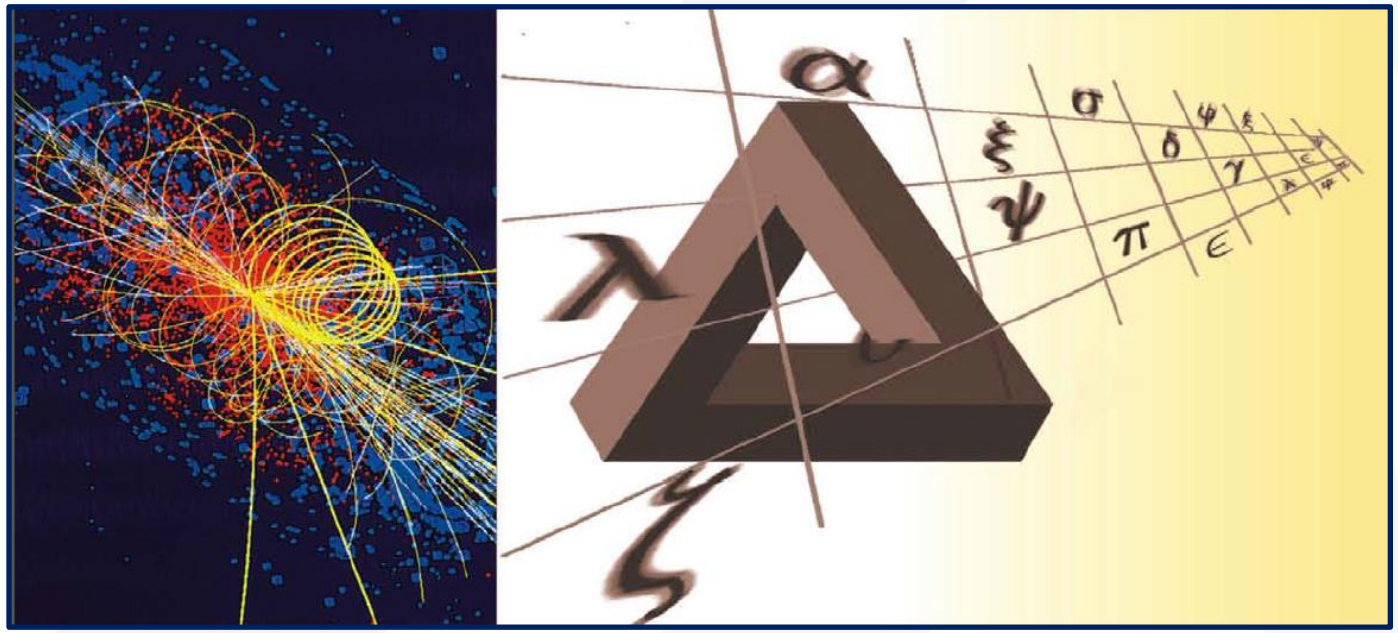
جامعة المنارة

كلية الهندسة

قسم الروبوتيك و الأنظمة الذكية

مقرر التحليل العددي

# Numerical Solutions of High Order Differential Equations with Matlab



د. محمد خيرعبدالله محمد

العام الدراسي 2023-2024

# Contents

طريقة رانج كوتا من الرتبة الرابعة لحل مجموعة من المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى

طريقة رانج كوتا من الرتبة الرابعة لحل المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية

## طريقة رانج كوتا من الرتبة الرابعة لحل مجموعة من المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى

بفرض أن لدينا معادلتين من الرتبة الأولى بقيم ابتدائية معلومة على الصورة

$$y' = F(x, y, v), \qquad y(0) = \alpha$$

$$v' = G(x, y, v), \qquad v(0) = \beta$$

وحيث إن لدينا معادلتين تفاضليتين فإن لدينا مجموعتين من قيم الثوابت، مجموعة الثوابت $k$ ومجموعة الثوابت $m$ كما يلي

$$k_1 = F(x_i, y_i, v_i)$$

$$k_2 = F\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1, v_i + \frac{1}{2}hm_1\right)$$

$$k_3 = F\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2, v_i + \frac{1}{2}hm_2\right)$$

$$k_4 = F(x_i + h, y_i + k_3 h, v_i + hm_3)$$

$$m_1 = G(x_i, y_i, v_i)$$
$$m_2 = G\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1, v_i + \frac{1}{2}hm_1\right)$$
$$m_3 = G\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2, v_i + \frac{1}{2}hm_2\right)$$
$$m_4 = G(x_i + h, y_i + k_3 h, v_i + hm_3)$$

