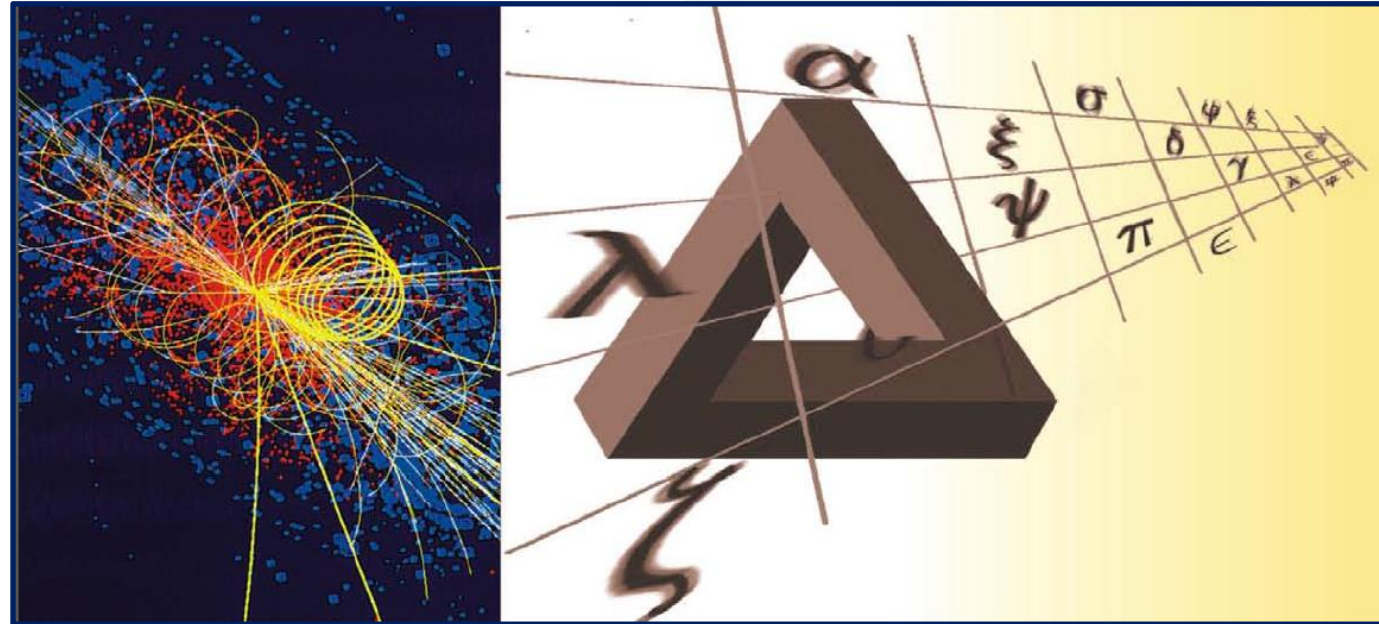


Numerical Differentiation/Integration





Contents

Numerical Differentiation

Numerical Integration

Numerical Differentiation

الهدف الرئيسي من التفاضل العددي هو إيجاد قيم التفاضلات التي يصعب الحصول عليها بالطرق التحليلية

نفرض ان $y = f(x)$ دالة معطاة قيمها في جدول كما يلي:

x	x_0	x_1	x_2	\dots	x_n
$y = f(x)$	$y_0 = f(x_0)$	f_1	f_2	\dots	f_n

الفكرة هنا هي أنه إذا كان عدد نقاط البيانات هو n فإنه يمكننا إيجاد دالة من الدرجة $n-1$ تستوفي هذه البيانات،

وهذه الدالة يمكن أن تكون على الصورة: $P(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0$

ثم نقوم بتفاضل المعادلة لتمثل تفاضل مجموعة النقاط المعطاة.

