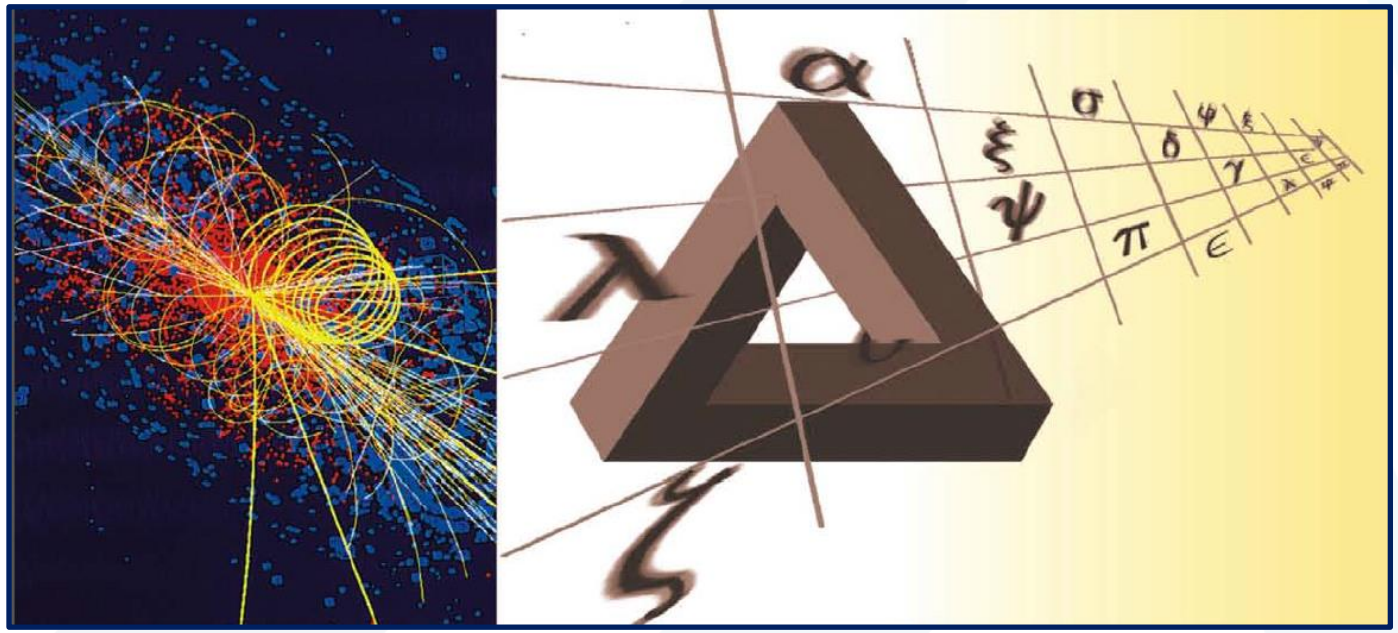
جامعة المنارة

كلية الهندسة

قسم الروبوتيك و الأنظمة الذكية

مقرر التحليل العددي

Numerical Solutions of Differential Equations with Matlab



د. محمد خيرعبدالله محمد

العام الدراسي 2023-2024

Contents

Euler Method

طريقة أويلر هي طريقة عددية لحل المعادلات التفاضلية العادية والتي تكون على الصورة

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y),\ \ y(x_0) = y_0$$

وهي بذلك تتعامل مع المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

$$\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-x}, y(0) = 5$$

$$e^{y}\frac{dy}{dx} + x^2y^2 = 2Sin(3x), y(0) = 5$$

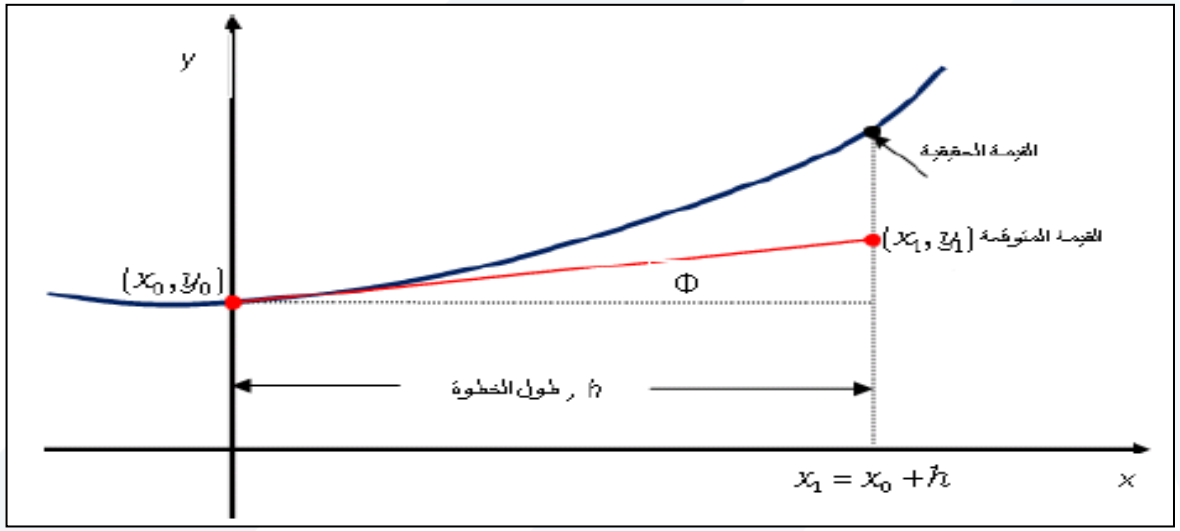
$$\frac{dy}{dx} = e^{-x} - 2y, y(0) = 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2Sin(3x) - x^2y^2}{e^{y}}, y(0) = 5$$

$$f(x,y) = e^{-x} - 2y$$

$$f(x,y) = \frac{2Sin(3x) - x^2y^2}{e^{y}}$$

بفرض أن حل المعادلة التفاضلية هو الدالة $y(x)$ كما في الشكل حيث يتضح أن $y = y_0$ عند $x = x_0$. وعلى افتراض أن $x_0 = 0$. وبهذا فإن الميل للدالة $y(x)$ هو $f(x, y)$ وبهذا فإن الميل عند $x = x_0$ هو $f(x_0, y_0)$ حيث إن كلا من x_0، y_0 معلومة من الشرط الابتدائي $y(x_0) = y_0$.



ومن الشكل نجد أن الميل عند $x = x_0$ هو على الصورة $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ والتي نستطيع منها الحصول على العلاقة

$$f(x_0, y_0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \qquad \Rightarrow y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$$

وعلى إعتبار $x_1 - x_0$ هو طول الخطوة ويرمز له بالرمز h ، لنحصل على العلاقة

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)h$$

حيث إن y_1 تعبر عن القيمة التقريبية (approximate value) لـ $y(x)$ عند $x = x_1$ وأحيانا يطلق عليها القيمة التنبؤية أو المتوقعة (Predicted value)، ولحساب y_2 وهي القيمة التقريبية لـ $y(x)$ عند $x = x_2$