وبالتالي يمكن حساب قيم $y_{i+1}, v_{i+1}$ كما يلي

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$
$$v_{i+1} = v_i + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)h$$

ويمكن مما سبق استنتاج طريقة رونج كوتا لأي عدد من المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى، بفرض مجموعة من ثلاث معادلات تفاضلية يكون حلها على النحو التالي

$$y' = F(x, y, v, w), \qquad y(0) = \alpha$$

$$v' = G(x, y, v, w), \qquad v(0) = \beta$$

$$w' = H(x, y, v, w), \qquad w(0) = \gamma$$

وحيث إن لدينا ثلاث معادلات فإن لدينا ثلاث مجموعات من الثوابت، مجموعة الثوابت $k$ ،مجموعة الثوابت $m$ ومجموعة الثوابت $n$كما يلي

$$k_1 = F\left(x_i, y_i, v_i, w_i\right)$$
$$k_2 = F\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1, v_i + \frac{1}{2}hm_1, w_i + \frac{1}{2}hn_1\right)$$
$$k_3 = F\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2, v_i + \frac{1}{2}hm_2, w_i + \frac{1}{2}hn_2\right)$$
$$k_4 = F\left(x_i + h, y_i + hk_3, v_i + hm_3, w_i + hn_3\right)$$

$$m_1 = G\left(x_i, y_i, v_i, w_i\right)$$
$$m_2 = G\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1, v_i + \frac{1}{2}hm_1, w_i + \frac{1}{2}hn_1\right)$$
$$m_3 = G\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2, v_i + \frac{1}{2}hm_2, w_i + \frac{1}{2}hn_2\right)$$
$$m_4 = G\left(x_i + h, y_i + hk_3, v_i + hm_3, w_i + hn_3\right)$$

$$n_1 = H(x_i, y_i, v_i, w_i)$$
$$n_2 = H\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1, v_i + \frac{1}{2}hm_1, w_i + \frac{1}{2}hn_1\right)$$
$$n_3 = H\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2, v_i + \frac{1}{2}hm_2, w_i + \frac{1}{2}hn_2\right)$$
$$n_4 = H(x_i + h, y_i + hk_3, v_i + hm_3, w_i + hn_3)$$

وبالتالي يمكن حساب قيم $y_{i+1}, v_{i+1}, w_{i+1}$ كما يلي

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$
$$v_{i+1} = v_i + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)h$$
$$w_{i+1} = w_i + \frac{1}{6}(n_1 + 2n_2 + 2n_3 + n_4)h$$

Example

## النموذج المشترك للضحية و المفترس (تعايش)

$$\left.\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= a_1R - F_1(R,F)\\ \frac{dF}{dt} &= -a_2F + F_2(R,F)\end{aligned}\right\}$$