Example

جد القيمة التقريبية لـ $f'(0.12)$ باستخدام النقاط المبينة في الجدول التالي:

x	0.05	0.10	0.20	0.26
$f(x)$	0.05	0.0999	0.1987	0.2571

$$\begin{aligned}
 f(x) &\approx P_3(x) = 0.05 \frac{(x - 0.10)(x - 0.20)(x - 0.26)}{(0.05 - 0.10)(0.05 - 0.20)(0.05 - 0.26)} \\
 &+ 0.0999 \frac{(x - 0.05)(x - 0.20)(x - 0.26)}{(0.10 - 0.05)(0.10 - 0.20)(0.10 - 0.26)} + 0.1987 \frac{(x - 0.05)(x - 0.10)(x - 0.26)}{(0.20 - 0.05)(0.20 - 0.10)(0.20 - 0.26)} \\
 &+ 0.2571 \frac{(x - 0.05)(x - 0.10)(x - 0.26)}{(0.26 - 0.05)(0.26 - 0.10)(0.26 - 0.20)} \\
 f(x) &= -0.119x^3 - 0.025x^2 + 1.004x \\
 f'(x) &= -0.357x^2 - 0.05x + 1.004 \\
 f'(0.12) &\simeq 0.993
 \end{aligned}$$

```
clc
clear
x = [0.05 0.1 0.20 0.26];
y = [0.05 0.0999 0.1987 0.2571];
N = length(x)-1;
l = 0;
for m = 1:N + 1
    P = 1;
    for k = 1:N + 1
        if k ~= m
            P = conv(P,[1 -x(k)])/(x(m)-x(k));
        end
    end
    l = l + y(m)*P;
end
F=polyder(l);
polyval(F,0.12)
```

0.9927

يوجد في ماتيابل دالة جاهزة البناء لحساب الفرق بين كل نقطتين متتاليتين على أى مجموعة بيانات مدخلة. هذه الدالة هي:

$$y=\text{diff}(x)$$

حيث تقوم هذه الدالة بحساب الفرق بين كل نقطتين متتاليتين فى المتجه x . كمثال على ذلك سنحسب الفروق بين مربعات الأرقام من ١ إلى ١٠ كما يلى:

$$x=(1:10).^2$$

$x =$

1 4 9 16 25 36 49 64 81 100

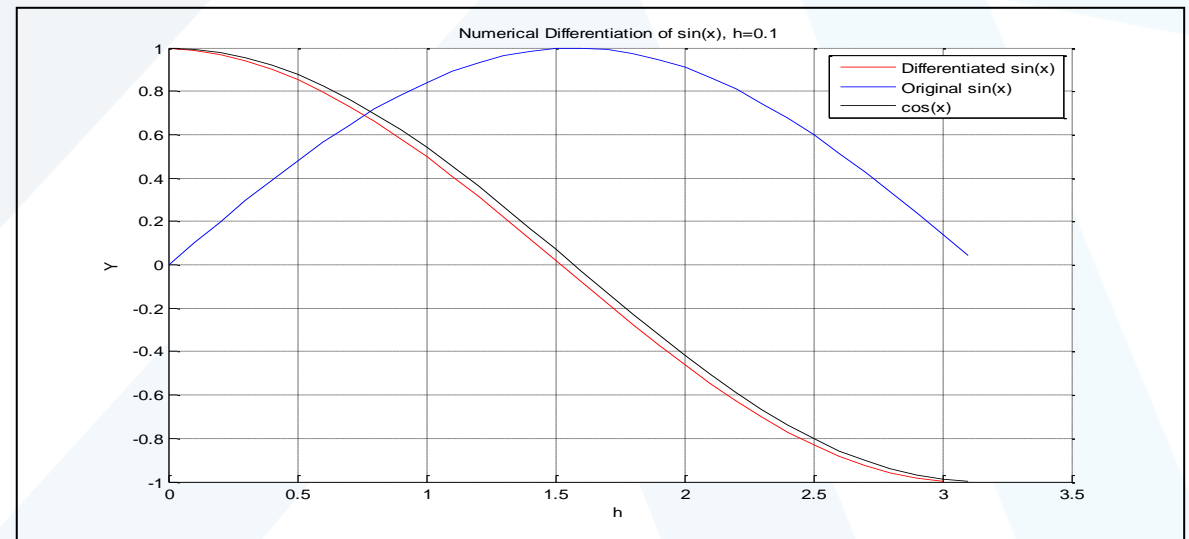
$$y=\text{diff}(x)$$

$y =$

3 5 7 9 11 13 15 17 19

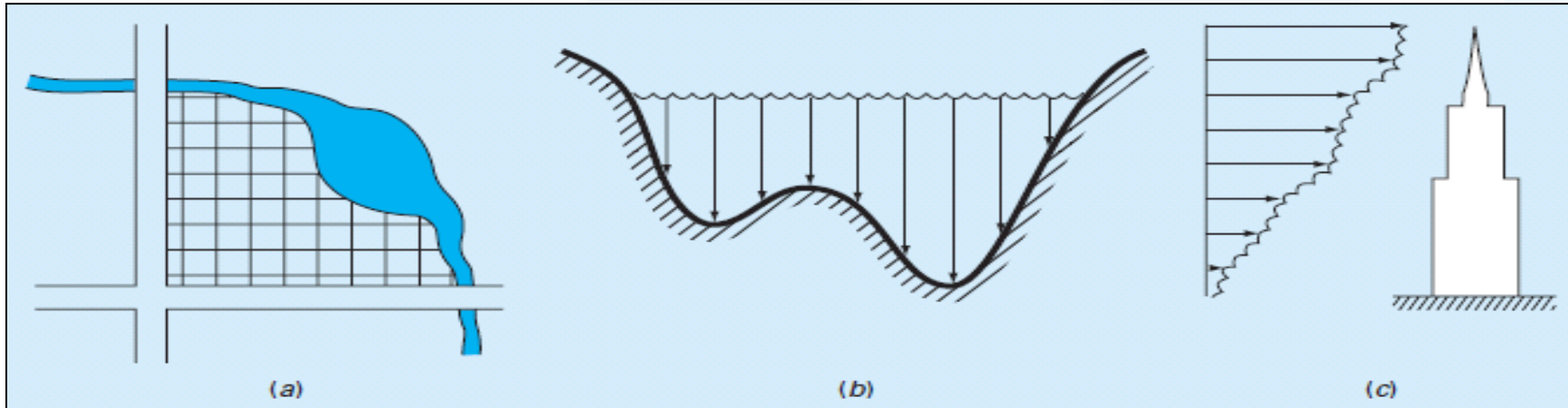
يمكن توضيح ذلك أكثر بمثال نقوم فيه بتفاضل الدالة $f(x)=\sin(x)$ عن طريق طريق تقسيم الدالة $f(x)$ إلى نقاط متساوية البعد بين كل منها هو $h=0.1$ ، ثم نجرى دالة الفرق ونقسم هذه الفروق على المسافة بين كل نقطتين (h) فنحصل على تفاضل الدالة $f(x)$ ، ثم نقارن التفاضل الرقمي الناتج مع التفاضل التحليلي للدالة $f(x)=\sin(x)$ وهو $\cos(x)$ عن طريق رسم كل منهما مع x

```
h = 0.1;
x = 0:h:pi;
m=length(x)-1;
y=diff(sin(x))/h;
y1=sin(x);
y2=cos(x);
hold on;
plot(x(1,1:m),y,'r');
plot(x,y1,'b');
plot(x,y2,'k');
grid
legend('Differentiated sin(x)', 'Original sin(x)', 'cos(x)')
hold off
```

