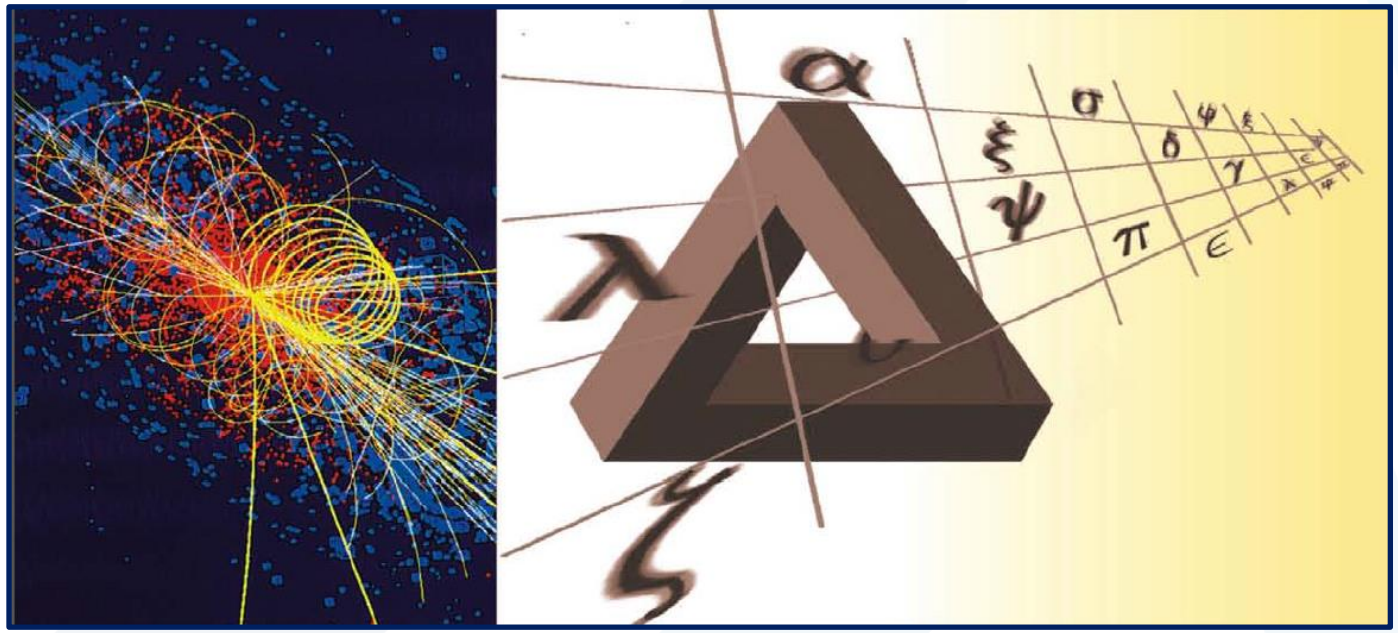
جامعة المنارة

كلية الهندسة

قسم الروبوتيك و الأنظمة الذكية

مقرر التحليل العددي

Numerical Solutions of Nonlinear Equations with Matlab



د. محمد خيرعبدالله محمد

العام الدراسي 2023-2024

Contents

Linear Equations

الكثير من النظم الحقيقية يتم تمثيلها بعدد من المعادلات الخطية فى عدد من المجاهيل وعندما يكون عدد هذه المعادلات صغيرا، أقل من ثلاثة أو أربعة، فإنه يمكن حل هذه المعادلات يدويا أو بطرق تحليلية أو يدوية وإيجاد قيم لهذه المجاهيل بشرط أن يكون عدد المجاهيل مساويا لعدد المعادلات. أما عندما يصل عدد هذه المجاهيل وبالتالي عدد المعادلات إلى المئات أو الآلاف فإنه في هذه الحالة يستحيل الحل التحليلي ولابد من استخدام الحاسب وبالتالي الطرق الرقمية لحل هذا النظام من المعادلات كما ذكرنا أن كل المعادلات فى النظام لابد أن تكون خطية، وأن عدد المجاهيل يساوى عدد المعادلات. توجد نظم المعادلات الخطية فى الكثير من التطبيقات الهندسية مثل الأبنية والتركيبات، و الجوائز المرنة، والتدفق الحراري، والمجالات الكهرومغناطيسية والدارات الكهربائية وغيرها الكثير.