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)h$$

حيث إن $x_2 = x_1 + h$

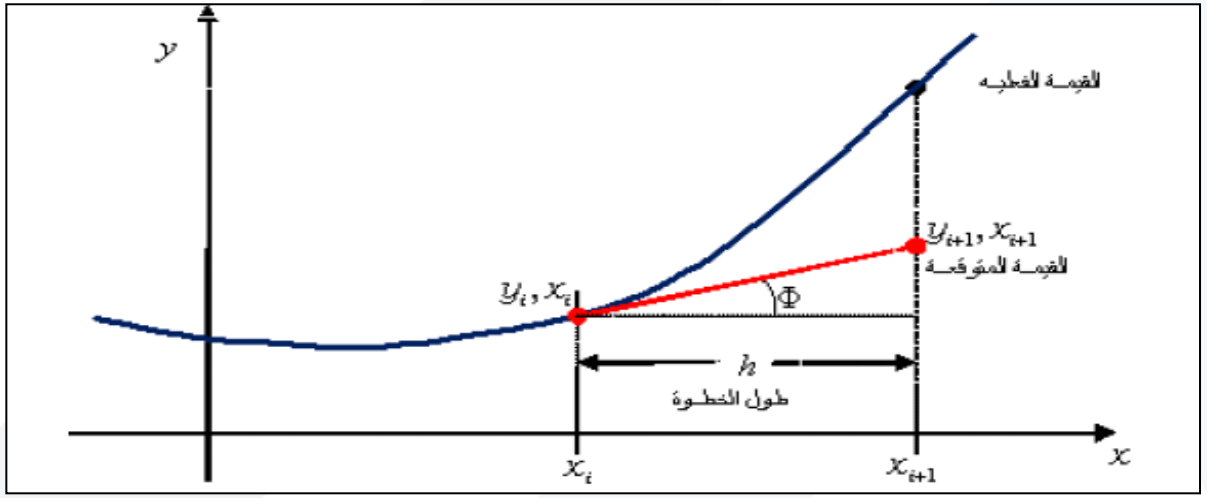
وإعتمادا على ما سبق يمكن التوصل إلى العلاقة العامة التالية

$$\left.\begin{aligned} y(x_{i+1}) &= y(x_i) + f(x_i, y_i)h \\ x_{i+1} &= x_i + h \end{aligned}\right\}$$

والتي يمكن إختصارا كتابتها على الشكل التالي

$$\left.\begin{aligned} y_{i+1} &= y(x_i) + f(x_i, y_i)h \\ x_{i+1} &= x_i + h \end{aligned}\right\}$$

وتسمى العلاقة التكرارية بطريقة أويلر، وأحيانا يطلق عليها أويلر كوشي



Example

أوجد حل المعادلة التفاضلية عند $x = 1$

$$y' + y = x$$
$$y(0) = 1$$

في البداية سنقوم بفرض ان $h = 0.2$ ونقوم بوضع المعادلة التفاضلية على شكل معادلة أويلر لتصبح على الصورة

$$y' + y = x \Rightarrow y' = x - y$$

وبهذا فإن $f(x, y) = x - y$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h \Rightarrow y_{i+1} = y_i + (x_i - y_i)(0.2)$$

ومنها نحصل على العلاقة التالية

$$\left.\begin{aligned} y_{i+1} &= 0.8y_i + (0.2)(x_i) \qquad , i = 0,1,2,3,4 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}\right\}$$

والآن سنعوض عن $i = 0,1,2,3,4$ في العلاقة السابقة لنحصل على

$$y_1 = (0.8)y_0 + (0.2)x_0 = (0.8)(1) + (0.2)(0) = 0.8$$
$$y_2 = (0.8)y_1 + (0.2)x_1 = (0.8)(0.8) + (0.2)(0.2) = 0.68$$
$$y_3 = (0.8)y_2 + (0.2)x_2 = (0.8)(0.68) + (0.2)(0.4) = 0.624$$
$$y_4 = (0.8)y_3 + (0.2)x_3 = (0.8)(0.624) + (0.2)(0.6) = 0.619$$
$$y_5 = (0.8)y_4 + (0.2)x_4 = (0.8)(0.619) + (0.2)(0.8) = 0.655$$

وبهذا فإن الحل العددي للمعادلة التفاضلية بمعلومية $h = 0.2$ هو

$$y(x = 0) = 1$$
$$y(x = 0.2) = 0.8$$
$$y(x = 0.4) = 0.68$$
$$y(x = 0.6) = 0.624$$
$$y(x = 0.8) = 0.619$$
$$y(x = 1) = 0.655$$

يحتاج البرنامج إلى إدخال بعض البيانات كما يلي

إدخال قيمة طول الخطوة ويرمز لها بالرمز h

إدخال الدالة $f(x,y)$ للمعادلة التفاضلية

إدخال الشرط الابتدائي وهي قيمة كل من x_0 ، y_0 .