$F$ fox

$R$ Rabbit

a1: معدل تكاثر الأرانب

a2: معدل موت الثعالب

$$F_1(R,F) = b_1RF \quad \& \quad F_2(R,F) = b_2RF$$

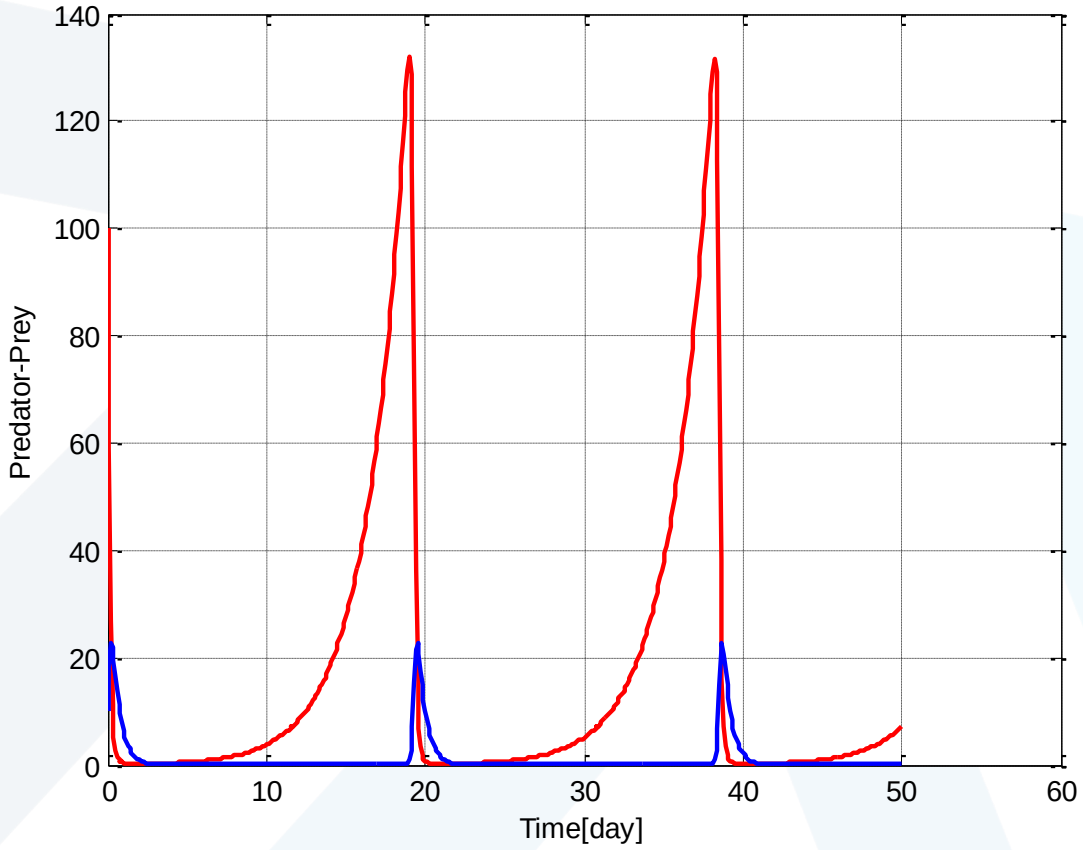
$b_1RF$: معدل موت الأرانب عند التعايش مع الثعالب

$b_2RF$: معدل تكاثر الثعالب عند التعايش مع الأرانب

$$\frac{dR}{dt} = +a_1R - b_1RF$$

$$\frac{dF}{dt} = -a_2F + b_2RF$$

```
syms f g x y v
R0=100;
F0=10;
a1=0.4;
b1=0.4;
a2=2;
b2=0.1;
h=0.1;
f =a1*y-b1*v*y;
g=-a2*v+b2*v*y;
X(1) = 0;
Y(1) = R0;
V(1)= F0;
xf = 50;
for i=1:(xf-X(1))/h
   x=X(i);
   y=Y(i);
   v=V(i);
   k1=subs(f);
   m1=subs(g);

   x=X(i)+0.5*h;
   y=Y(i)+0.5*h*k1;
   v=V(i)+0.5*h*m1;
   k2=subs(f);
   m2=subs(g);

   x=X(i)+0.5*h;
   y=Y(i)+0.5*h*k2;
   v=V(i)+0.5*h*m2;
   k3=subs(f);
   m3=subs(g);

   x=X(i)+h;
   y=Y(i)+h*k3;
   v=V(i)+h*m3;
   k4=subs(f);
   m4=subs(g);

   Y(i+1)=Y(i)+(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4)*h;
   V(i+1)=V(i)+(1/6)*(m1+2*m2+2*m3+m4)*h;
   X(i+1)=X(i)+h;
end
figure
plot (X,Y,'r',X,V,'b','LineWidth',2) % numerical solution
xlabel('Time')
ylabel('Predator-Prey')
grid
```



## طريقة رانج كوتا من الرتبة الرابعة لحل المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية

بفرض المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية على الصورة

$$y'' = f(x, y, y'), \qquad y(0) = \alpha, \quad y'(0) = \beta$$

بتحويل المعادلة التفاضلية إلى مجموعة من المعادلات التفاضلية ذات الرتبة الأولى على النحو التالي

$$\left.\begin{array}{ll} y' = v, & y(0) = \alpha, \\ v' = f(x, y, v), & v(0) = \beta \end{array}\right\}$$

