التحليل الرياضي ١

المحاضرة 4 ميكاترونيكس

نظري

Prepared by
Dr. Sami INJROU

قاعدة السلسلة

$$F = f \circ g \quad : \quad F(x) = f\left(g(x)\right)$$

$$F'(x) = f'\left(g(x)\right).g'(x)$$

تمرين

أوجد مشتق كل تابع من التوابع الآتية

1) $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}$ 2) $H(x) = 3^{\sqrt{x}}$ 3) $J(x) = \log_{10}(2 + \sin x)$

الحل

1) $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}} = \left(x^2 + x + 1\right)^{-1/3}$$

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = x^2 + x + 1 \\ f(x) = (x)^{-1/3} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} g'(x) = 2x + 1 \\ f'(x) = \dfrac{-1}{3} x^{-4/3} \end{array}\right\} \Rightarrow F'(x) = f'\left(g(x)\right).g'(x)$$

$$= \frac{-1}{3}\left(x^2 + x + 1\right)^{-4/3}(2x + 1)$$

2) $H(x) = 3^{\sqrt{x}}$

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = \sqrt{x} \\ f(x) = 3^x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ f'(x) = 3^x \ln 3 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad H'(x) = f'(g(x)).g'(x) = \left(3^{\sqrt{x}} \ln 3\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{\ln 3}{2}\frac{3^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

3) $J(x) = \log_{10}(2 + \sin x)$

$$\left.\begin{array}{l} g(x) = 2 + \sin x \\ f(x) = \log_{10} x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} g'(x) = \cos x \\ f'(x) = \dfrac{1}{x \ln 10} \end{array}\right\} \Rightarrow J'(x) = f'(g(x)).g'(x) = \frac{1}{(2 + \sin x)\ln 10}\cos x$$

اشتقاق التوابع الضمنية

1- نشتق الطرفين بالنسبة لـ x مع اعتبار أن y تابع لـ x .

2- نحل المعادلة الناتجة بالنسبة لـ y'.

مثال

اوجد مشتق التابع الآتي $2x^3 - 3y^2 = 8.$

الحل

$$\frac{d}{dx}(2x^3 - 3y^2) = \frac{d}{dx}(8) \longrightarrow 6x^2 - 6yy' = 0 \longrightarrow y' = \frac{x^2}{y}, \quad \text{when } y \neq 0$$

تمرين

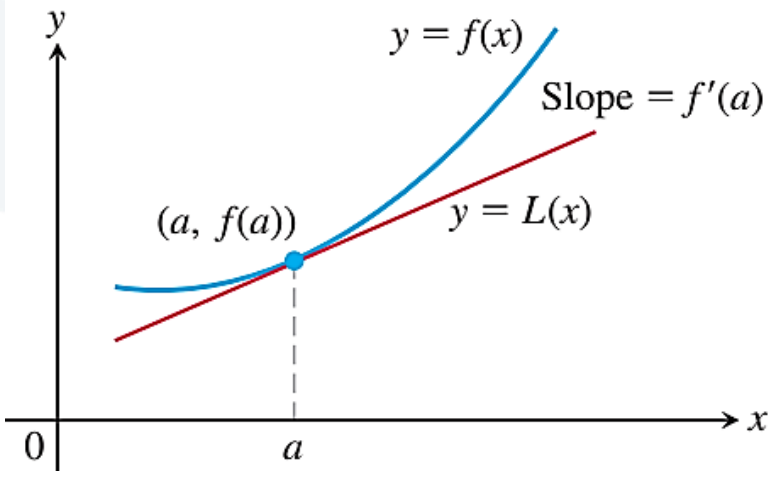
إذا كان $y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$، أوجد $\frac{dy}{dx}$:

الحل

$$\frac{d}{dx}(y^3 + y^2 - 5y - x^2) = \frac{d}{dx}(-4) \longrightarrow \frac{d}{dx}y^3 + \frac{d}{dx}y^2 - \frac{d}{dx}5y - \frac{d}{dx}x^2 = \frac{d}{dx}(-4)$$

$$3y^2\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}-5\frac{dy}{dx}-2x=0 \longrightarrow \frac{dy}{dx}(3y^2+2y-5)=2x$$

$$\longrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2x}{3y^2+2y-5}$$



التخطيط (التقريب الخطي) Linearization

تعريف بفرض أن f تابع قابل للاشتقاق عند النقطة $x = a$ ، عندئذ يسمى التابع:

