التحليل الرياضي ١

المحاضرة 8 ميكاترونيكس

نظري

Prepared by
Dr. Sami INJROU

تكامل التوابع المثلثية

1 جداء قوى لـ cos و sin

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx,$$

الحالة الأولى إذا كان m عدد فردي، نكتبه بالشكل $2k+1$ ونستخدم المتطابقة $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$$\sin^m x = \sin^{2k+1} x = (\sin^2 x)^k \sin x = (1 - \cos^2 x)^k \sin x.$$

الحالة الثانية إذا كان n عدد فردي، نكتبه بالشكل $2k+1$ ونستخدم المتطابقة $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$\cos^n x = \cos^{2k+1} x = (\cos^2 x)^k \cos x = (1 - \sin^2 x)^k \cos x.$$

الحالة الثالثة إذا كان n و m عددين زوجيين، نعوض:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

مثال أحسب التكامل الآتي

$$\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx.$$

الحل

m=3 فردي

$$\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x \, dx$$

$u = \cos x$

$$= \int (1 - \cos^2 x)(\cos^2 x)(-d(\cos x)) = \int (1 - u^2)(u^2)(-du)$$

$$= \int (u^4 - u^2)\, du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C = \frac{\cos^5 x}{5} - \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

مثال أحسب التكامل الآتي

$$\int \cos^5 x \, dx.$$

الحل

n=5 فردي

$$\int \cos^5 x \, dx = \int \cos^4 x \cos x \, dx = \int (1 - \sin^2 x)^2 \, d(\sin x)$$

$u = \sin x$

$$= \int (1 - u^2)^2\, du = \int (1 - 2u^2 + u^4)\, du = u - \frac{2}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 + C = \sin x - \frac{2}{3}\sin^3 x + \frac{1}{5}\sin^5 x + C$$

مثال أحسب التكامل الآتي

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx.$$

الحل

m=2, n=4 زوجيين

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1 - \cos 2x)(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx = \frac{1}{8}\int (1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[x + \frac{1}{2}\sin 2x - \int (\cos^2 2x + \cos^3 2x)\, dx\right]$$

$$\int (\cos^2 2x + \cos^3 2x)\,dx$$

$$\int \cos^2 2x\,dx = \frac{1}{2}\int (1 + \cos 4x)\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right)$$

$$\int \cos^3 2x\,dx = \int (1 - \sin^2 2x)\cos 2x\,dx$$

$$u = \sin 2x$$

$$= \frac{1}{2}\int (1 - u^2)\,du = \frac{1}{2}\left(\sin 2x - \frac{1}{3}\sin^3 2x\right).$$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx = \frac{1}{16}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{3}\sin^3 2x\right) + C.$$

2 جداء لـ cos و sin

$$\int \sin mx \sin nx\, dx, \qquad \int \sin mx \cos nx\, dx, \int \cos mx \cos nx\, dx$$

نستخدم المتطابقات الآتية

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\left[\cos (m-n)x - \cos (m+n)x\right],$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\sin (m-n)x + \sin (m+n)x\right],$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos (m-n)x + \cos (m+n)x\right].$$

مثال أحسب التكامل الآتي $\int \sin 3x \cos 5x \, dx.$

الحل

$m = 3 \quad n = 5$

$$\int \sin 3x \cos 5x \, dx = \frac{1}{2}\int [\sin(-2x) + \sin 8x] \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (\sin 8x - \sin 2x) \, dx$$

$$= -\frac{\cos 8x}{16} + \frac{\cos 2x}{4} + C.$$

تكامل التوابع الكسرية

تفريق الكسور

إذا كان لدينا الكسر الآتي

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$$

الحالة ١

إذا كانت درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام

$$\deg(P(x))\geq\deg(Q(x)) \xrightarrow{\text{بالقسمة المطولة}} f(x)=R(x)+\frac{K(x)}{H(x)}$$

$$\deg(H(x))>\deg(K(x))$$

مثال أوجد قيمة التكامل الآتي $\int \frac{x}{x+2}dx$

الحل

$$\frac{x}{x+2}=\frac{x+2-2}{x+2}=1+\frac{-2}{x+2}$$

$$\int \frac{x}{x+2}dx=\int dx-2\int \frac{dx}{x+2}=x-2\ln|x+2|+C$$

مثال أوجد قيمة التكامل الآتي $\int \frac{x^3+x}{x-1}dx$

الحل

$$\frac{x^3+x}{x-1}=x^2+x+2+\frac{2}{x-1}$$

$$\int \frac{x^3+x}{x-1}dx=\int\left(x^2+x+2+\frac{2}{x-1}\right)dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+2\ln|x-1|+C$$