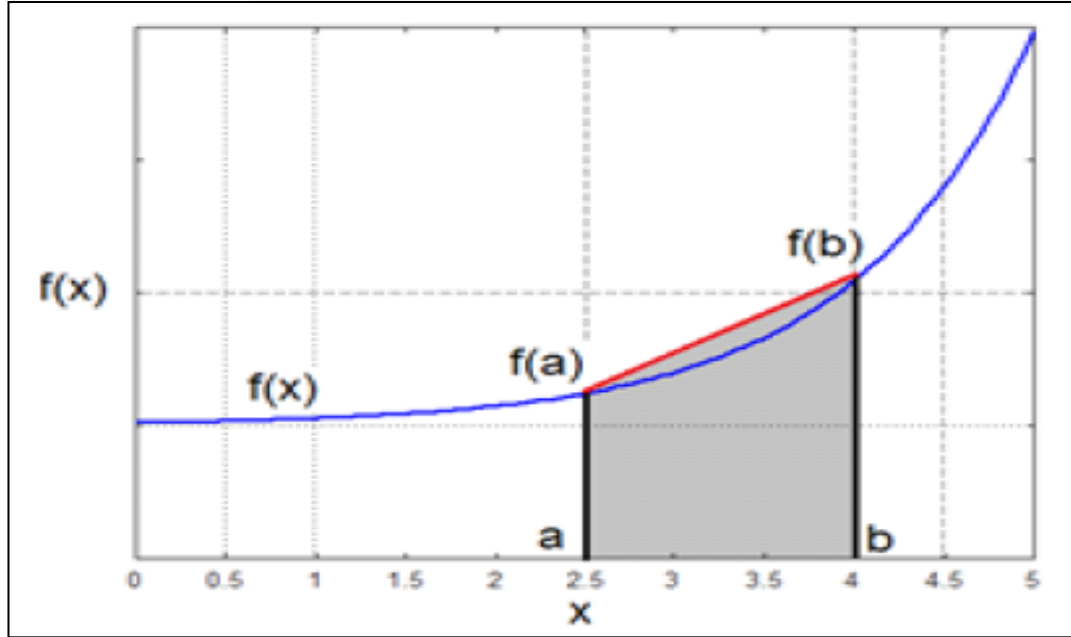


Numerical Integration

التكامل العددي هو الأكثر شيوعا والأكثر استخداما نتيجة استخدامه في الحياة العملية في الكثير من التطبيقات. يبين الشكل ثلاثة من هذه التطبيقات حيث في الشكل الأول يتم استخدام التكامل العددي لحساب مجموع القوى المؤثرة على ناطحة سحاب نتيجة الرياح المؤثرة عليها من قاعدتها حتى قمته حيث يكون تأثير هذه القوة أكبر ما يمكن عند قمة الناطحة. في الشكل الثاني يمكن استخدام التكامل العددي أيضا في حساب مساحة مقطع أحد الأشكال التي من الصعب حسابها باستخدام طرق التكامل التحليلية. في الشكل الثالث يمكن أيضا استخدام التكامل العددي في حساب مساحة قطعة أرض غير منتظمة الحدود كما في الشكل، وأيضا من الصعب جدا استخدام الطرق التحليلية في هذا التكامل. معنى ذلك أنه من المنطقي أن يكون استخدام التكامل العددي في التطبيقات التي يصعب فيها الحصول على تكامل تحليلي، مما يعني أن التكامل الذي سنحصل عليه بالطرق العددية سيكون تقريبي وستكون به نسبة خطأ تختلف من طريقة لأخرى.