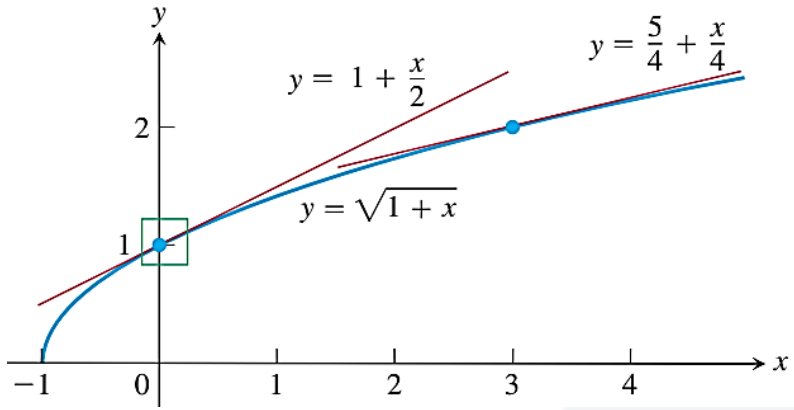
$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \qquad f(x) \approx L(x)$$

بالتقريب الخطي القياسي للتابع f عند النقطة $x = a$.

مثال أوجد التقريب الخطي القياسي للتابع $f(x) = \sqrt{1 + x}$ عند النقطة $x = 0$

الحل

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1 + x)^{-1/2}, \quad \Rightarrow \quad f'(0) = 1/2, \quad f(0) = 1$$

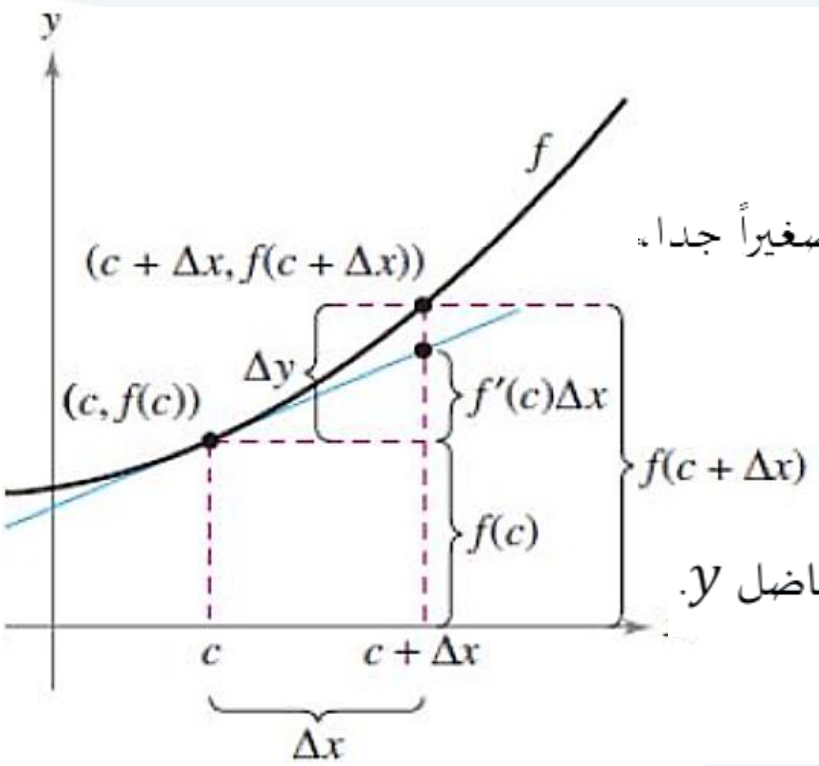


$$\Rightarrow \quad L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) = 1 + \frac{1}{2}(x - 0) = 1 + \frac{x}{2}.$$

التفاضل

عندما نستخدم المماس لـ f عند النّقطة $(c, f(c))$، فإنّ معادلته تكون :

$$y = f(c) + f'(c)(x - c)$$



لتقريب التّابع f ، فإنّ المقدار $(x - c)$، يدعى تغير x، ويرمز له Δx. وعندما يكون Δx صغيراً جدا،

يقرب التّغير في y، والّذي يرمز له بـ Δy كما يلي :

$$\Delta y = f(c + \Delta x) - f(c) \approx f'(c)\Delta x$$

يرمز عادة لـ Δx بالرّمز dx، ويدعى تفاضل x، ويرمز للحدّ $f'(c)\Delta x$ بـ dy ، ويدعى تفاضل y.

بالتالي يحسب تفاضل التابع $y = f(x)$

$$dy = f'(x)dx$$

مثال

ليكن $y = x^2$، أوجد dy إذا كان $x = 1,\ dx = 0.01$. قارن هذه القيمة بـ Δy من أجل $x = 1$، و $\Delta x = 0.01$.