وبهذا فإن معادلة الدرجة الثانية قد تحولت إلى مجموعة من معادلات الدرجة الأولى والتي يكون حلها على الصورة

$$k_1 = v_i$$
$$k_2 = v_i + 0.5hm_1$$
$$k_3 = v_i + 0.5hm_2$$
$$k_4 = v_i + hm_3$$

$$m_1 = f\left(x_i, y_i, v_i\right)$$
$$m_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_1, v_i + \frac{1}{2}hm_1\right) = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hv_i, v_i + \frac{1}{2}hm_1\right)$$
$$m_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2, v_i + \frac{1}{2}hm_2\right) = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hv_i + \frac{1}{4}h^2m_1, v_i + \frac{1}{2}hm_2\right)$$
$$m_4 = f\left(x_i + h, y_i + hk_3, v_i + hm_3\right) = f\left(x_i + h, y_i + hv_i + \frac{1}{2}h^2m_2, v_i + hm_3\right)$$

لاحظ التغير الذي حدث لمجموعة الثوابت $k$ وذلك بسبب كون $y'=v$ دالة في المتغير $v$ فقط وغير معتمدة على المتغيرين $x\,,y$ وتكون قيم $y\,,v$ على النحو التالي

$$
\begin{aligned}
y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h \\
&= y_i + \frac{1}{6}\left[(v_i) + 2(v_i + 0.5hm_1) + 2(v_i + 0.5hm_2) + (v_i + hm_3)\right]h \\
&= y_i + hv_i + \frac{1}{6}(m_1 + m_2 + m_3)h^2 \\
v_{i+1} &= v_i + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)h
\end{aligned}
$$

ونلاحظ هنا أن المعادلات خالية تماما من المتغيرات $k$

## Example

أوجد حل مسألة القيم الابتدائية التالية عند $x = 1$ بطول خطوة مقداره

$h = 0.1$

$$y'' + xy' + y = 3 + 5x^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

**الحل**

بتحويل المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية إلى مجموعة من معادلات الدرجة الأولى

$$\begin{aligned} y' &= v, & y(0) &= 1 \\ v' &= 3 + 5x^2 - xv - y, & v(0) &= 0 \end{aligned}$$

نستنتج أن $f(x, y, v) = 3 + 5x^2 - xv - y$

وحيث إن $y(0) = 1, \ v(0) = 0$ فإن :

أولا: عند $i=0$ فإن $x_0=0,\quad y_0=1,\quad v_0=0,\quad h=0.1$

$$m_1=f(x_0,y_0,v_0)=f(0,1,0)=3+5x_0^{\,2}-x_0v_0-y_0=2.000$$

$$m_2=f\left(x_i+\frac{1}{2}h,y_i+\frac{1}{2}hv_i,v_i+\frac{1}{2}hm_1\right)=f(0.05,1,0.1)=2.008$$

$$m_3=f\left(x_i+\frac{1}{2}h,y_i+\frac{1}{2}hv_i+\frac{1}{4}h^2m_1,v_i+\frac{1}{2}hm_2\right)=f(0.05,1.005,1.004)=2.002$$

$$m_4=f\left(x_i+h,y_i+hv_i+\frac{1}{2}h^2m_3,v_i+hm_3\right)=f(0.1,1.01,0.2002)=2.01998$$

$$y_{i+1} = y_i + hv_i + \frac{1}{6}(m_1 + m_2 + m_3)h^2$$

$$\Rightarrow y_1 = y_0 + hv_0 + \frac{1}{6}(m_1 + m_2 + m_3)h^2 = 1.0100$$

$$v_{i+1} = v_i + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)h$$

$$\Rightarrow v_1 = v_0 + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)h = 0.2007$$