طريقة شبه المنحرف trapezoid للتكامل

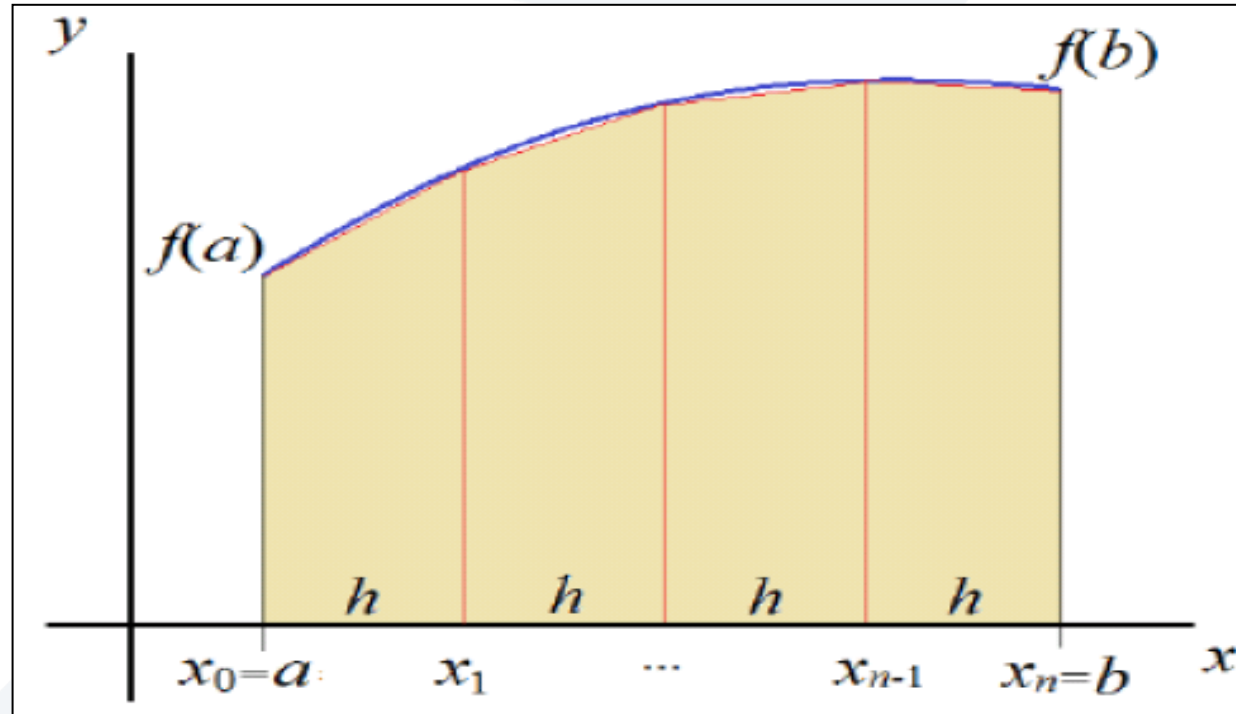


في هذه الطريقة يتم استيفاء الدالة $f(x)$ بين النقطتين a و b بخط مستقيم يمر بقيمتي الدالة عند هاتين النقطتين $f(a)$ و $f(b)$ كما هو موضح لذلك فإن الاستيفاء هنا يكون من الدرجة الأولى. هذا الخط المستقيم الناتج يكون شبه منحرف قاعدته هي $h=b-a$ وجانبيه هما $f(a)$ و $f(b)$ ولذلك يمكن كتابة مساحة شبه المنحرف الناتج حاصل ضرب القاعدة في متوسط الجانبين

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b - a) \left[\frac{f(b) + f(a)}{2} \right]$$

طريقة شبه المنحرف المركب composite trapezoid للتكامل

لزيادة دقة التكامل بطريقة شبه المنحرف يمكن تقسيم المدى $[a, b]$ إلى عدد n من المقاطع وحساب مساحة شبه المنحرف الممثل لكل مقطع.



المساحة في اول جزء هي :

$$A = h[f(x_0) + f(x_1)]/2$$

سيكون التكامل مساوياً لمجموع المناطق في trapezoidal areas :

$$I = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] + \cdots + \frac{h}{2}[f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})] \\ + \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

So,

$$I = h \left\{ \frac{1}{2}[f(x_0) + f(x_n)] + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-2}) + f(x_{n-1}) \right\}$$

or

$$I = h \left\{ \frac{1}{2}[f(x_a) + f(x_b)] + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-2}) + f(x_{n-1}) \right\}$$