إدخال قيمة x المطلوب عندها حساب قيمة y ونرمز لها بالرمز xf

```
syms f x y
h = input('step size=');
f = input('the function f(x,y)=');
X(1) = input('x0=');
Y(1) = input('y0=');
xf = input('xf=');
for i=1:(xf-X(1))/h
    X(i+1)=X(i)+h;
    y=Y(i);
    x=X(i);
    Y(i+1)=Y(i)+h*subs(f);
end
Y
```

وعند تنفيذ البرنامج نقوم بإدخال البيانات تباعا كما يظهر في النافذة التالية

```
step size=0.2
the function f(x,y)=x-y
x0=0
y0=1
xf=1
Y =
   1.0000    0.8000    0.6800    0.6240    0.6192    0.6554
```

Example

f=(F- k*v)/m

```
F=1000;
m=100;
k=50;
syms v
h = input('step size=');
f = input('the function f(t,v)=');
T(1) = input('t0=');
V(1) = input('v0=');
Tf = input('Tf=');
for i=1:(Tf-T(1))/h
    T(i+1)=T(i)+h;
    v=V(i);
    t=T(i);
    V(i+1)=V(i)+h*subs(f);
end
V
```

f=20- 20*exp(-t/٢)

```
syms f t x
h = input('step size=');
f = input('the function f(t,x)=');
T(1) = input('t0=');
X(1) = input('x0=');
Tf = input('Tf=');
for i=1:(Tf-T(1))/h
    T(i+1)=T(i)+h;
    x=X(i);
    t=T(i);
    X(i+1)=X(i)+h*subs(f);
end
 X
```

Runge Kutta Method

تعد طريقة رونج كوتا من الرتبة الرابعة Runge-Kutta 4th Order إحدى أشهر طرق التحليل العددي لحل المعادلات التفاضلية العادية ويرمز لها بالرمز RK4 والتي تستخدم لحل المعادلات التفاضلية على الصورة

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), y(0) = y_0$$

ينص مفكوك تايلور على أنه يمكن كتابة الدالة y(x) عند نقطة (x+h) تبعد عن x بمقدار h بالمعادلة التالية:

$$y(x+h) = y(x) + y'(x)h + \frac{1}{2!}y''(x)h^2 + \frac{1}{3!}y'''(x)h^3 + \cdots . + \frac{1}{n!}y^{(n)}(x)h^n$$

حيث y' و y'' و y''' و y(n) هي التفاضل من الدرجة الأولى والثانية والثالثة وحتى الدرجة n.

تعتمد طريقة رونج كوتا من الرتبة الرابعة على عدم إهمال أي من الخمسة حدود الأولى من مفكوك تايلور كما يلي

$$
\left.\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + \frac{dy}{dx}\Big|_{x_i,y_i}(x_{i+1}-x_i) + \frac{1}{2!}\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x_i,y_i}(x_{i+1}-x_i)^2 \\
&\quad + \frac{1}{3!}\frac{d^3y}{dx^3}\Big|_{x_i,y_i}(x_{i+1}-x_i)^3 + \frac{1}{4!}\frac{d^4y}{dx^4}\Big|_{x_i,y_i}(x_{i+1}-x_i)^4 \\
y_{i+1} &= y_i + f(x_i,y_i)h + \frac{1}{2!}f'(x_i,y_i)h^2 + \frac{1}{3!}f''(x_i,y_i)h^3 \\
&\quad + \frac{1}{4!}f'''(x_i,y_i)h^4
\end{aligned}\right\}
$$

والآن سنضع تلك المعادلة على الصورة التالية

$$y_{i+1} = y_i + (a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + a_4k_4)h$$

وبمساواة المعادلة بالخمسة الحدود الأولى من مفكوك تايلور

$$
\left.\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \\
k_1 &= f(x_i,y_i) \\
k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right) \\
k_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h\right) \\
k_4 &= f(x_i + h, y_i + k_3h)
\end{aligned}\right\}
$$

