية :

1. $f(x) = \frac{1}{x}$

2. $g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

3. $h(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 0 \\ x^2+1 & x > 0 \end{cases}$

4. $y(x) = \sin x$

1. مجموعة تعريف التّابع f هي جميع الأعداد الحقيقيّة ما عدا الصّفر؛ وبذلك يكون التّابع مستمرّاً على مجموعة تعريفه. عندما $x = 0$، ويكون للتابع نقطة انقطاع غير قابلة للإزالة، (النّهاية غير موجودة).

2. مجموعة تعريف التّابع g هي جميع الأعداد الحقيقيّة ما عدا الواحد.

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

للتابع نقطة انقطاع قابلة للإزالة، $x = 1$.

3. مجال تعريف التّابع h هو مجموعة الأعداد الحقيقيّة $\mathbb{R}$، التّابع h مستمرّ على $]-\infty, 0[$ وعلى المجال $[0, +\infty[$، وبما أنّ $\lim_{x\to 0} h(x) = 1 = h(0)$ فإنّ التّابع مستمرّ على $\mathbb{R}$

4. $y(x) = \sin x$ تابع مثلّثي معرّف ومستمرّ على $\mathbb{R}$.

خواص الاستمرار

مبرهنة :

ليكن $f, g: I \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعين مستمرّين في النّقطة $x_0 \in I$، عندئذ

- $\lambda \cdot f$ مستمرّ عند x_0 $(\forall \lambda \in \mathbb{R})$.
- $f + g$ مستمرّ عند x_0.
- $f \times g$ مستمرّ عند x_0.
- إذا كان $f(x_0) \neq 0$، عندئذ $\frac{1}{f}$ مستمرّ عند x_0.

مبرهنة 3 :

ليكن $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ و $g: J \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعين، وليكن $f(I) \subset J$، إذا كان f مستمرّاً عند النّقطة $x_0 \in I$، و g مستمرّ عند $f(x_0)$،

عندئذ $g \circ f$ يكون مستمرّاً عند x_0 و

$$\lim_{x \to x_0} g \circ f(x) = g(f(x_0))$$

تعريف 1 (مشتقّ تابع في نقطة) :

ليكن I مجالاً مفتوحاً من $\mathbb{R}$ و $f: I \to \mathbb{R}$ تابع و $x_0 \in I$، يكون f قابلاً للاشتقاق عند x_0 إذا كان التّابع g، الّذي يدعى معدل التّغير، المعرّف بالشّكل :

$$g: I\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

يملك نهاية منتهية l عندما x تسعى إلى x_0. يرمز في هذه الحالة للنهّاية l بالشّكل الآتي :

$$l = \lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

يمثّل العدد $f'(x_0)$ قيمة مشتقّ التّابع f عند النّقطة x_0.

تعريف 3 :

يكون f قابلاً للاشتقاق على المجال I إذا كان قابلاً للاشتقاق عند كلّ نقطة $x_0 \in I$, ويدعى التّابع $x \longmapsto f'(x)$ مشتقّ التّابع f، ويرمز له f' أو $\frac{df}{dx}$.

قواعد الاشتقاق

$$(c)' = 0 \qquad (cf)' = cf' \qquad (f \pm g)' = f' \pm g'$$

$$(x^n)' = nx^{n-1} \qquad (e^x)' = e^x \qquad (f.g)' = f'.g + f.g'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{(g)^2}$$

مثال

أوجد مشتق كل تابع من التوابع الآتية:

$$1)\ f(x)=x^2\sin x \qquad 2)\ g(t)=\sqrt{t}\,(2+3t) \qquad 3)\ k(x)=\frac{3x^3+\sqrt{x}}{x}$$

الحل

$$1)\ f(x)=x^2\sin x$$

$$f'(x)=\left(x^2\right)'\sin x+x^2(\sin x)'=2x\sin x+x^2\cos x$$

$$2)\ g(t)=\sqrt{t}\,(2+3t)$$

$$g'(t)=\left(\sqrt{t}\,(2+3t)\right)'=\left(2t^{1/2}+3t^{3/2}\right)'=2\left(t^{1/2}\right)'+3\left(t^{3/2}\right)'$$

$$=2\left(\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1}\right)+3\left(\frac{3}{2}t^{\frac{3}{2}-1}\right)=\frac{1}{\sqrt{t}}+\frac{9}{2}\sqrt{t}$$

3) $k(x) = \dfrac{3x^3 + \sqrt{x}}{x}$

$$k'(x) = \left(\frac{3x^3 + \sqrt{x}}{x}\right)' = \left(3x^2 + x^{-1/2}\right)' = 6x + \left(\frac{-1}{2}x^{\frac{-1}{2}-1}\right) = 6x - \frac{1}{2}x^{-3/2}$$