الحل

بما أنّ $y = f(x) = x^2$، يكون $f'(x) = 2x$، والتّفاضل dy :

$$dy = f'(x)dx = f'(1)(0.01) = (2)(0.01) = 0.02$$

الآن, باستخدام $\Delta x = 0.01$ ، يعطى التّغير Δy بالعلاقة :

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = f(1.01) - f(1) = (1.01)^2 - 1 = 0.0201$$

ملاحظة : يمكن أن يستخدم التّفاضل لتقريب قيمة التّابع, إذا كان $y = f(x)$ يكون :

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy = f(x) + f'(x)dx$$

مثال

باستخدام التفاضل، اعط قيمة تقريبية : $\sqrt{16.5}$

الحل

باختيار: $x = 16$ و $dx = 0.5$

$$\sqrt{16.5} \qquad f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

$$f(16.5) = f(16+0.5) \simeq f(16) + dy\big|_{x=16}$$

$$= \sqrt{16} + \frac{1}{2\sqrt{16}}(0.5) = 4.0625$$

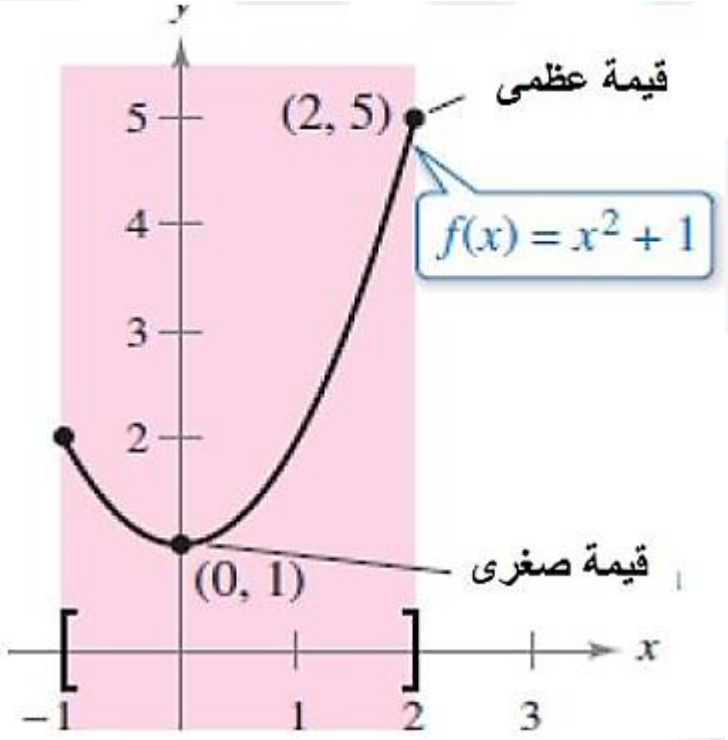
القيم القصوى

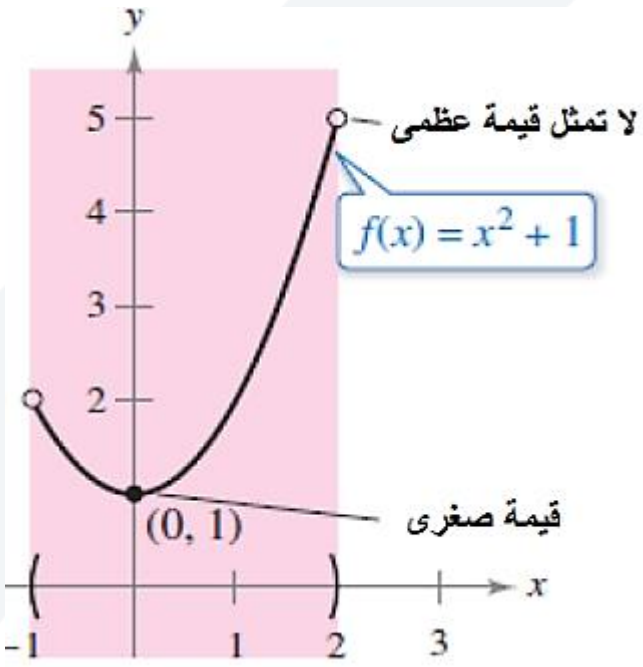
ليكن f مجموعة تعريفه D، عندئذ للتابع f قيمة عظمى مطلقة على D عند النقطة c، إذا كان:

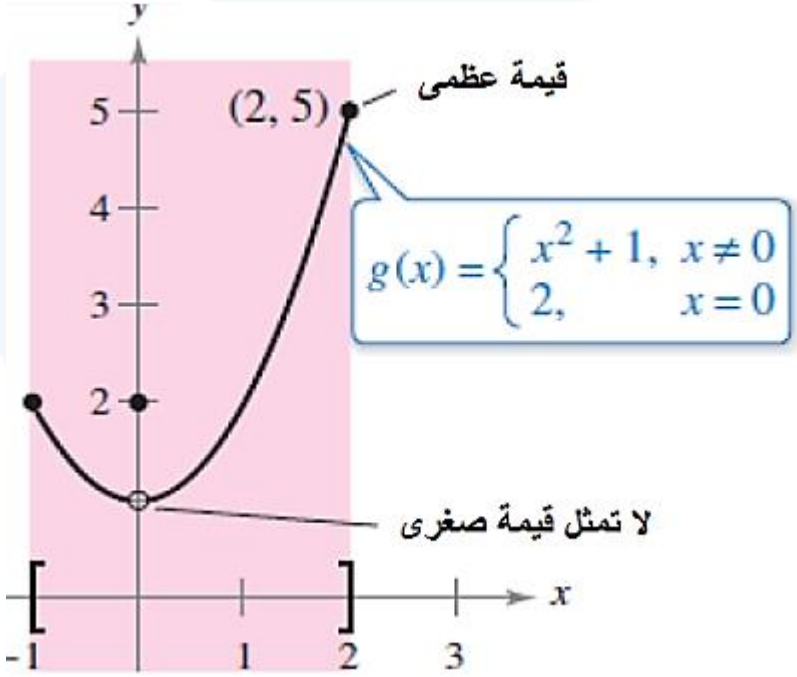
$$f(x) \le f(c)\ ;\ \forall x \in D$$

وللتابع f قيمة صغرى مطلقة على D عند النقطة c، إذا كان:

$$f(x) \ge f(c)\ ;\ \forall x \in D$$







نظريّة 1 (القيم القصوى)

ليكن f تابعاً مستمرّاً على مجال مغلق $[a,b]$، عندها يكون للتابع f قيمة صغرى وعظمى على هذا المجال.

القيم الصّغرى والقيم العظمى محليّاً والنّقاط الحرجة :

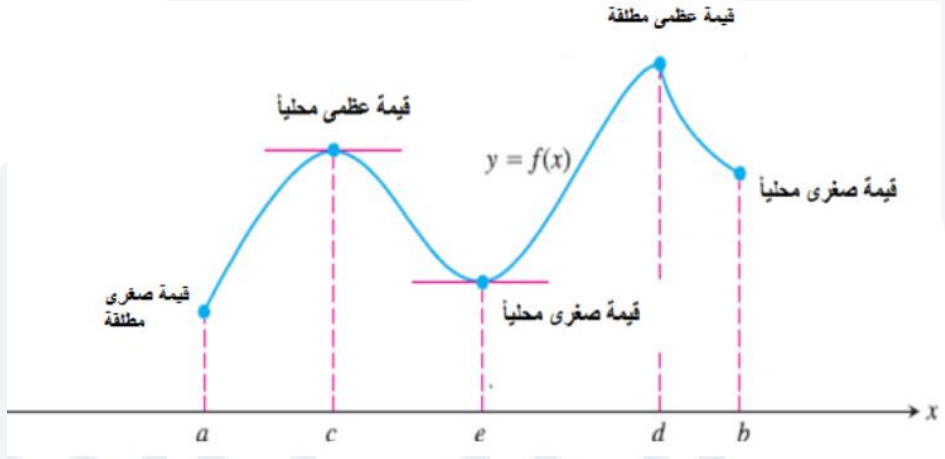
تعريف

- يقال عن f إنّه يملك قيمة عظمى محلّياً في x_0، إذا وجد مجال مفتوح J يحوي x_0 بحيث :

$$\forall x \in I \cap J\,;\;\; f(x) \le f(x_0)$$

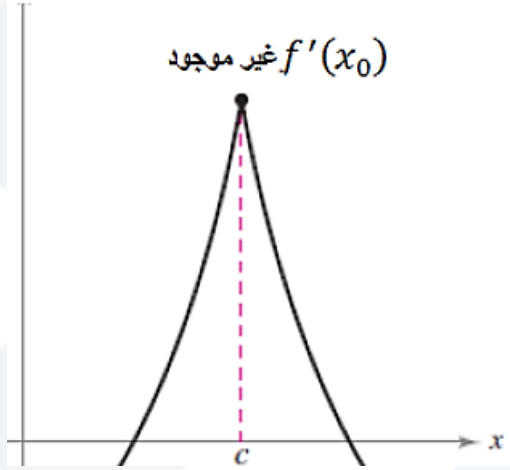
- يقال عن f إنّه يملك قيمة صغرى محلّياً في x_0، إذا وجد مجال مفتوح J يحوي x_0 بحيث :