Example

أوجد حل المعادلة التفاضلية $y' + y = x$ عند $x = 1$ بمعلومية $y(0) = 1$

$$y' = x - y, \quad y(0) = 1$$

ومنها $f(x, y) = x - y$ وعلى اعتبار ان $h = 0.1$ نحصل على

$$k_1 = f(x_i, y_i) \qquad \Rightarrow k_1 = x_i - y_i$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right) \qquad \Rightarrow k_2 = x_i + \frac{1}{2}h - y_i - \frac{1}{2}k_1 h$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right) \qquad \Rightarrow k_3 = x_i + \frac{1}{2}h - y_i - \frac{1}{2}k_2 h$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3 h) \qquad \Rightarrow k_4 = x_i + h - y_i - k_3 h,$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

أولا عند $i = 0$ (مع العلم أن $y_0 = 1,\ x_0 = 0$)

$$k_1 = x_i - y_i = 0 - 1 = -1$$

$$k_2 = x_i + \frac{1}{2}h - y_i - \frac{1}{2}k_1 h = 0 + (0.5)(0.1) - 1 - (0.5)(-1)(0.1) = -0.9$$

$$k_3 = x_i + \frac{1}{2}h - y_i - \frac{1}{2}k_2 h = 0 + (0.5)(0.1) - 1 - (0.5)(-0.9)(0.1) = -0.9050$$

$$k_4 = x_i + h - y_i - k_3 h = 0 + 0.1 - 1 - (-0.9050)(0.1) = -0.8095$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

$$y_1 = 1 + \frac{1}{6}(-1 + 2 * (-0.9) + 2 * (-0.9050) - 0.8095)(0.1) = 0.9097$$

ونلاحظ تتابع القيم من الجدول التالي

i	$x(i)$	$y(i)$	k_1	k_2	k_3	k_4	$y(i+1)$
0	0.0	1	−1	−0.9	−0.905	−0.8095	0.9097
1	0.1	0.9097	−0.80968	−0.71919	−0.72372	−0.6373	0.83746
2	0.2	0.83746	−0.63746	−0.55559	−0.55968	−0.48149	0.7816
3	0.3	0.7816	−0.48164	−0.40756	−0.41126	−0.34051	0.7406
4	0.4	0.7406	−0.34064	−0.27361	−0.27696	−0.21294	0.7131
5	0.5	0.7131	−0.21306	−0.15241	−0.15544	−0.097518	0.6976
6	0.6	0.6976	−0.097624	−0.042743	−0.045487	0.0069248	0.6932
7	0.7	0.6932	0.0068288	0.056487	0.054004	0.10143	0.6987
8	0.8	0.6987	0.10134	0.14627	0.14403	0.18694	0.7131
9	0.9	0.7131	0.18686	0.22752	0.22548	0.26431	0.7358

Example

كرة درجة حرارتها 1200 كلفن، سمح لها بالتبريد في الهواء عند درجة الحرارة للوسط المحيط مقدارها 300 كلفن. بإفتراض أن الحرارة المفقودة نتيجة للإشعاع فقط، وعلى إعتبار أن المعادلة التفاضلية التالية تمثل درجة حرارة الكرة .

$$\frac{d\theta}{dt} = -2.2067\times10^{-12}\left(\theta^4 - 81\times10^8\right), \theta(0) = 1200\,\mathrm{K}$$

حيث θ تمثل درجة الحرارة بالكلفن و تمثل t الزمن بالثانية. أوجد درجة الحرارة عند $t = 4800$ ثانية باستخدام طريقة رونج كوتا للرتبة الرابعة. بافتراض طول الخطوة 240 ثانية

$$\frac{d\theta}{dt} = -2.2067 \times 10^{-12}\left(\theta^4 - 81 \times 10^8\right)$$

$$\Rightarrow f(t,\theta) = -2.2067 \times 10^{-12}\left(\theta^4 - 81 \times 10^8\right)$$