مثال أوجد قيمة التكامل الآتي $\int \frac{x^3+2x+1}{x+1}dx$

الحل

$$\int \frac{x^3+2x+1}{x+1}dx = \int\left(x^2-x+3+\frac{-2}{x+1}\right)dx = \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+3x-2\ln|x+1|+C$$

الحالة ٢

إذا كانت درجة البسط أصغر من درجة المقام نحلل الكسر إلى مجموع كسور جزئية من الشكل:

$$\frac{A}{(ax+b)^n} \quad \text{or} \quad \frac{Bx+C}{(ax^2+bx+c)^n}$$

نميز حالتين:

الحالة ٢-١

إذا أمكن تحليل المقام إلى جداء أقواس من الشكل

$$Q(x)=(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_m)$$

فإن الكسر يكتب بالشكل

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+\cdots+\frac{A_m}{x-x_m}$$

يتم حساب الأمثال $A_1, A_2, \dots, A_m$ بالعلاقة:

$$A_1=\lim_{x\to x_1}(x-x_1)\frac{P(x)}{Q(x)},\ A_2=\lim_{x\to x_2}(x-x_2)\frac{P(x)}{Q(x)},\dots,A_m=\lim_{x\to x_m}(x-x_m)\frac{P(x)}{Q(x)}$$

الحالة ٢-٢

إذا أمكن تحليل المقام إلى جداء أقواس من الشكل

$$Q(x)=(x-x_1)^{r_1}(x-x_2)^{r_2}\dots(x-x_m)^{r_m}$$

فإن الكسر يكتب بالشكل

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\cdots+\frac{A_{r_1}}{(x-x_1)^{r_1}}$$

$$+\frac{B_1}{x-x_2}+\frac{B_2}{(x-x_2)^2}+\cdots+\frac{B_{r_2}}{(x-x_2)^{r_2}}$$

$$+\cdots+\frac{C_1}{x-x_m}+\frac{C_2}{(x-x_m)^2}+\cdots+\frac{C_{r_m}}{(x-x_m)^{r_m}}$$

تحسب الأمثال بالخطوات الآتية:

١- توحيد المقامات في الطرف الأيمن،

٢- المطابقة بين البسطين على طرفي المساواة،

٣- نطابق بين أمثال قوى x من الطرفين لنحصل بعدها على جملة من المعادلات الجبرية الخطية،

٤- بحلها نحصل على الأمثال المطلوبة.

مثال أوجد قيمة التكامل الآتي $\int \frac{1}{x(x-1)}dx$

الحل

نقوم أولاً بتفريق الكسر

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$$

$$A = \lim_{x\to 0} x\,\frac{1}{x(x-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{(x-1)} = -1 \qquad B = \lim_{x\to 1}(x-1)\frac{1}{x(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x} = 1$$

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1} \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{1}{x(x-1)}dx = \int\left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1}\right)dx = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C$$

مثال أوجد قيمة التكامل الآتي $\int \frac{x+1}{(x+2)(x-1)}dx$

الحل

نقوم أولاً بتفريق الكسر

$$\frac{x+1}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$$

$$A = \lim_{x\to -2}(x+2)\frac{x+1}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x\to -2}\frac{x+1}{(x-1)} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

$$B = \lim_{x\to 1}(x-1)\frac{x+1}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{(x+2)} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{x+1}{(x+2)(x-1)} = \frac{1/3}{x+2} + \frac{2/3}{x-1} \Rightarrow \int \frac{x+1}{(x+2)(x-1)}dx = \int\left(\frac{1/3}{x+2} + \frac{2/3}{x-1}\right)dx = \frac{1}{3}\ln|x+2| + \frac{2}{3}\ln|x-1| + C$$

