جَامعة المَنارة
MANARA UNIVERSITY

التحليل الرياضي ١

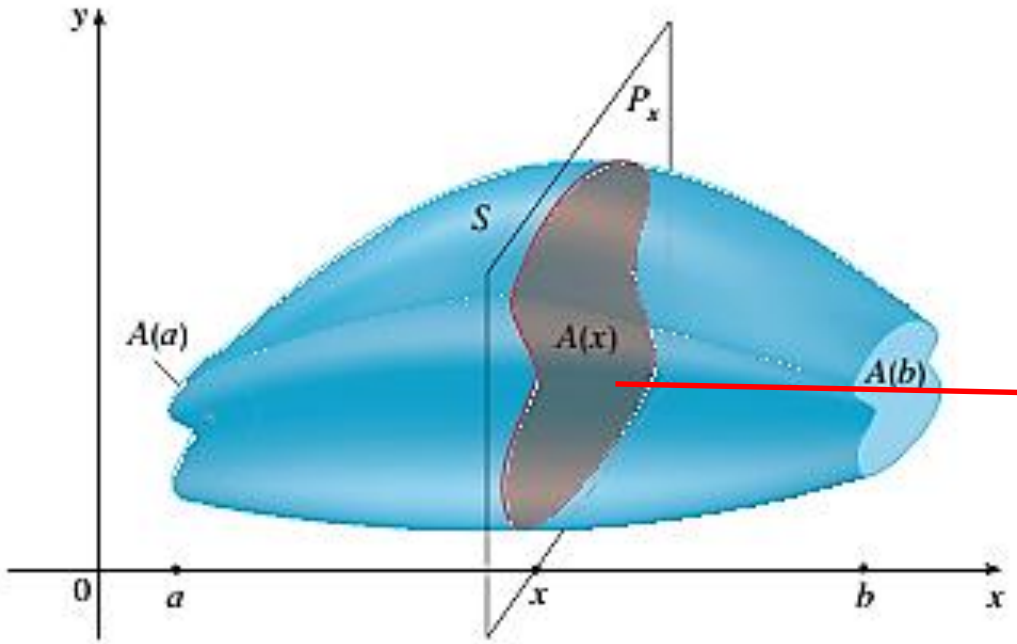
المحاضرة 9 ميكاترونيكس

نظري

Prepared by
Dr. Sami INJROU

حساب الحجوم

إذا عُلمت مساحة مقطع العرضي $A(x)$ لمجسم، فإن حجمه يعطى بالعلاقة:



مساحة المقطع العرضي

حساب حجم مجسم

1. رسم المجسم ومقطع عرضي له.
2. إيجاد صيغة لـ $A(x)$ مساحة المقطع العرضي.
3. إيجاد حدود التكامل.
4. إنجاز التكامل $V = \int_a^b A(x)dx$

حساب حجم مجسم دوراني

إذا كان الدوران حول المحور– x يكون المقطع العرضي قرص دائري نصف قطره $R(x)=f(x)$ ، بالتالي مساحته

$$A(x)=\pi[R(x)]^2=\pi[f(x)]^2$$

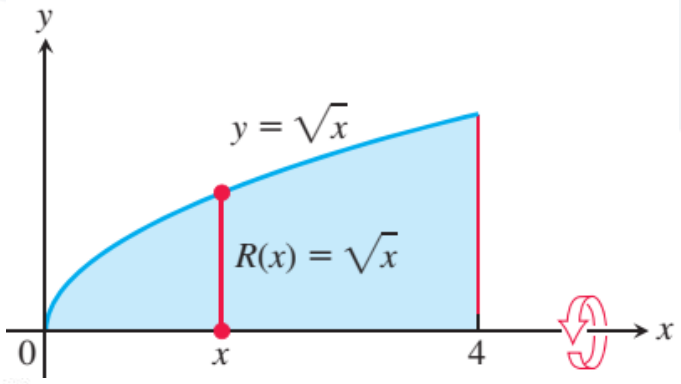
ويكون الحجم $$V=\int_a^b \pi f^2(x)dx$$

إذا كان الدوران حول المحور– y يكون المقطع العرضي قرص دائري نصف قطره $R(y)=g(y)$ ، بالتالي مساحته

$$A(y)=\pi[R(y)]^2=\pi[g(y)]^2$$

ويكون الحجم $$V=\int_c^d \pi g^2(y)dy$$

مثال أوجد حجم المجسم الناتج عن تدوير المنطقة المحدودة بالمنحني $y = \sqrt{x}, 0 \le x \le 4,$ والمحور $x -$ حول المحور $x -$