يمكن كتابة مثل هذا النظام من المعادلات الخطية كما يلي:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots\ \dots\dots+\ a_{1n}x_n=b_1 \\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots\ \dots\dots+\ a_{2n}x_n=b_2 \\
\dots\ \ \dots\ \ \dots\dots\ \ \dots\dots\ \ \dots\dots \\
a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots\ \dots\dots+\ a_{nn}x_n=b_n
\end{array}
$$

وهذا النظام يمكن كتابته فى صورة مصفوفات كما يلى:

$$Ax=b$$

حيث:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots\dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots\dots & a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots\dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

والمطلوب هو حساب قيمة المتجه x الذى يحقق كل المعادلات السابقة حيث x فى كل التطبيقات تمثل استجابة أو خرج النظام و b هى الدخل للنظام و A تمثل معاملات أو خواص النظام.

طريقة معكوس مصفوفة

$$A^{-1}AX = A^{-1}b$$
$$X = A^{-1}b$$

Example

$$\begin{array}{rrrcr} 3x & +2y & -z & = & 10 \\ -x & +3y & +2z & = & 5 \\ x & -y & -z & = & -1 \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

```
A=[3 2 -1; -1 3 2; 1 -1 -1];
b=[10 5 -1]';
x=inv(A)*b
```

```
x =
  -2.0000
   5.0000
  -6.0000
```

طريقة Cramer

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = A$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = B$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = C$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_1 = \begin{vmatrix} A & a_{12} & a_{13} \\ B & a_{22} & a_{23} \\ C & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & A & a_{13} \\ a_{21} & B & a_{23} \\ a_{31} & C & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & A \\ a_{21} & a_{22} & B \\ a_{31} & a_{32} & C \end{vmatrix}$$

$$x = \frac{D_1}{\Delta} \qquad y = \frac{D_2}{\Delta} \qquad z = \frac{D_3}{\Delta}$$

Example

$$
\begin{aligned}
3*x + 2*y + 5*z &= 22 \\
4*x + 5*y - 2*z &= 8 \\
x + y + z &= 6
\end{aligned}
$$

```
A=[3 2 5;4 5 -2; 1 1 1];
delta=det(A);
d1=[22 2 5;8 5 -2; 6 1 1];
D1=det(d1);
d2=[3 22 5;4 8 -2; 1 6 1];
D2=det(d2);
d3=[3 2 22;4 5 8; 1 1 6];
D3=det(d3);
x=D1/delta;
y=D2/delta;
z=D3/delta;
disp('x=');disp(x);
disp('y=');disp(y);
disp('z=');disp(z);
```

```
clc
clear
a=input('Overall Matrix=');
b=a(:,end);
a(:,end)=[];
delta=det(a);
for i=1:size(a,1)
    N=a;
    N(:,i)=b;
    D=det(N);
    x=D/delta;
    disp(['variable',num2str(i),'=']);
    disp(x)
end
```

Nonlinear Equations

$$T = e^{-kt} + 100$$

$$x(t) = 8e^{-2t} + 16t - 8$$

$$x(t) = Ae^{-t}\cos\left(4\sqrt{3}t + \varphi_0\right) + 0.2 + 0.7\sin 7t$$

إن حل المعادلات اللاخطية أداة أساسية عند نمذجة و محاكاة الأنظمة الفيزيائية

هناك عدد من الطرق العددية لإيجاد قيمة تقريبية لجذر معين للمعادلة السابقة، أي إلى قيمة x^* بحيث تكون $f(x^*)$ قريبة من الصفر. إن جميع الطرق العددية هذه تحتاج إلى قيمة تقريبية أولية لجذر المعادلة المعين لتمكينها من توليد متتابعة من قيم تقريبية أفضل لذلك الجذر

الحل بطريقة بيانية

إذا رسمنا مخطط الدالة $y=f(x)$ فإن نقاط تقاطع منحني الدالة مع محور x تمثل جذور المعادلة، فإذا قطع مخطط الدالة المحور في النقاط $x_1, x_2, \dots, x_n$ فإن كلاً من هذه القيم تمثل جذراً للمعادلة

في بعض الأحيان يكون من الملائم كتابة المعادلة بالصيغة:

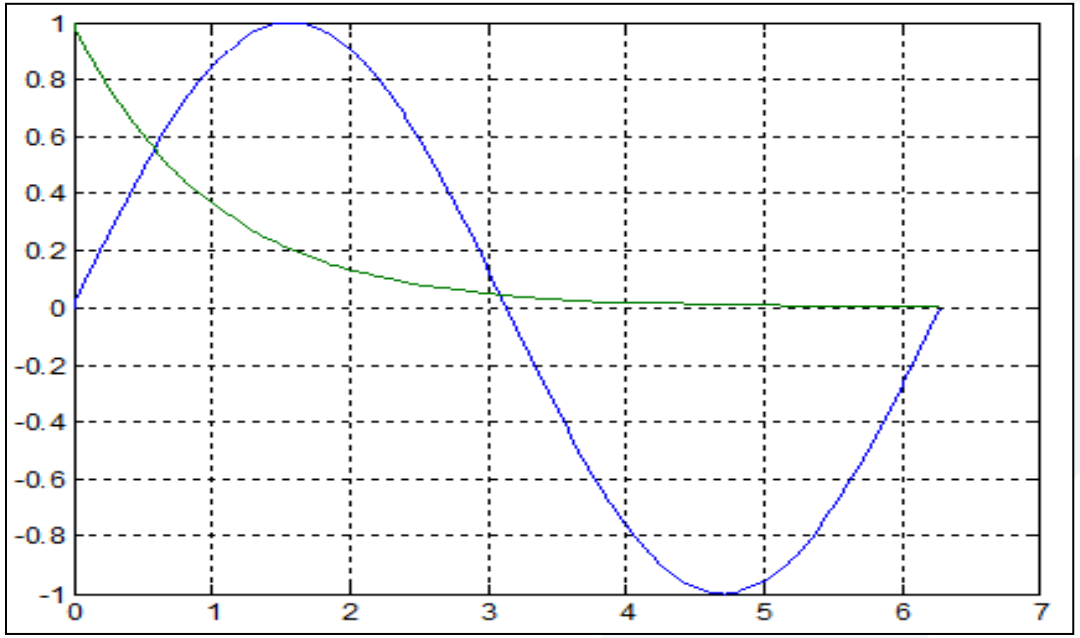
$$f_1(x) = f_2(x)$$

حيث f_1، f_2 دالتان يسهل رسمهما فإذا تقاطع المنحنيان في النقطة (x^*, y^*) فإن x^* تعتبر جذرا للمعادلة.

Example

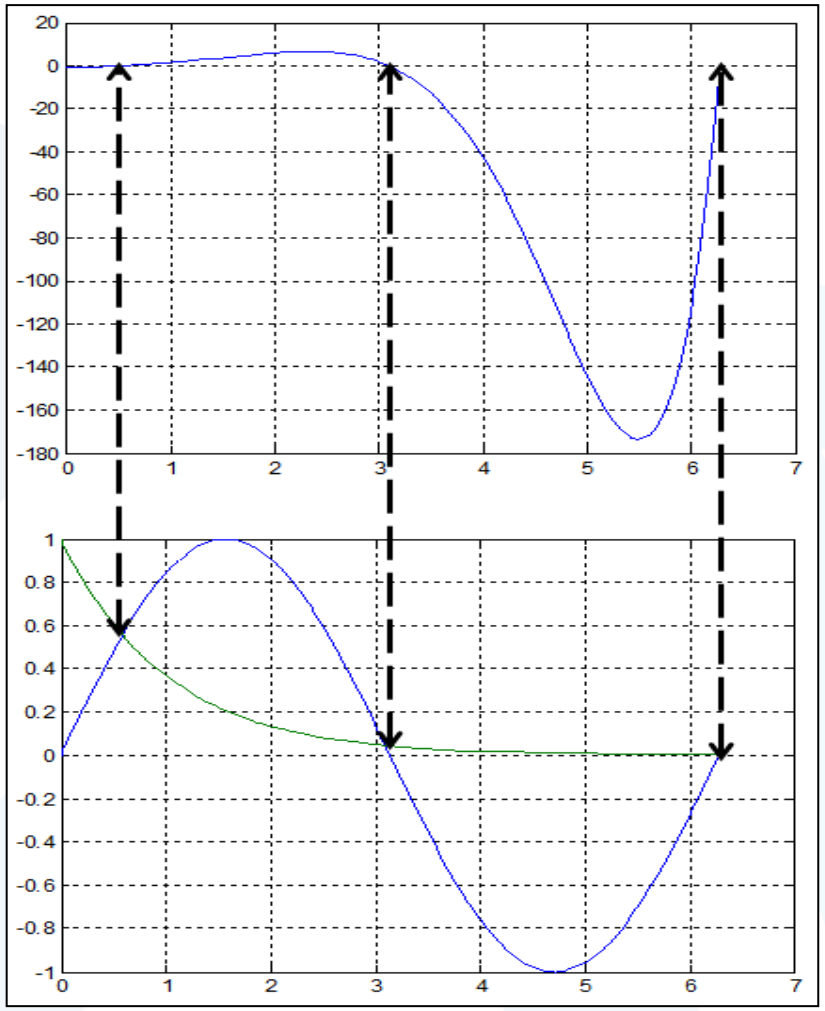
عين مواقع جذور المعادلة $e^{x}\sin(x) - 1 = 0$