نقوم بالتعويض في معادلة RK4

$$\left.\begin{aligned}
\theta_{i+1} &= \theta_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \\
k_1 &= f(t_i, \theta_i) \\
k_2 &= f\left(t_i + \frac{1}{2}h, \theta_i + \frac{1}{2}k_1 h\right) \\
k_3 &= f\left(t_i + \frac{1}{2}h, \theta_i + \frac{1}{2}k_2 h\right) \\
k_4 &= f(t_i + h, \theta_i + k_3 h)
\end{aligned}\right\}$$

أولا عند $i=0$ فإن $t_0=0, \theta_0=1200\text{K}$ ومنها فإن

$$k_1=f(t_0,\theta_0)$$

$$=f(0,1200) \quad =-2.2067\times10^{-12}\left(1200^4-81\times10^8\right)=-4.5579$$

$$k_2=f\left(t_0+\frac{1}{2}h,\theta_0+\frac{1}{2}k_1h\right)$$

$$=f\left(0+\frac{1}{2}(240),1200+\frac{1}{2}(-4.5579)\times240\right)$$

$$=f(120,653.05) \quad =-2.2067\times10^{-12}\left(653.05^4-81\times10^8\right)=-0.38347$$

$$k_3=f\left(t_0+\frac{1}{2}h,\theta_0+\frac{1}{2}k_2h\right)$$

$$=f\left(0+\frac{1}{2}(240),1200+\frac{1}{2}(-0.38347)\times240\right)$$

$$= f(120, 1154.0) \quad = -2.2067 \times 10^{-12}\left(1154.0^4 - 81 \times 10^8\right) = -3.8954$$

$$k_4 = f(t_0 + h, \theta_0 + k_3 h)$$

$$= f(0 + 240, 1200 + (-3.894) \times 240)$$

$$= f(240, 265.10) = -2.2067 \times 10^{-12}\left(265.10^4 - 81 \times 10^8\right) = 0.0069750$$

بالتعويض لحساب قيمة θ_1

$$\theta_1 = \theta_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

$$= 1200 + \frac{1}{6}(-4.5579 + 2(-0.38347) + 2(-3.8954) + (0.069750))240$$

$$= 1200 + (-2.1848) \times 240 \quad = 675.65\,\mathrm{K}$$

حيث إن θ_1 هي القيمة التقريبية لدرجة الحرارة عند

$$t = t_1 \quad = t_0 + h \quad = 0 + 240 \quad = 240$$

ثانيا عند $i=1$ فإن $t_1=240, \theta_1=675.65\,\mathrm{K}$ ومنها فإن

$$k_1 = f(t_1, \theta_1)$$

$$= f(240, 675.65) \quad = -2.2067\times10^{-12}\left(675.65^4 - 81\times10^8\right) = -0.44199$$

$$k_2 = f\left(t_1 + \frac{1}{2}h, \theta_1 + \frac{1}{2}k_1 h\right)$$

$$= f\left(240 + \frac{1}{2}(240), 675.65 + \frac{1}{2}(-0.44199)\,240\right)$$

$$= f(360, 622.61) \quad = -2.2067\times10^{-12}\left(622.61^4 - 81\times10^8\right) = -0.31372$$

$$k_3 = f\left(t_1 + \frac{1}{2}h, \theta_1 + \frac{1}{2}k_2 h\right)$$

$$= f\left(240 + \frac{1}{2}(240), 675.65 + \frac{1}{2}(-0.31372)\times 240\right)$$

$$= f(360, 638.00) \quad = -2.2067\times10^{-12}\left(638.00^4 - 81\times10^8\right) = -0.34775$$

$$k_4 = f(t_1 + h, \theta_1 + k_3 h)$$

$$= f(240 + 240, 675.65 + (-0.34775)\times 240)$$

$$= f(480, 592.19) \quad = 2.2067\times10^{-12}\left(592.19^4 - 81\times10^8\right) = -0.25351$$