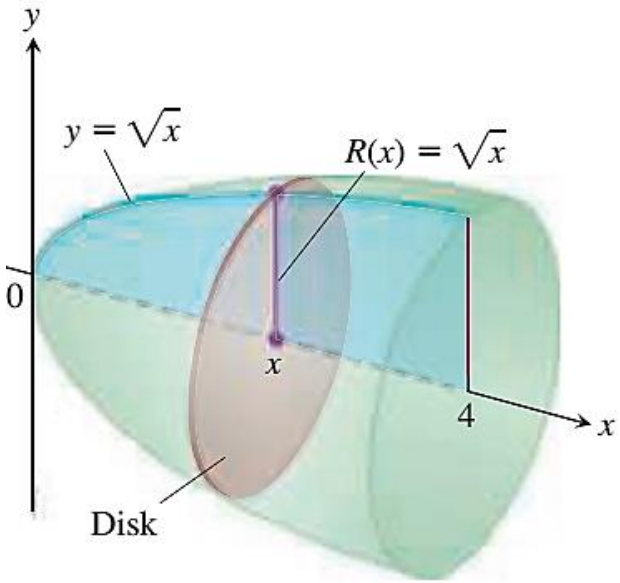


الحل

$$V = \int_a^b \pi [R(x)]^2 \, dx$$

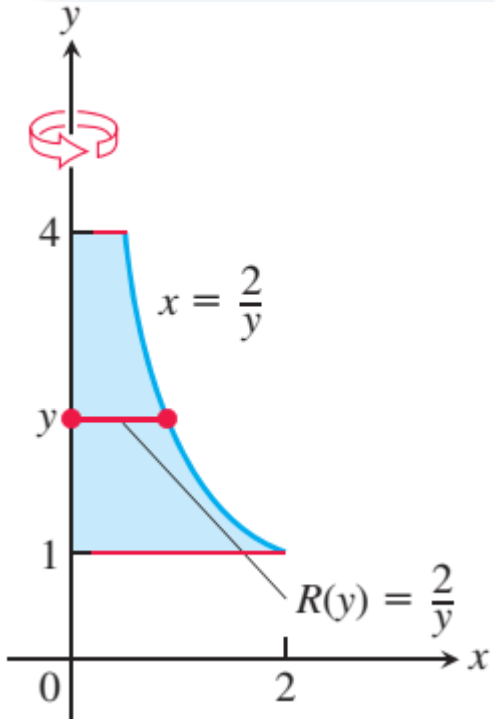
$$= \int_0^4 \pi [\sqrt{x}]^2 \, dx$$

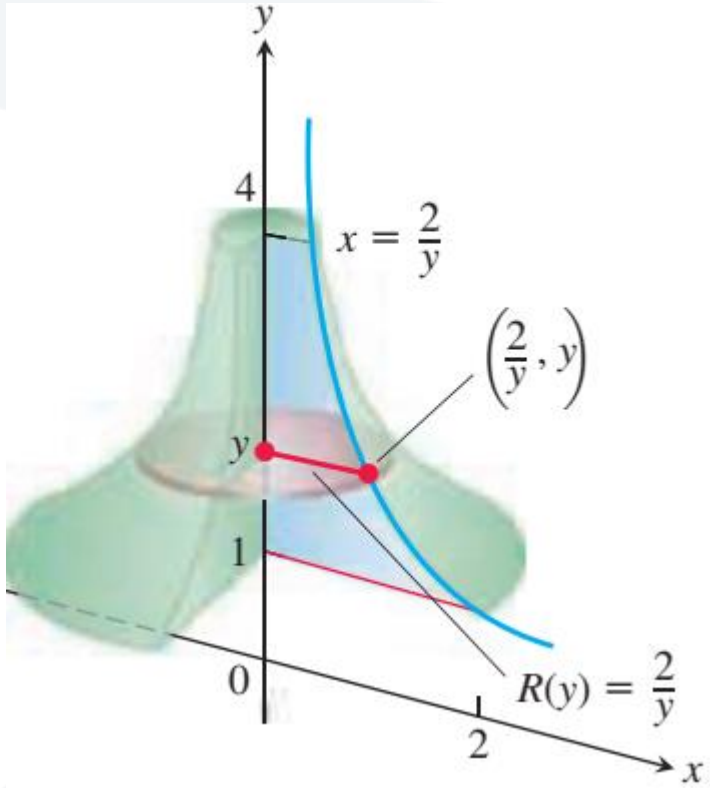
$$= \pi \int_0^4 x \, dx = \pi \frac{x^2}{2}\Big]_0^4 = \pi \frac{(4)^2}{2} = 8\pi.$$



مثال أوجد حجم المجسم الناتج عن تدوير المنطقة المحدودة بالمنحني $x = 2/y,\ 1 \le y \le 4$ والمحور – y حول المحور– y

الحل





$$V = \int_1^4 \pi [R(y)]^2\, dy$$

$$= \int_1^4 \pi \left(\frac{2}{y}\right)^2 dy$$

$$= \pi \int_1^4 \frac{4}{y^2}\, dy = 4\pi \left[-\frac{1}{y}\right]_1^4 = 4\pi \left[\frac{3}{4}\right] = 3\pi.$$

المقطع العرضي حلقة دائرية مساحتها

$$A=\pi\left[f^{2}(x)-g^{2}(x)\right]$$

- إذا كانت المنطقة المستوية G_1 محددة من الأعلى ومن الأسفل بمنحنيي التابعين $y=f(x)$ و $y=g(x)$ على الترتيب ، حيث أن $f(x)\geq g(x)$ من أجل كل x من المجال $[a,b]$، ومن اليسار بالمستقيم $x=a$ ، ومن اليمين بالمستقيم $x=b$ ، ومحور الدوران المحور $x-$ فإن حجم المنطقة G_1 يساوي:

$$V=\int_{a}^{b}\pi\left[f^{2}(x)-g^{2}(x)\right]dx$$

المقطع العرضي حلقة دائرية مساحتها

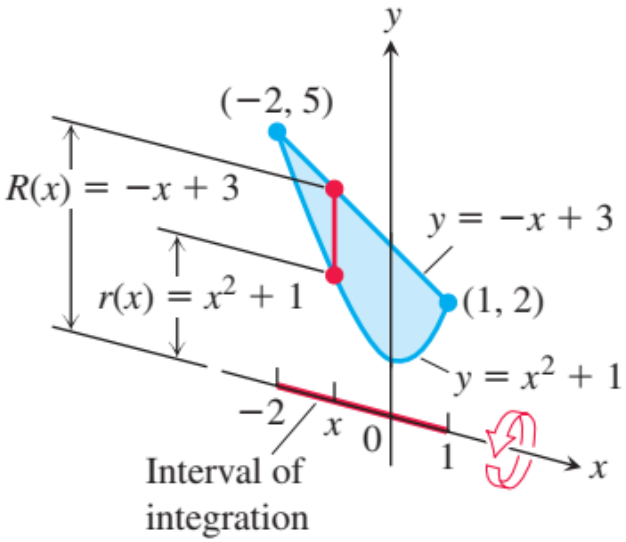
$$A=\pi\left[f^{2}(y)-g^{2}(y)\right]$$

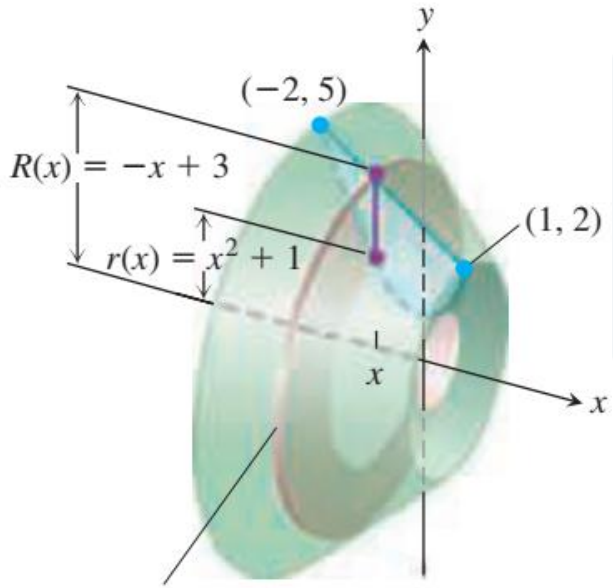
- وإذا كان محور الدوران هو محور $y-$ ، وكانت المنطقة G محددة من اليمين و من اليسار بمنحنيي التابعين $x=f(y)$ و $x=g(y)$ على الترتيب ، حيث أن $f(y)\geq g(y)$ من أجل كل y من المجال $[a,b]$، ومن الأسفل بالمستقيم $y=c$ ، ومن الأعلى بالمستقيم $y=d$ ، فإن حجم المنطقة G_1 يساوي:

$$V=\int_{c}^{d}\pi[f^{2}(y)-g^{2}(y)]dy$$

مثال أوجد حجم المجسم الناتج عن تدوير المنطقة المحدودة بالمنحني $y = x^2 + 1$ والمستقيم $y = -x + 3$ حول المحور x-

الحل





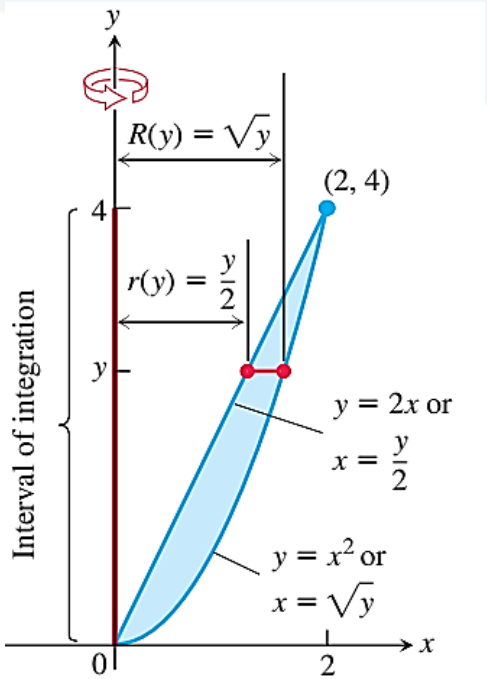
لإيجاد حدود التكامل ندرس تقاطع المنحني والمستقيم

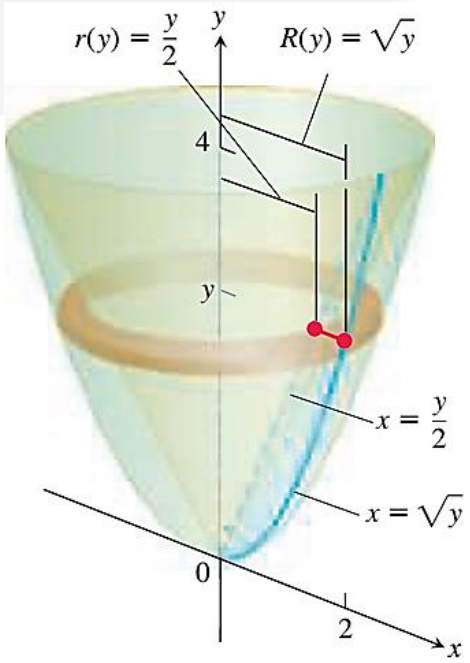
$$x^2 + 1 = -x + 3$$
$$x^2 + x - 2 = 0$$
$$(x + 2)(x - 1) = 0$$
$$x = -2, \quad x = 1$$