ثانيا : بوضع $i=1$ فإن $h=0.1$ ، $v_1=0.2007$ ، $y_1=1.01$ ، $x_1=0.1$

$$m_1=f\left(x_1,y_1,v_1\right)=2.020$$

$$m_2=f\left(x_i+\frac{1}{2}h,y_i+\frac{1}{2}hv_i,v_i+\frac{1}{2}hm_1\right)=2.047$$

$$m_3=f\left(x_i+\frac{1}{2}h,y_i+\frac{1}{2}v_ih+\frac{1}{4}h^2m_2,v_i+\frac{1}{2}hm_2\right)=2.042$$

$$m_4=f\left(x_i+h,y_i+v_ih+\frac{1}{2}h^2m_3,v_i+hm_3\right)=2.079$$

$$y_{i+1} = y_i + hv_i + \frac{1}{6}(m_1 + m_2 + m_3)h^2$$

$$\Rightarrow y_2 = y_2 + hv_1 + \frac{1}{6}(m_1 + m_2 + m_3)h^2 = 1.0403$$

$$v_{i+1} = v_i + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)h$$

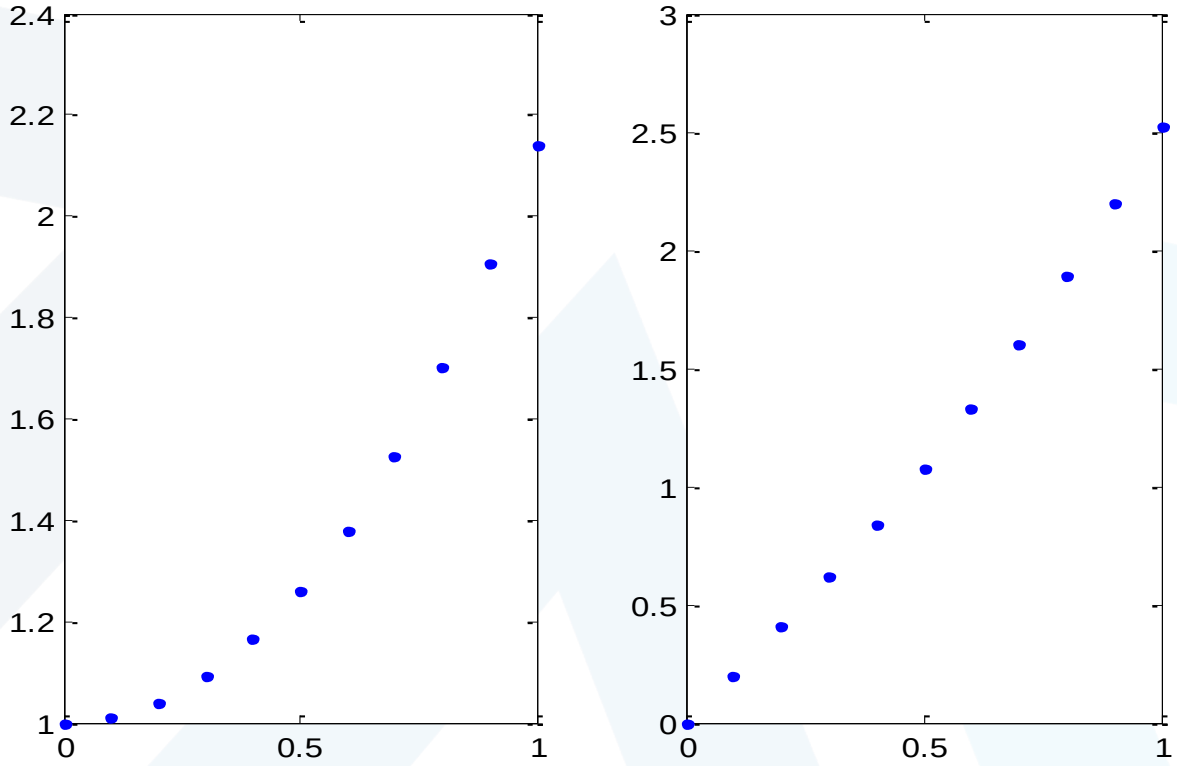
$$\Rightarrow v_2 = v_1 + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)h = 0.4053$$