بالتعويض لحساب قيمة θ_2

$$\theta_2 = \theta_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

$$= 675.65 + \frac{1}{6}\left(-0.44199 + 2(-0.31372) + 2(-0.34775) + (-0.25351)\right) \times 240$$

$$= 675.65 + \frac{1}{6}(-2.0184) \times 240 \qquad = 594.91\,\mathrm{K}$$

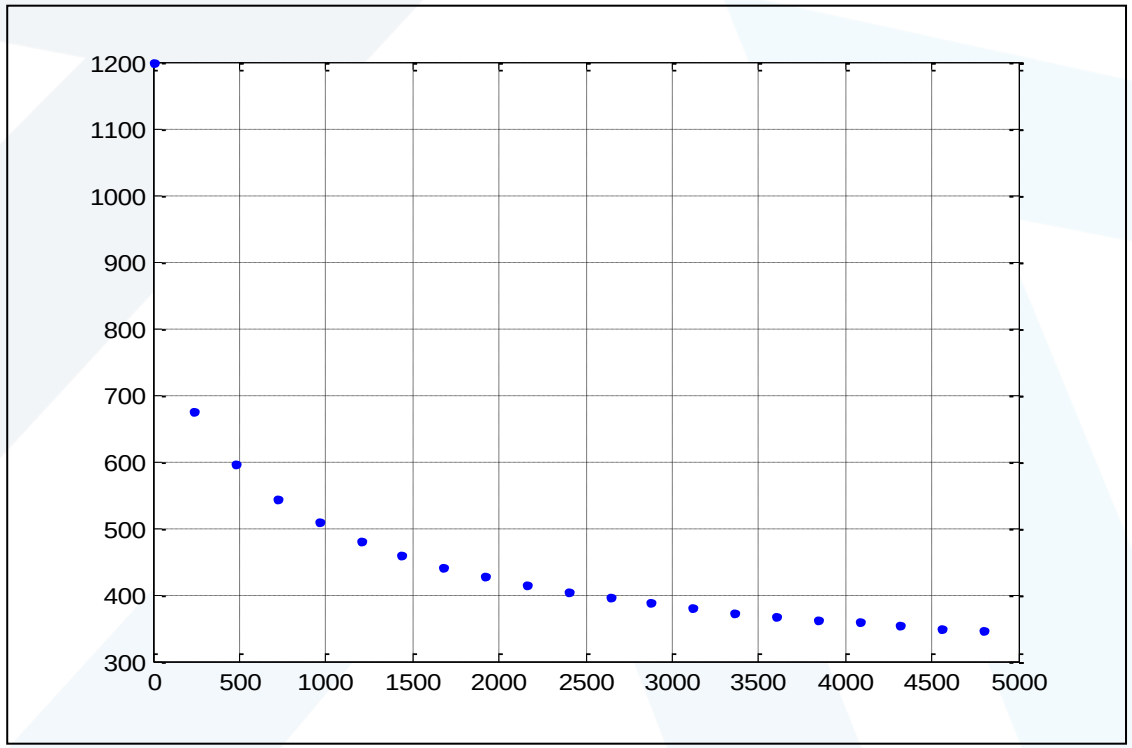
حيث إن θ_2 هي القيمة التقريبية لدرجة الحرارة عند

$$t = t_2 = t_1 + h = 240 + 240 = 480$$

يتم تكرار نفس الخطوات حتى الوصول إلى درجة الحرارة عند اللحظة ٤٨٠٠ ثانية

```
clc
clear all
syms f x y
h = input('step size=');
f = input('the function f(x,y)=');
X(1) = input('x0=');
Y(1) = input('y0=');
xf = input('xf=');
for i=1:(xf-X(1))/h
    y=Y(i);
    x=X(i);
    k1=subs(f);
    y=Y(i)+0.5*k1*h;
    x=X(i)+0.5*h;
    k2=subs(f);
    y=Y(i)+0.5*k2*h;
    x=X(i)+0.5*h;
    k3=subs(f);
    y=Y(i)+k3*h;
    x=X(i)+h;
    k4=subs(f);
    Y(i+1)=Y(i)+(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4)*h;
    X(i+1)=X(i)+h;
end
plot (X,Y,'b.') % numerical solution
grid
```

```
step size=240
the function f(x,y)=-2.2067*10^(-12)*(y^4-81*10^8)
x0=0
y0=1200
xf=4800
```



انتهت المحاضرة