مثال أوجد قيمة التكامل الآتي $\int \frac{x}{(x+1)^2}dx$

الحل

$$\frac{x}{(x+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{(x+1)^2}=\frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2}$$

$$A(x+1)+B\equiv x$$

$$Ax+(A+B)\equiv x \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} x^0 : A+B=0 \\ x^1 : A=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A=1 \\ B=-1 \end{array}$$

$$\frac{x}{(x+1)^2}=\frac{1}{x+1}+\frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$\int \frac{x}{(x+1)^2}dx=\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{-1}{(x+1)^2}\right)dx=\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+C$$

مثال أوجد قيمة التكامل الآتي $\int \frac{1}{x^2(x+1)}dx$

الحل

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} \Rightarrow \frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2}{x^2(x+1)}$$

$$Ax(x+1)+B(x+1)+Cx^2 \equiv 1$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^0 : B = 1 \\ x^1 : A + B = 0 \\ x^2 : A + C = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = -1 \\ B = 1 \\ C = 1 \end{array}$$

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1}$$

$$\int \frac{1}{x^2(x+1)}dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1} \right) dx = \ln\left|\frac{x+1}{x}\right| - \frac{1}{x} + C$$

مثال أوجد قيمة التكامل الآتي $\int_1^2 \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}dx$

الحل

$$x^3+2x^2+x = x(x^2+2x+1) = x(x+1)^2$$

$$\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x} = \frac{5x^2+20x+6}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2} \Rightarrow \frac{5x^2+20x+6}{x(x+1)^2} = \frac{A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx}{x(x+1)^2}$$

$$A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx \equiv 5x^2+20x+6$$

$$(A+B)x^2+(2A+B+C)x+A \equiv 5x^2+20x+6$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^0 : A=6 \\ x^1 : 2A+B+C=20 \\ x^2 : A+B=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A=6 \\ B=-1 \\ C=9 \end{array}$$

$$\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x} = \frac{6}{x}+\frac{-1}{x+1}+\frac{9}{(x+1)^2}$$

$$\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}=\frac{6}{x}+\frac{-1}{x+1}+\frac{9}{(x+1)^2}$$

$$\int_1^2 \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}dx=\int_1^2\left(\frac{6}{x}+\frac{-1}{x+1}+\frac{9}{(x+1)^2}\right)dx=\left[6\ln x-\ln(x+1)-\frac{9}{x+1}\right]_1^2$$

$$=\left[6\ln 2-\ln 3-\frac{9}{3}\right]-\left[6\ln 1-\ln(2)-\frac{9}{2}\right]$$

$$=7\ln 2-\ln 3+\frac{3}{2}$$

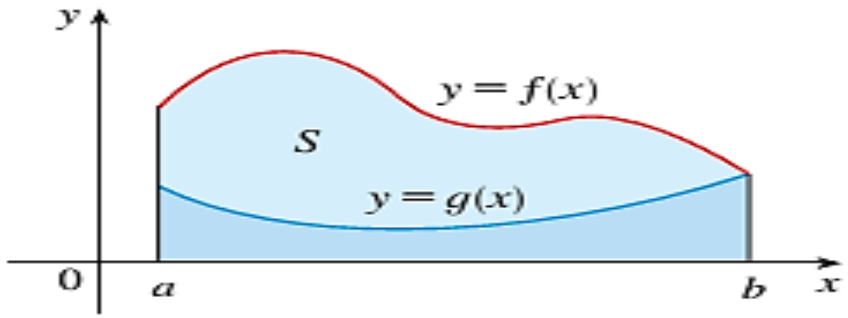
تطبيقات التكامل

المساحة المحصورة بين منحنيي تابعين

المساحة المحصورة بين التابعين f, g المستمران على المجال $[a, b]$ وليكن أيضاً $f(x) \geq g(x)$

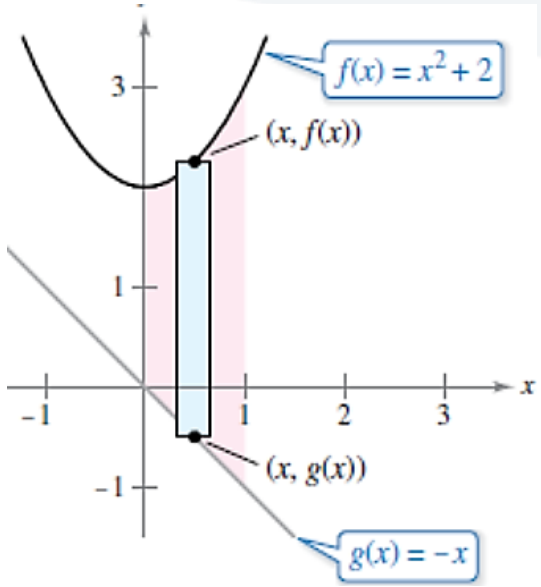
وذلك من أجل كل $x \in [a, b]$ وبالتالي المساحة المحصورة بين بياني التابعين f, g والمستقيمين