وبتكرار ما سبق نحصل على

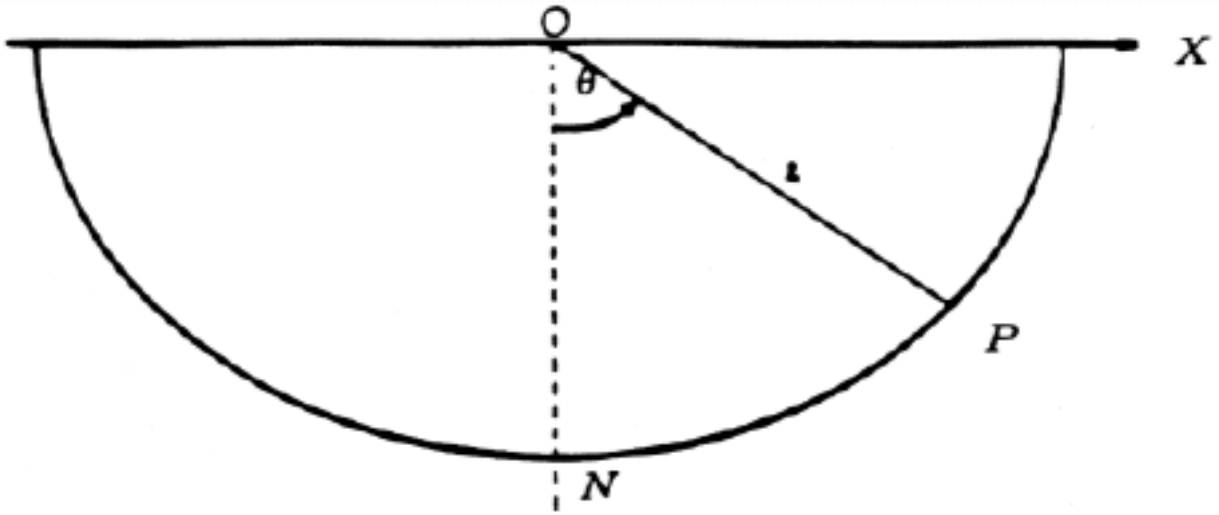
$$
\begin{aligned}
y_3 &= 1.0913, & v_3 &= 0.6176 \\
y_4 &= 1.1642, & v_4 &= 0.8410 \\
y_5 &= 1.2600, & v_5 &= 1.0783 \\
y_6 &= 1.3804, & v_6 &= 1.3318 \\
y_7 &= 1.5270, & v_7 &= 1.6028 \\
y_8 &= 1.7015, & v_8 &= 1.8921 \\
y_9 &= 1.9060, & v_9 &= 2.1996 \\
y_{10} &= 2.1420, & v_{10} &= 2.5246
\end{aligned}
$$

```
syms f x y v
h = input('step size=');
f = input('the function f(x,y,v)=');
X(1) = input('x0=');
Y(1) = input('y(x0)=');
V(1)= input('v(x0)=');
xf = input('xf=');
for i=1:(xf-X(1))/h
   y=Y(i);
   x=X(i);
   v=V(i);
   m1=subs(f);
   x=X(i)+0.5*h;
   y=Y(i)+0.5*h*V(i);
   v=V(i)+0.5*h*m1;
   m2=subs(f);
   x=X(i)+0.5*h;
   y=Y(i)+0.5*h*V(i)+0.25*h^2*m1;
   v=V(i)+0.5*h*m2;
   m3=subs(f);
   x=X(i)+h;
   y=Y(i)+h*V(i)+0.5*h^2*m2;
   v=V(i)+h*m3;
   m4=subs(f);
   Y(i+1)=Y(i)+h*V(i)+(1/6)*(m1+m2+m3)*h^2;
   V(i+1)=V(i)+(1/6)*(m1+2*m2+2*m3+m4)*h;
   X(i+1)=X(i)+h;
end
subplot(1,2,1)
plot (X,Y,'b.') % numerical solution
subplot(1,2,2)
plot (X,V,'b.') % numerical solution
```