يمكن كتابة المعادلة السابقة بالصيغة المكافئة: $\sin(x) = e^{-x}$




```
x=0:pi/100:2*pi;
y=sin(x);
z=exp(-x);
plot(x, y, x, z)
grid
```

```
x=0:pi/100:2*pi;
y=sin(x);
z=exp(-x);
w=exp(x).*sin(x)-1;
subplot(211);
plot(x,w);
title('exp(x).*sin(x)-1');
xlabel('x-axis');
ylabel('w-axis');
grid
subplot(212);
plot(x,y,x,z);
title('y=sin(x)&z=exp(-x)');
xlabel('x-axis');
ylabel(' y&z-axis');
grid
```



تعيين مو اقع الجذوربطريقة مبرمجة

تعتمد هذه الطريقة على ملاحظة تغير الإشارات لقيم لدالة في نقاط متعددة $x_1, x_2, \ldots, x_n$ فإذا كانت قيمة $f(x_i).f(x_{i+1})$ سالبة لبعض قيم i فإن هناك جذراً بين x_i و x_{i+1}.

مثال: عين مواقع جذور المعادلة: $f(x) = x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 26x - 10 = 0$ في الفترة [-8, 8].

إذا أخذنا فترة تقسيم h مساوية إلى 4 فإن إشارة الدالة في نقاط التقسيم تكون كما يأتي:

x	-8	-4	0	4	8
f(x)	+	+	-	-	+

نلاحظ وجود جذرين فقط الأول في الفترة (-4, 0) والثاني في الفترة (4, 8).

أما عند اختيار فترة تقسيم أصغر 2 بدلاً من 4 فإن إشارات الدالة تكون كما يأتي:

x	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
f(x)	+	+	+	+	-	+	-	+	+

أي إن هناك جذوراً في الفترات (-2, 0)، (0, 2) ، (2, 4) و(4, 6).

```
clc
clear
syms x
f=x^4-7*x^3+3*x^2+26*x-10
for x=-8:4:8
    disp(x)
    a=subs(f)
end
```