$$V = \int_a^b \pi\left([R(x)]^2 - [r(x)]^2\right) dx = \int_{-2}^{1} \pi\left((-x + 3)^2 - (x^2 + 1)^2\right) dx = \pi\int_{-2}^{1} (8 - 6x - x^2 - x^4)\, dx$$

$$= \pi\left[8x - 3x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{1} = \frac{117\pi}{5}$$

مثال أوجد حجم المجسم الناتج عن تدوير المنطقة المحدودة بالمنحني $y = x^2$ والمستقيم $y = 2x$ في الربع الأول حول المحور-y





الحل

يتقاطع القطع المكافئ مع المستقيم في النقطتين

$y = 0 \quad y = 4$

$$V = \int_c^d \pi\left([R(y)]^2 - [r(y)]^2\right) dy$$

$$= \int_0^4 \pi\left([\sqrt{y}]^2 - \left[\frac{y}{2}\right]^2\right) dy$$

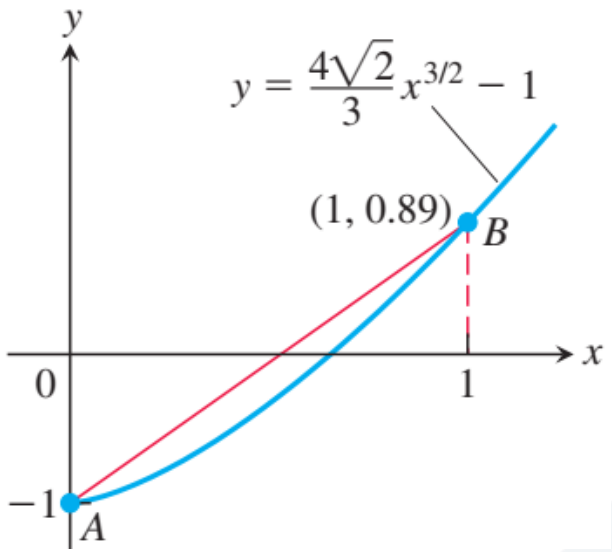
$$= \pi\int_0^4 \left(y - \frac{y^2}{4}\right) dy = \pi\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12}\right]_0^4 = \frac{8}{3}\pi$$

حساب طول قوس

إذا كان f' مستمر على المجال $[a, b]$ ، عندئذ يحسب طول قوس المنحني $y = f(x)$ من النقطة $A = (a, f(a))$ إلى النقطة $B = (b, f(b))$ بالعلاقة:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

مثال أوجد طول المنحني المبين بالشكل المرافق، والذي هو بيان التابع



الحل

$$y = \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - 1, \qquad 0 \le x \le 1.$$

$$a = 0, b = 1$$

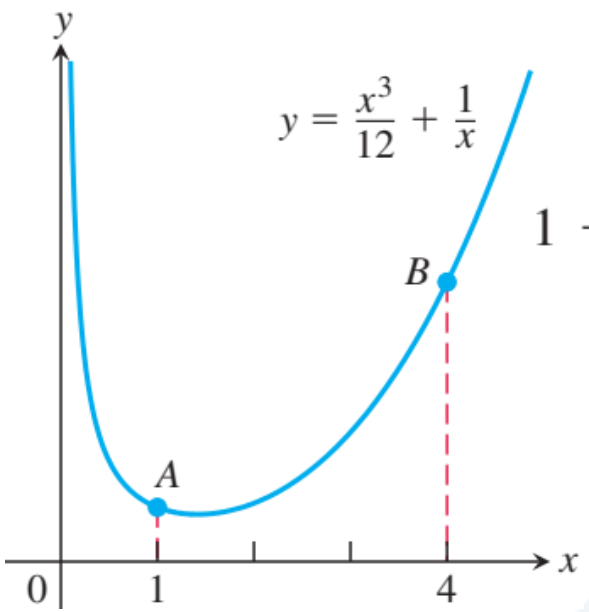
$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{1/2} = 2\sqrt{2}x^{1/2} \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(2\sqrt{2}x^{1/2}\right)^2 = 8x.$$