**step size=0.1**
**the function f(x,y,v)=3+5*x^2-x*v-y**
**x0=0**
**y(x0)=1**
**v(x0)=0**
**xf=1**



## Example



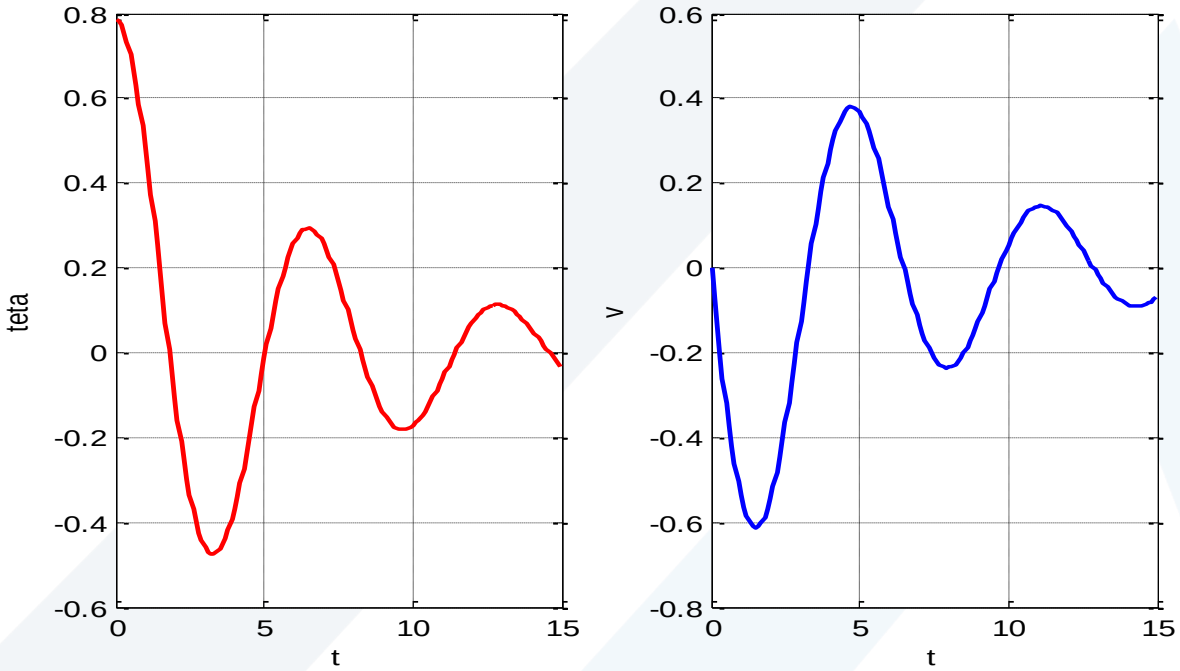

$$\theta'' + (0.3)\theta' + \sin\theta = 0, \quad \theta(0) = 45^0, \qquad \theta'(0) = 0$$

على اعتبار أن طول الخطوة مقداره $h = 0.1$ .

```
syms f g x y v
h=0.1;
f =v;
g=-0.3*v-sin(y);
X(1) = 0;
Y(1) = pi/4;
V(1)= 0;
xf = 15;
for i=1:(xf-X(1))/h
   x=X(i);
   y=Y(i);
   v=V(i);
   k1=subs(f);
   m1=subs(g);

   x=X(i)+0.5*h;
   y=Y(i)+0.5*h*k1;
   v=V(i)+0.5*h*m1;
   k2=subs(f);
   m2=subs(g);

   x=X(i)+0.5*h;
   y=Y(i)+0.5*h*k2;
   v=V(i)+0.5*h*m2;
   k3=subs(f);
   m3=subs(g);

   x=X(i)+h;
   y=Y(i)+h*k3;
   v=V(i)+h*m3;
   k4=subs(f);
   m4=subs(g);

   Y(i+1)=Y(i)+(1/6)*(k1+2*k2+2*k3+k4)*h;
   V(i+1)=V(i)+(1/6)*(m1+2*m2+2*m3+m4)*h;
   X(i+1)=X(i)+h;
end
subplot(1,2,1)
plot(X,Y,'r','LineWidth',2)
xlabel('t')
ylabel('teta')
grid
subplot(1,2,2)
plot(X,V,'b','LineWidth',2)
xlabel('t')
ylabel('v')
grid
```

نقوم بتحويل المعادلة إلى مجموعة من معادلات الدرجة الأولى على النحو التالي

$$\theta' = v\,, \qquad \theta(0) = \mathrm{pi}/4$$
$$v' = -0.3v - \sin\theta, \qquad v(0) = 0$$



انتهت المحاضرة