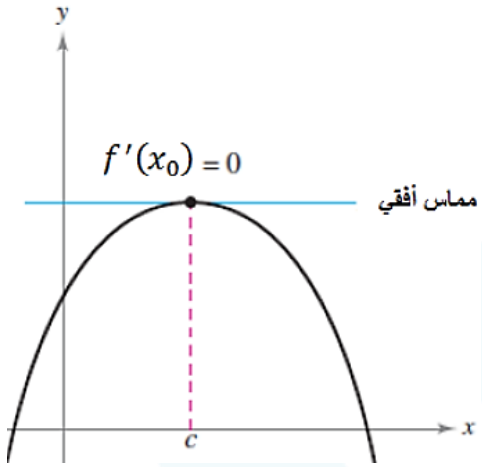
$$\forall x \in I \cap J\,;\;\; f(x_0) \le f(x)$$

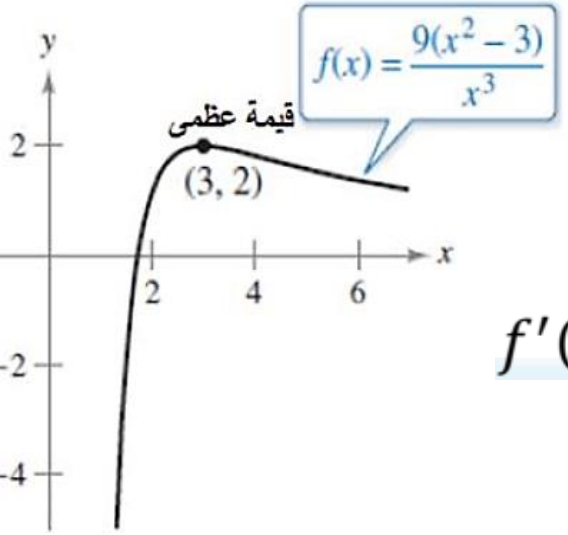


تعريف النّقطة الحرجة

ليكن f تابعاً معرّفاً عند x_0، إذا كان $f'(x_0) = 0$، أو إذا كان f غير قابل للاشتقاق عند x_0، عندئذ x_0 نقطة حرجة لـ f.







مثال أوجد قيمة المشتقّ عند كلّ قيمة قصوى محلّياً:

$$(a) \quad f(x) = \frac{9(x^2-3)}{x^3}$$

الحل

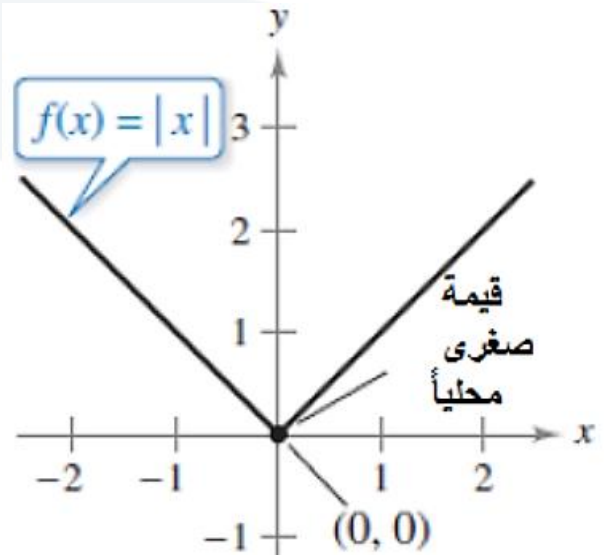
$$f'(x) = \frac{x^3(18x) - 3x^2\big(9(x^2-3)\big)}{(x^3)^2} = \frac{9(9-x^2)}{x^4}$$

عند النّقطة $(3,2)$

$$f'(3) = 0$$

$$f(x) = |x| \qquad (b)$$

الحل



$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

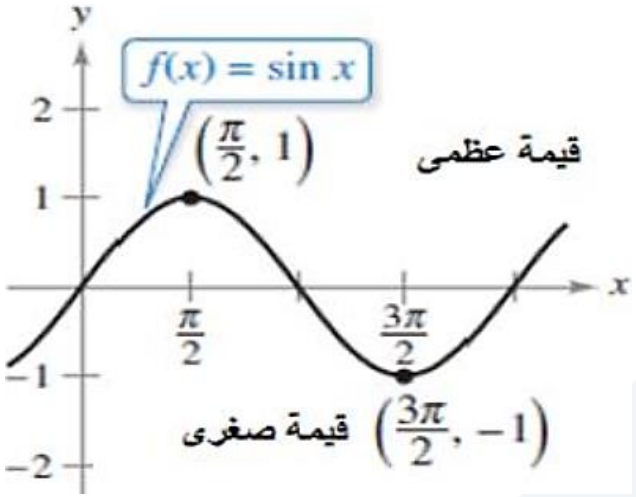
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = +1$$