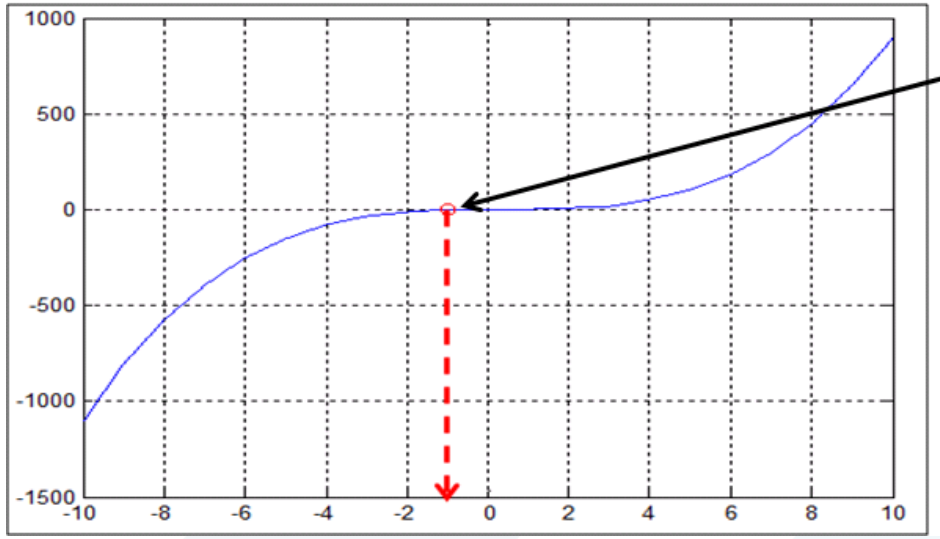
```
-8
a =
    7654
  -4
a =
  638
   0
a =
  -10
   4
a =
  -50
   8
a =
  902
```

```
clc
clear
syms x
f=x^4-7*x^3+3*x^2+26*x-10
for x=-8:2:8
    disp(x)
    a=subs(f)
end
```

```
-8
a =
    7654
  -6
a =
    2750
  -4
a =
  638
  -2
a =
   22
    0
a =
  -10
    2
a =
   14
    4
a =
  -50
    6
a =
   38
    8
a =
  902
```

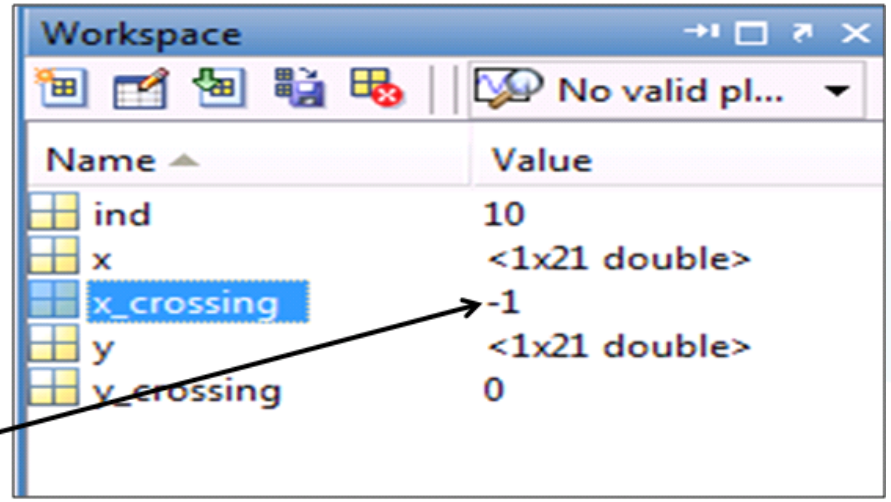
Example

```
x=-10:1:10;
y=x.^3-x.^2+2;
ind=find(y==0) ;
x_crossing=x(ind) ;
y_crossing=y(ind) ;
plot(x, y,x_crossing,y_crossing,'ro ') ;
grid
```



عين مواقع جذور المعادلة

y=x^3-x^2+2



باستخدام تعليمة حل المعادلة في الماتلاب

```
[x]=solve('x^3-x^2+2')
```

باستخدام تعليمة رسم التوابع في الماتلاب

```
ezplot ('x^3-x^2+2',[-10 10])
grid
```

Example

$$x - 2y + z^2 = 6$$
$$3x + y^3 - z = 8$$
$$x + y + z = 6$$

```
syms X Y Z
[X Y Z]=solve('X-2*Y+Z^2-6','3*X+Y^3-Z-8','X+Y+Z-6');
double([X Y Z])
```

```
ans =
   1.0000                2.0000                3.0000
   3.2263                0.7207                2.0531
   7.7556 - 3.4284i     -2.6088 + 0.6533i      0.8531 + 2.7751i
   7.7556 + 3.4284i     -2.6088 - 0.6533i      0.8531 - 2.7751i
   6.6313 - 0.7573i      1.2484 + 2.0487i     -1.8797 - 1.2914i
   6.6313 + 0.7573i      1.2484 - 2.0487i     -1.8797 + 1.2914i
```

Bisection Method

لنفرض بأنه يوجد جذر للمعادلة في الفترة $[x_1, x_2]$ أي إن

$$f(x_1).f(x_2) < 0$$

في هذه الطريقة نحسب قيمة الدالة في نقطة تقع في منتصف المسافة بين x_1 و x_2 فإذا كانت إشارتها تختلف عن إشارة $f(x_1)$ فإن الجذر يقع بين x_1 والمنتصف. أما إذا تشابهت الإشارتان فإنها بالتأكيد ستكون مختلفة عن إشارة $f(x_2)$ وعليه يكون الجذر واقعاً بين المنتصف و x_2 ويمكن تكرار هذه العملية عدة مرات للحصول على فترة ضيقة حول الجذر المطلوب.