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 8x}\, dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8}(1 + 8x)^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{13}{6} \approx 2.17.$$

مثال أوجد طول منحني التابع

$$f(x) = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x}, \qquad 1 \le x \le 4$$

الحل



$$f'(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{x^2}$$

$$1 + [f'(x)]^2 = 1 + \left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{x^2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{x^4}{16} - \frac{1}{2} + \frac{1}{x^4}\right) = \frac{x^4}{16} + \frac{1}{2} + \frac{1}{x^4} = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2}\right)^2.$$

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx = \int_1^4 \left(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{12} - \frac{1}{x}\right]_1^4 = \left(\frac{64}{12} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{12} - 1\right) = \frac{72}{12} = 6$$

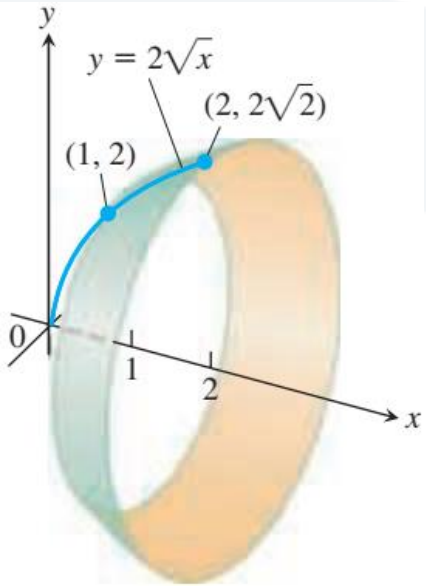
حساب مساحة سطح دوراني

- إذا كان $f(x) \geq 0$ مستمر وقابل للمفاضلة على المجال $[a, b]$ ، عندئذ تحسب مساحة سطح المجسم الناتج عن تدوير المنحني $y = f(x)$ حول المحور-x بالعلاقة

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

- إذا كان $x = g(y) \geq 0$ مستمر وقابل للمفاضلة على المجال $[c, d]$ ، عندئذ تحسب مساحة سطح المجسم الناتج عن تدوير المنحني $x = g(y)$ حول المحور-y بالعلاقة

$$S = \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_c^d 2\pi g(y) \sqrt{1 + (g'(y))^2}\, dy.$$



مثال أوجد مساحة سطح المجسم الناتج عن تدوير المنحني $y = 2\sqrt{x},\ 1 \le x \le 2$ حول المحور x-

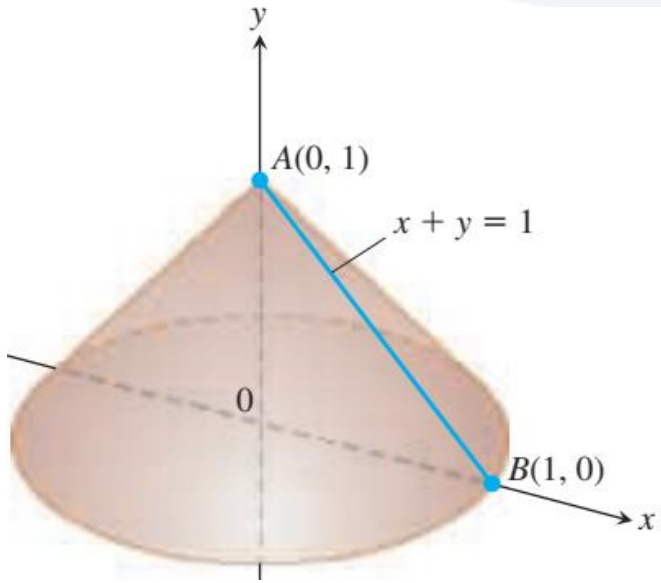
الحل

$$a = 1, \qquad b = 2, \qquad y = 2\sqrt{x}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{x+1}{x}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$$

$$S = \int_1^2 2\pi \cdot 2\sqrt{x}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\,dx = 4\pi\int_1^2 \sqrt{x+1}\,dx = 4\pi \cdot \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\Big]_1^2 = \frac{8\pi}{3}\left(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}\right).$$