عندما $x = 0$ المشتقّ غير موجود

$$f(x) = \sin x \qquad (c)$$

الحل

$$f'(x) = \cos x$$



$$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) \longrightarrow f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right) \longrightarrow f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$$

نظريّة 2 (Fermat) :

ليكن I مجالاً مفتوحاً، و $f: I \to \mathbb{R}$ تابعاً قابلاً للاشتقاق, إذا ملك f قيمة عظمى محلّيّاً عند x_0 (أو صغرى محلّيا)، عندئذ $f'(x_0) = 0$.

إيجاد القيم القصوى المطلقة لتابع مستمر على مجال مغلق

1. إيجاد النقاط الحرجة للتابع على المجال بحل المعادلة $f'(x) = 0$ أو بإيجاد النقاط التي يكون عندها المشتق غير معرف.
2. حساب قيم التابع عند النقاط الحرجة وعند طرفي المجال
3. اختيار أكبر قيمة وأصغر قيمة

مثال

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للتابع $f(x) = x^2$ على المجال $[-2, 1]$

الحل

$f'(x) = 2x = 0,$ ⟹ $x = 0$ النقطة الحرجة

عند النقطة الحرجة $f(0) = 0$

عند طرفي المجال $f(-2) = 4$ $f(1) = 1$

⟹

لدينا قيمة صغرى مطلقة عندما $x = 0$ وهي $f(0) = 0$

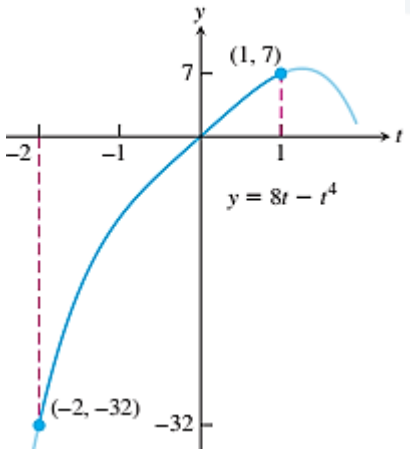
لدينا قيمة عظمى مطلقة عندما $x = -2$ وهي $f(-2) = 4$

مثال

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للتابع $g(t) = 8t - t^4$ على المجال $[-2, 1]$

الحل

$g'(t) = 0 \Rightarrow 8 - 4t^3 = 0 \Rightarrow t = \sqrt[3]{2} > 1$ النقطة الحرجة



نلاحظ أن النقطة الحرجة لا تنتمي إلى المجال $[-2, 1]$ ، بالتالي القيم العظمى والصغرى المطلقة للتابع المعطى هي على طرفي المجال.

$g(-2) = -32$ قيمة صغرى مطلقة

$g(1) = 7$ قيمة عظمى مطلقة

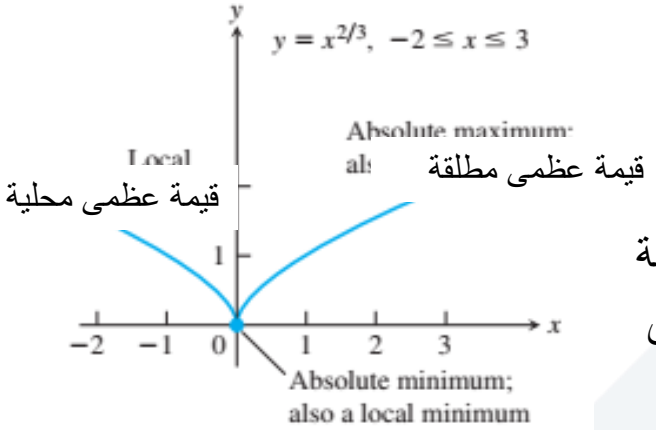
مثال

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للتابع $f(x) = x^{2/3}$ على المجال $[-2, 3]$

الحل

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

نلاحظ أن المشتق لا ينعدم في أية نقطة، لكنه غير معرف عند الصفر، لذلك: النقطة الحرجة $x = 0$



قيمة صغرى مطلقة $f(0) = 0$ عند النقطة الحرجة

عند طرفي المجال $f(-2) = (-2)^{2/3} = \sqrt[3]{4}$ قيمة عظمى محلية

$f(3) = (3)^{2/3} = \sqrt[3]{9}$ قيمة عظمى مطلقة

ملاحظة

عكس النّظريّة 2 (فيرما) غير صحيح. على سبيل المثال التّابع

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ المعرّف بالشّكل $f(x)=x^3$ يحقق $f'(0)=0$، بينما $x_0=0$، ليست نقطة قيمة صغرى ولا عظمى محلّيّاً.