خوارزمية طريقة التنصيف

لتكن f هي دالة مستمرة في الفترة $[a_0, b_0]$ بحيث أن: $f(a_0).f(b_0)< 0$

لقيم $i=0, 1,2, \ldots$ أوجد: $r = \frac{a_i + b_i}{2}$

إذا كان $f(a_i).f(r)=0$ فإن r هو الجذر المطلوب.

إذا كان $f(a_i).f(r)<0$ ضع: $a_{i+1}= a_i \ , \ b_{i+1}=r$

إذا كان $f(a_i).f(r)>0$ ضع: $a_{i+1}=r, \ b_{i+1}=b_i$

بتكرار الطريقة أعلاه نحصل على متتابعة من الفترات $[a_i, b_i]$ التي تحتوي على جذر المعادلة وتكون أطوالها أصغر كلما زادت قيمة i وعلى هذا الأساس إذا كان المطلوب إيجاد قيمة مقربة للجذر لا يتجاوز الخطأ فيها عن ε، نتوقف عندما تتحقق المتراجحة:

$$|b_i - a_i| \leq \varepsilon$$

مثال: جد جذر المعادلة $f(x)=x\log x-1=0$ بطريقة التنصيف وبخطأ $\varepsilon=0.001$ في الفترة $(1, 3)$

يلاحظ من الدالة أعلاه بأن $f(1).f(3)<0$. وهذا يعني بأن هناك جذراً في الفترة $(1, 3)$.

$f(1)=-1$

$f(3)=0.4314$

$\varepsilon=b_0-a_0=3-1=2$

$$r=\frac{a_0+b_0}{2}=\frac{1+3}{2}=2$$

$f(2)=-0.3979$

$a_1=r;\quad b_1=b_0;$

$\varepsilon=b_1-a_1=3-2=1$

$$r=\frac{a_1+b_1}{2}=\frac{2+3}{2}=2.5$$

$f(2.5)=-0.0051$

$a_2=r;\quad b_2=b_1;$

$\varepsilon=b_2-a_2=3-2.5=0.5$

$$r=\frac{a_2+b_2}{2}=\frac{2.5+3}{2}=2.75$$

$f(2.75)=2.2081$

$a_3=a_2;\quad b_3=r;$

$\varepsilon=b_3-a_3=2.75-2.5=0.25$

$$r=\frac{a_3+b_3}{2}=\frac{2.5+2.75}{2}=2.625$$

$f(2.625)=0.1002$

$a_4=a_3;\quad b_4=r;$

$\varepsilon=b_4-a_4=2.625-2.5=0.125$

وهكذا نستمر إلى أن نحصل على الجذر المطلوب أو نصل إلى قيمة خطأ $\varepsilon\leq0.001$.

برمجة طريقة التنصيف باستخدام لغة Matlab
(حلقة for)

```
f=inline('x*log10(x)-1')
x1=input('x1=');
x2=input('x2=');
n=input('n=');
y1=f(x1);
y2=f(x2);
for i=1:n
    if abs(x2-x1)>0.001
        x=(x1+x2)/2;
        y=f(x);
        disp(x)
        if (y1*y) == 0
           disp('the exact root is')
           disp(x)
          break
        end
        if y1*y<0
            x2=x;
         else
             x1=x;
        end
     else
        break
    end
end
```

x1=1	x1=1	x1=1	x1=1	x1=1
x2=3	x2=3	x2=3	x2=3	x2=3
n=4	n=6	n=10	n=15	n=1000
2	2	2	2	2
2.5000	2.5000	2.5000	2.5000	2.5000
2.7500	2.7500	2.7500	2.7500	2.7500
2.6250	2.6250	2.6250	2.6250	2.6250
	2.5625	2.5625	2.5625	2.5625
	2.5313	2.5313	2.5313	2.5313
		2.5156	2.5156	2.5156
		2.5078	2.5078	2.5078
		2.5039	2.5039	2.5039
		2.5059	2.5059	2.5059
			2.5068	2.5068