المماس لمنحني في نقطة معلومة

تعطى معادلة المماس لمنحني ما $y = f(x)$ في النقطة $(a, f(a))$ بالعلاقة الآتية:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

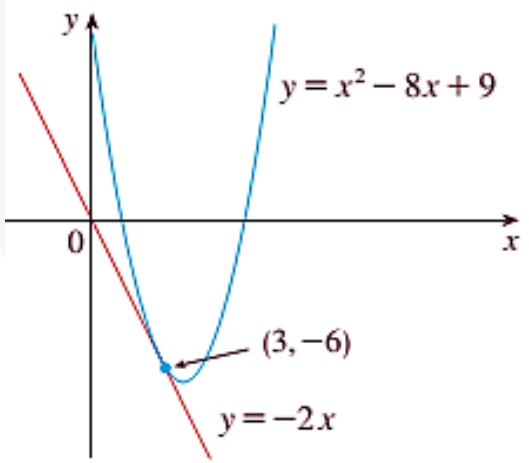
مثال

أوجد معادلة المماس للقطع المكافئ $y = x^2 - 8x + 9$ في النقطة $(3, -6)$

الحل

$$f'(x) = 2x - 8 \quad \Longrightarrow \quad f'(3) = 2(3) - 8 = -2$$

$$\Rightarrow \quad y - (-6) = (-2)(x - 3) \quad \Rightarrow \quad y = -2x$$



مثال

أوجد معادلة المماس للمنحني $y=\dfrac{e^x}{1+x^2}$ في النقطة $\left(1,\dfrac{1}{2}e\right)$

الحل

$$y'=\left(\frac{e^x}{1+x^2}\right)'=\frac{(e^x)'(1+x^2)-e^x(1+x^2)'}{(1+x^2)^2}=\frac{e^x(1+x^2)-e^x(2x)}{(1+x^2)^2}=\frac{e^x(x^2-2x+1)}{(1+x^2)^2}=\frac{e^x(x-1)^2}{(1+x^2)^2}$$

$y'(1)=0$ $\Longrightarrow$ $y=\dfrac{1}{2}e$ معادلة المماس

مشتقّات التّوابع الشّهيرة :

يمثّل الجدول الأوّل مشتقّات التّوابع حيث x متغير, بينما يمثّل الجدول الثّاني مشتقّات التّوابع المركّبة حيث $x \mapsto u(x)$

الجدول الأوّل	
التّابع	مشتقّه
x^n	nx^{n-1} ;$n \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}; \alpha \in \mathbb{R}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

الجدول الثّاني	
التّابع	مشتقّه
u^n	$nu'u^{n-1}$;$n \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
u^α	$\alpha u'u^{\alpha-1}; \alpha \in \mathbb{R}$
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\sin u$	$u'\cos u$
$\cos u$	$-u'\sin u$
$\tan u$	$u'(1+\tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$

مشتقات التوابع المثلثية والقطعية

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x \qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x \qquad (\sec x)' = \sec x \tan x \qquad (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

مشتقات التوابع المثلثية والقطعية

$$(\sinh x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$$

$$(\cosh x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$$

$$(\tanh x)' = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$$

$$(\coth x)' = \left(\frac{\cosh x}{\sinh x}\right)' = \frac{-1}{\sinh^2 x}$$

مشتقات التوابع المثلثية العكسية والقطعية العكسية

$$y = \sin^{-1} x \longrightarrow x = \sin y \xrightarrow{\text{باشتقاق الطرفين}} 1 = y' \cos y \longrightarrow y' = \frac{1}{\cos y}$$

$$\cos^2 y + \sin^2 y = 1$$

$$\longrightarrow \boxed{y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

$$\boxed{\left(\cos^{-1} x\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

مشتقات التوابع المثلثية العكسية والقطعية العكسية

$$y=\tan^{-1}x \Rightarrow x=\tan y \xrightarrow{\text{باشتقاق الطرفين}} 1=y'\left(1+\tan^2 y\right) \Rightarrow y'=\frac{1}{1+\tan^2 y}$$

$$\Rightarrow \boxed{y'=\frac{1}{1+x^2}}$$

$$\boxed{\left(\cot^{-1}x\right)'=\frac{-1}{1+x^2}}$$

$$\boxed{\left(\sinh^{-1}x\right)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} \qquad \boxed{\left(\cosh^{-1}x\right)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}} \qquad \boxed{\left(\tanh^{-1}x\right)'=\frac{1}{1-x^2}}$$

مشتق التابع الأسي

$$y=a^x \Rightarrow y=e^{x\ln a} \Rightarrow y'=(\ln a)e^{x\ln a}=(\ln a)a^x$$

مشتق التابع اللوغاريتمي

$$y=\log_a x \Rightarrow y=\frac{\ln x}{\ln a} \Rightarrow y'=\frac{1}{x\ln a}$$