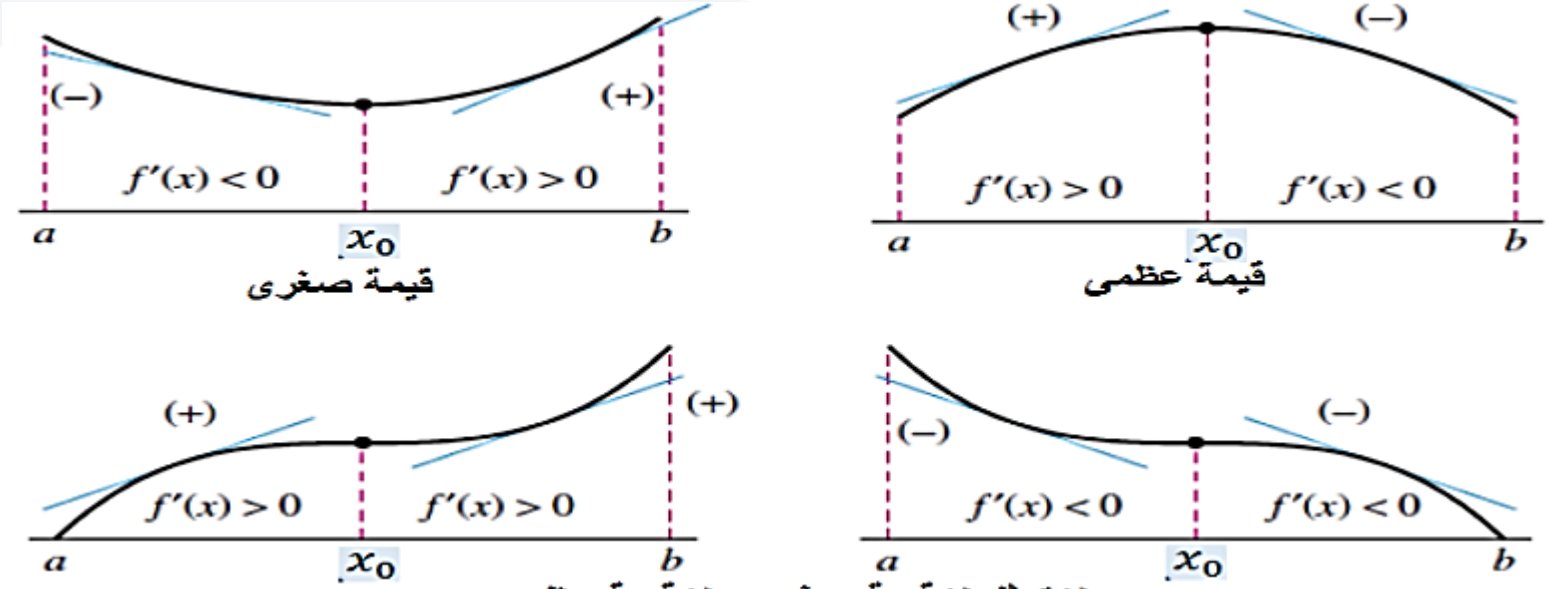
لأن

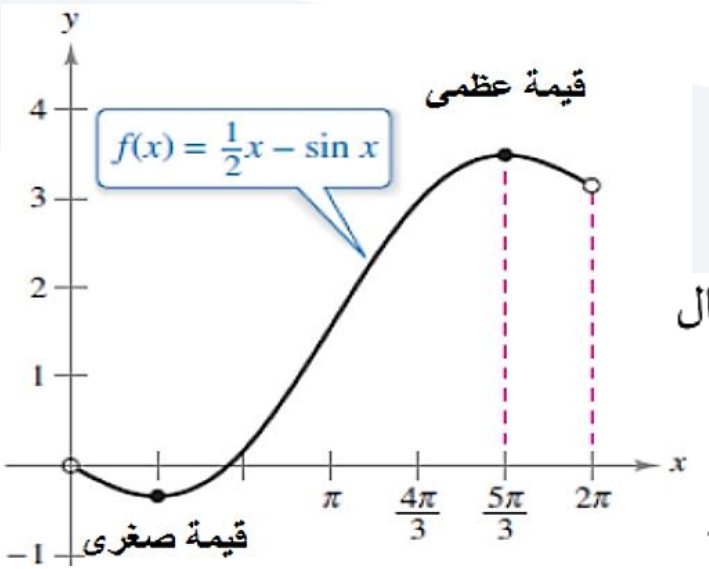
$$f(0)\le f(x)\ ;\ \forall 0\le x \qquad\qquad f(x)\le f(0)\ ;\ \forall x\le 0$$