(حلقة for)

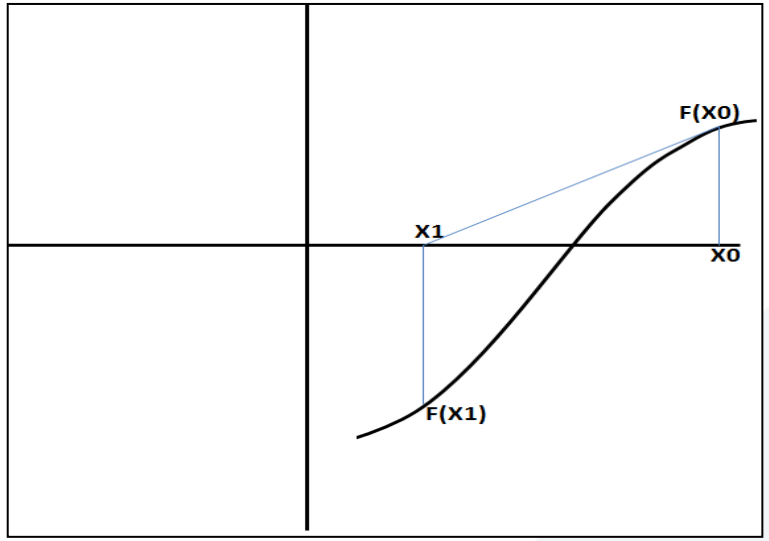
```
f=inline('x*log١٠(x)-1')
x1=input('x1=');
x2=input('x2=');
n=input('n=');
y1=f(x1);
y2=f(x2);
for i=1:n
    if abs(x2-x1)>0.001
        x=(x1+x2)/2;
        y=f(x);
        disp(x)
        if (y1*y) == 0
            disp('the exact root is')
            disp(x)
            break
        end
        if y1*y<0
            x2=x;
        else
            x1=x;
        end
    else
        break
    end
end
```

(حلقة while)

```
f=inline('x*log١٠(x)-1')
x1=input('x1=');
x2=input('x2=');
y1=f(x1);
y2=f(x2);
while abs(x2-x1)>0.001
        x=(x1+x2)/2;
        y=f(x);
        disp(x)
        if (y1*y) == 0
            disp('the exact root is ')
            disp(x)
            break
        end
        if y1*y<0
            x2=x;
        else
            x1=x;
        end
end
```

Newton Raphson Method

اذا اخذنا X0 نقطة ليست بعيدة جدا عن جذر المعادلة ثم قمنا بايجاد صورة النقطة F(X0) الان نلاحظ ان F'(X) هو المماس للدالة F ويقطع محور X عند النقطة X1 . X1 هو القيمة التقريبية لجذر الدالة F . نستطيع ايجاد قيمة X1 من المثلث X0,X1,F(X0) بالشكل التالي



$$F'(X0)=F(X0)/X0-X_1$$

$$X1=X0-(F(X0)/F'(X0))$$

من ذلك نستطيع حساب قيمة X2

$$X2=X1-(F(X1)/F'(X1))$$

و

$$X3=X2-(F(X2)/F'(X2))$$

وبشكل عام $X_{N+1}=X_N-(F(X_N)/F'(X_N))$ N=1,2,.....