والتي يمكن برمجتها في حلقة واحدة. نظرًا لأن حجم الخطوة ، h ، ثابت

Example

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx \quad \left(\text{analytical integration value is 1} \right)$$


اوجد قيمة التكامل :

```
f = inline('x*sin(x)');  
a = 0;  
b = pi/2;  
n = 5;  
h = (b-a)/n ;  
S = 0.5*(f(a)+f(b));  
for i = 1:n-1  
    S = S + f(a + i*h);  
end  
Intg = h * S;  
disp('The value of integral:')  
disp(Intg)
```

The value of integral:
1.0083

Example

الجدول التالي يبين العلاقة بين الزمن والسرعة لروبوت يتحرك بمسار مستقيم والمبين بالشكل:



الزمن [s]	0	0.2	0.4	0.6
السرعة [m/s]	0	0.35	0.45	0.48

احسب المسافة المقطوعة بعد 0.6 ثانية بدءاً من لحظة الانطلاق باستخدام طريقة شبه المنحرف المركب composite trapezoid في هذه الحالة ستكون المسافة هي تكامل السرعة في الفترة من 0 إلى 0.6 كما يلي:

$$distance = \int_0^{0.6} v dt$$

الحل العددي باستخدام قانون شبه المنحرف المركب حيث الفترة الزمنية من 0 إلى 0.6 مقسمة إلى ثلاث مقاطع

$$D = \frac{b-a}{n} \left\{ \frac{1}{2} [f(x_0) + f(x_n)] + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-2}) + f(x_{n-1}) \right\}$$

$$D = \frac{0.6-0}{3} \left(\frac{1}{2} f(0) + f(1) + f(2) + \frac{1}{2} f(3) \right)$$

$$D = 0.2 * \left(\frac{1}{2} 0 + 0.35 + 0.45 + \frac{1}{2} 0.48 \right) = 0.208[m]$$

يحتوي ماتلاب على دالتين جاهزتي البناء لحساب التكامل العددي باستخدام طريقة شبه المنحرف، والدالتان هما:

الدالة الأولى: $z = \text{trapz}(y)$

الدالة الثانية: $z = \text{trapz}(x, y)$

الدالة الأولى تحسب التكامل التقريبي للمتغير y باستخدام طريقة شبه المنحرف مع اعتبار التباعد بين النقطتين أو قاعدة شبه المنحرف h تساوي واحد، ويضع الناتج في z . إذا كانت h تختلف عن الواحد فإنه يتم ضربها في z .
الدالة الثانية تحسب التكامل التقريبي للمتغير y بالنسبة للمتغير x باستخدام طريقة شبه المنحرف. كل من x و y من الممكن أن يكونا متجهين بشرط أن يكون لهما نفس الطول

Example

احسب التكامل التالى مستخدما طريقة شبه المنحرف فى الماتلاب: $I = \int_0^{\pi} \sin(x) dx$
أولا الحل التحليلى لهذه الدالة هو:

$$I = \int_0^{\pi} \sin(x) dx = \cos(x)|_0^{\pi} = \cos(0) - \cos(\pi) = 2$$

ثانيا الحل باستخدام الدالة $z = \text{trapz}(y)$ سيكون كما يلى بعد تقسيم المدى من $x=0$ إلى $x=\pi$ إلى عدد اختيارى من المقاطع ولتكن مائة قسم:

```
X = 0:pi/100:pi;  
Y = sin(X);  
Z = pi/100*trapz(Y)  
Z =  
1.9998
```


حيث كما ذكرنا أن الدالة $\text{trapz}(y)$ تعتبر أن عرض المقطع يساوي 1 لذلك لزم الضرب في عرض المقطع وهو $\pi/100$.

ثالثا باستخدام الدالة $z=\text{trapz}(x,y)$ سيكون كما يلي:

```
X = 0:pi/100:pi;  
Y = sin(X);  
Z = trapz(X,Y)
```

```
Z =  
1.9998
```

انتهت المحاضرة