اختبار المشتق الأول للقيم القصوى المحلية

لتكن x_0 نقطة حرجة للتابع f المستمرّ على المجال I، والقابل للاشتقاق على I (قد لا يكون قابلاً للاشتقاق عند x_0) عندها :

1. إذا تغيرت إشارة f' من السّالب إلى الموجب عند x_0، تكون $(x_0, f(x_0))$ نقطة قيمة صغرى محليّا ء
2. إذا تغيرت إشارة f' من الموجب إلى السّالب عند x_0، تكون $(x_0, f(x_0))$ نقطة قيمة عظمى محليّا ء
3. إذا كان f' موجباً (أو سالباً) على كلا جانبي النّقطة x_0، عندئذ $(x_0, f(x_0))$، لا تمثل نقطة قيمة عظمى ولا صغرى للتابع.


(−)
(+)
$f'(x) < 0$
$f'(x) > 0$
a
x_0
b
قيمة صغرى
(+)
(−)
$f'(x) > 0$
$f'(x) < 0$
a
x_0
b
قيمة عظمى
(+)
(+)
$f'(x) > 0$
$f'(x) > 0$
a
x_0
b
(−)
(−)
$f'(x) < 0$
$f'(x) < 0$
a
x_0
b
لا تمثل لا قيمة صغرى ولا قيمة عظمى



مثال أوجد القيم القصوى محليّاً للتابع $f(x) = \frac{1}{2}x - \sin x$ على المجال $]0,2\pi[$.

الحل التّابع مستمرّ على المجال $]0,2\pi[$

لتحديد النّقاط الحرجة للتابع على هذا المجال، نوجد القيم الّتي تعدم المشتقّ الواقعة ضمن المجال $]0,2\pi[$:

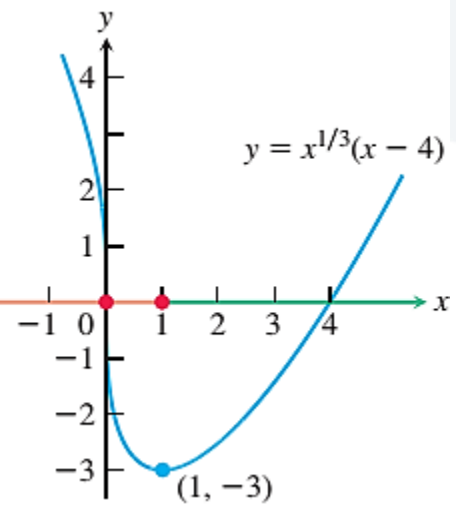
$$f'(x) = \frac{1}{2} - \cos x = 0 \implies \cos x = \frac{1}{2} \implies x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

تابع المشتقّ معرّف في كلّ مكان، وبذلك النّقطتان الحرجتان الوحيدتان للتابع، $x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$.

المجال	$\frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$	$\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$	$0 < x < \frac{\pi}{3}$
قيمة الاختبار	$x = \frac{7\pi}{4}$	$x = \pi$	$x = \frac{\pi}{4}$
إشارة المشتقّ	$f'\left(\frac{7\pi}{4}\right) < 0$	$f'(\pi) > 0$	$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$
النّتيجة	التّابع متناقص	التّابع متزايد	التّابع متناقص

بتطبيق اختبار المشتقّ الأوّل، نستنتج أنّ لـ f قيمة صغرى محليّاً عند $x = \frac{\pi}{3}$، وقيمة عظمى محليّاً عند $x = \frac{5\pi}{3}$.

مثال أوجد القيم القصوى محليّاً للتابع $f(x) = x^{1/3}(x-4) = x^{4/3} - 4x^{1/3}$.



الحل

نوجد أولاً مشتق التابع المعطى

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^{4/3} - 4x^{1/3}) = \frac{4}{3}x^{1/3} - \frac{4}{3}x^{-2/3} = \frac{4}{3}x^{-2/3}(x-1) = \frac{4(x-1)}{3x^{2/3}}$$

يساوي المشتق الصفر عندما $x = 1$ ويكون غير معرف عندما $x = 0$

بالتالي لدينا نقطتان حرجتان $x = 1$ و $x = 0$

$x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$-$	$-$	$+$
decreasing	decreasing	increasing
-1 متناقص	0 متناقص 1	متزايد 2

للتابع قيمة صغرى محلية عندما $x = 1$ تساوي $f(1) = 1^{1/3}(1-4) = -3$