$x = a, x = b$ تعطى بالعلاقة:



$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

مثال أوجد المساحة المحصورة بين منحني التابعين $y = x^2 + 2$ و $y = -x$ والمستقيمين ; $x = 0$ $x = 1$



الحل

لدينا $f(x) = x^2 + 2$ و $g(x) = -x$ لدينا $f(x) \geq g(x)$ على المجال $[0,1]$

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_0^1 [(x^2 + 2) - (-x)]\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{17}{6}.$$

مثال أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين بياني التابعين $f(x)=2-x^2$ و $g(x)=x$

الحل

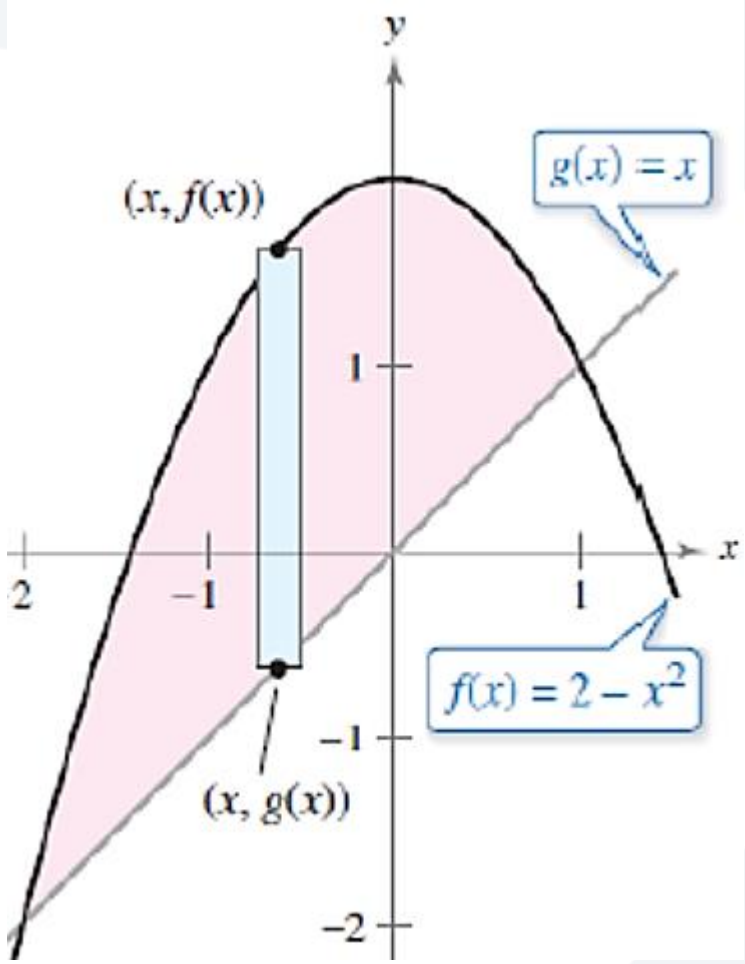
علينا أولاً إيجاد نقاط التقاطع بين التابعين