مثال: جد جذر المعادلة $f(x)=x.\ \ln(x)-1=0$

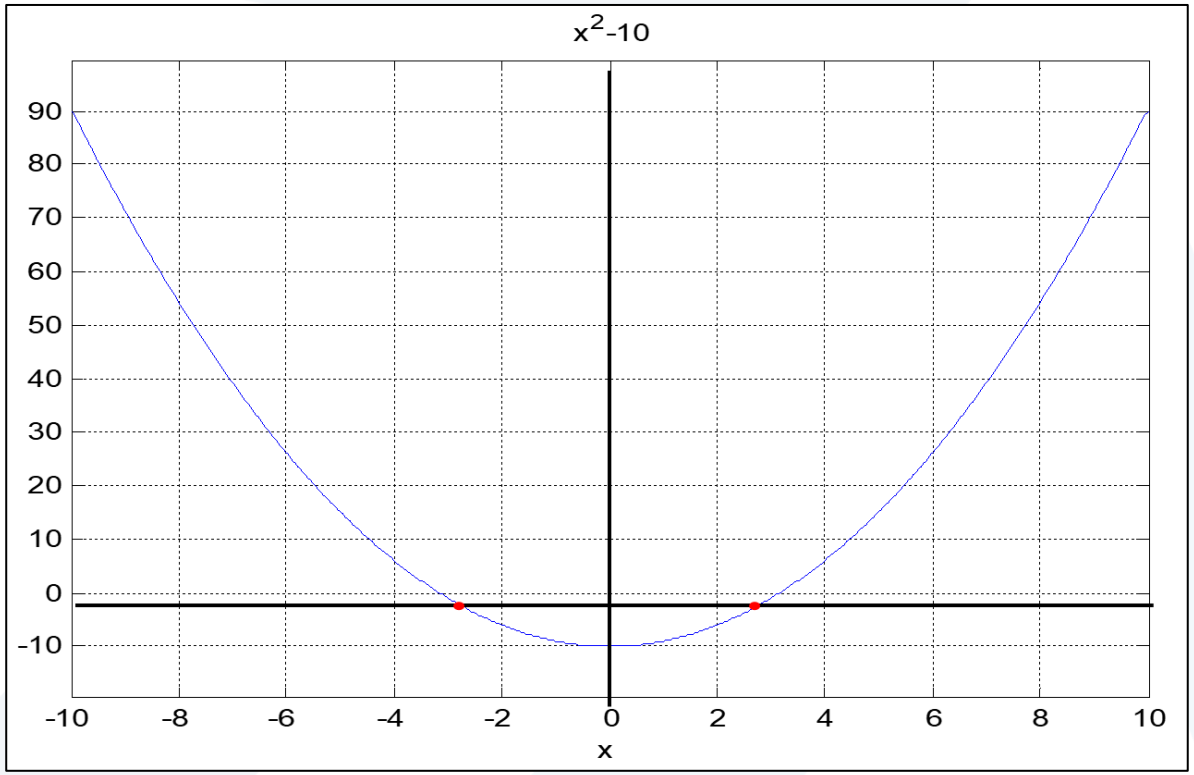
في الفترة [1, 2] وبمقدار خطأ $\varepsilon=0.001$.

```
syms x
f= x*log(x)-1;
u=diff (f);
a=input('a=');
n=input('n=');
for i=1:n
   w=a-(subs(f,a)/subs(u,a));
   v=double(w);
   disp(v)
   if abs(w-a)<= 0.001
      break
   else
      a=w;
   end
end
```

```
a=1.5
n=100

1.7788

1.7633

1.7632
```

إن الحل العددي لمعادلة ما بطريقة نيوتن رافسون قد يواجه إمكانية حصول عدم التعيين عند نقطة البدء

```
ezplot (' x^2-10',[-10 10])
grid
```



```
f=inline(' x^2-10')
x1=input('x1=');
x2=input('x2=');
n=input('n=');
y1=f(x1);
y2=f(x2);
for i=1:n
    if abs(x2-x1)>0.001
        x=(x1+x2)/2;
        y=f(x);
        disp(x)
        if (abs(y1*y) == 0)
            disp('the exact root is ')
            disp(x)
            break
        end
        if y1*y<0
            x2=x;
        else
            x1=x;
        end
    else
        break
    end
end
```

(' x^2-10')

المجال [-1 4]

```
syms x
f=x^2-10;
u=diff (f);
a=input('a=');
n=input('n=');
for i=1:n
    w=a-subs(f,a)/subs(u,a);
    v=double(w);
    disp(v)
    if abs(w-a)<= 0.001
        break
    else
        a=w;
    end
end
```

```
syms x
f=x^2-10;
u=diff (f);
a=input('a=');
n=input('n=');
if subs(u,a)==0;
    a=a+0.1;
end
for i=1:n
    w=a-subs(f,a)/subs(u,a);
    v=double(w);
    disp(v)
    if abs(w-a)<= 0.001
        break
    else
        a=w;
    end
end
```

انتهت المحاضرة