$$2-x^2=x$$
$$-x^2-x+2=0$$
$$-(x+2)(x-1)=0$$
$$x=-2 \text{ or } 1$$

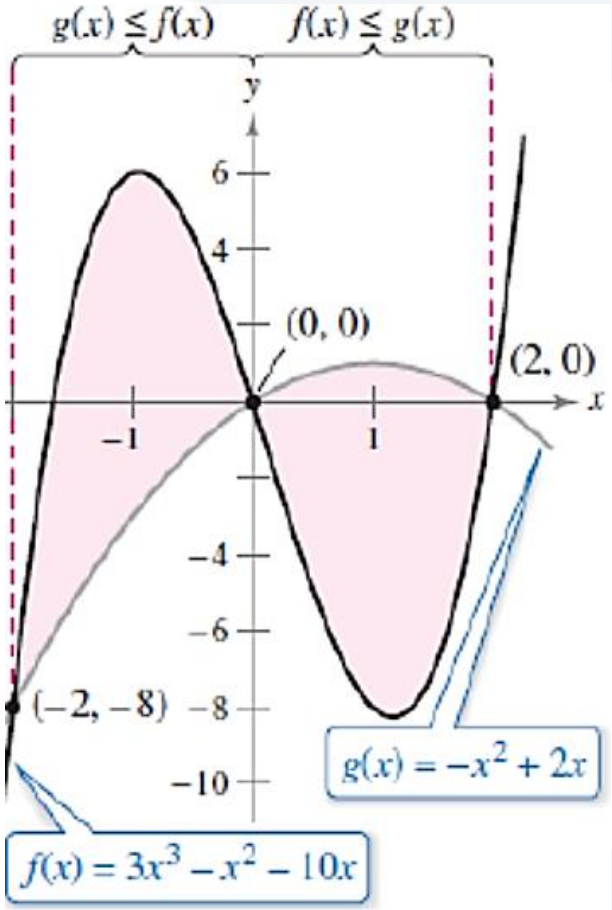
إذن $a=-2$ و $b=1$.

بما أن $g(x)\le f(x)$ من أجل كل x ضمن المجال $[-2,1]$،

$$A=\int_{-2}^{1}[(2-x^2)-(x)]dx=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1}=\frac{9}{2}$$



مثال أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين $f(x)=3x^3-x^2-10x$ و $g(x)=-x^2+2x$



الحل

علينا أولاً إيجاد نقاط التقاطع بين التابعين

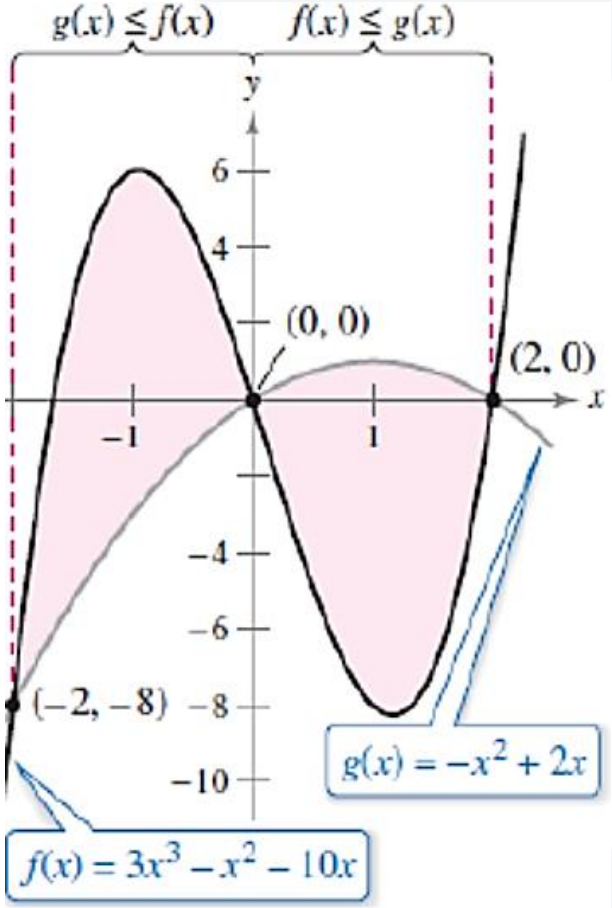
$$3x^3 - x^2 - 10x = -x^2 + 2x$$

$$3x^3 - 12x = 0$$

$$3x(x-2)(x+2) = 0$$

$$x = -2, 0, 2$$

بالتالي يتقاطع المنحنيان عند $x = -2, 0, 2$. نلاحظ أن $g(x) \le f(x)$ على المجال $[-2, 0]$، بينما $f(x) \le g(x)$ على المجال $[0, 2]$. بالتالي نحتاج إلى حساب تكاملين الأول على المجال $[-2, 0]$ والآخر على المجال $[0, 2]$.



$$A = \int_{-2}^{0} [f(x) - g(x)]\,dx + \int_{0}^{2} [g(x) - f(x)]\,dx$$

$$= \int_{-2}^{0} (3x^3 - 12x)\,dx + \int_{0}^{2} (-3x^3 + 12x)\,dx \quad = 24$$