مثال أوجد مساحة السطح الجانبي للمجسم الناتج عن تدوير القطعة المستقيمة $x = 1 - y, 0 \le y \le 1$ حول المحور y-



الحل

$$c = 0, \qquad d = 1, \qquad x = 1 - y, \qquad \frac{dx}{dy} = -1,$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \sqrt{1 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$S = \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = \int_0^1 2\pi(1 - y)\sqrt{2}\, dy$$

$$= 2\pi\sqrt{2}\left[y - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 2\pi\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \pi\sqrt{2}.$$

حساب العزوم ومركز الثقل

سلك رفيع ممدد على المحور — x

تحسب كتلة M وعزم حول المبدأ M_0 ومركز كتلة $\bar{x}$ سلك رفيع بالعلاقات الآتية:

$$M = \int_a^b \delta(x)\,dx, \qquad M_0 = \int_a^b x\,\delta(x)\,dx, \qquad \bar{x} = \frac{M_0}{M} = \frac{\int_a^b x\,\delta(x)\,dx}{\int_a^b \delta(x)\,dx}$$

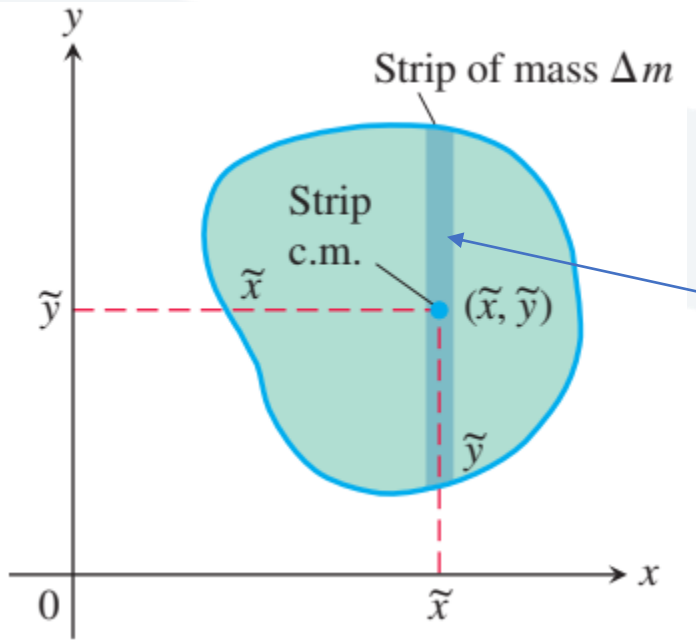
حيث $\delta(x)$ كثافة المادة.

مثال أوجد كتلة ومركز كتلة السلك الرفيع الممدد على المحور-x على المجال $[1, 2]$ الذي كثافته موزعة وفق التابع $\delta(x) = 2 + 3x^2$

الحل

$$M = \int_1^2 (2 + 3x^2)\,dx = \left[2x + x^3\right]_1^2 = (4 + 8) - (2 + 1) = 9, \quad \bar{x} = \frac{M_0}{M} = \frac{\int_1^2 x(2 + 3x^2)\,dx}{9} = \frac{\left[x^2 + \frac{3x^4}{4}\right]_1^2}{9} = \frac{19}{12}.$$

صفائح رقيقة مسطحة



حيث $(\tilde{x}, \tilde{y})$ احداثيات مركز كتلة الشريط النموذجي

$dm = \delta\, dA$ كتلة الشريط

dA مساحة الشريط

العزم حول المحور-x $\quad M_x = \int \tilde{y}\, dm$

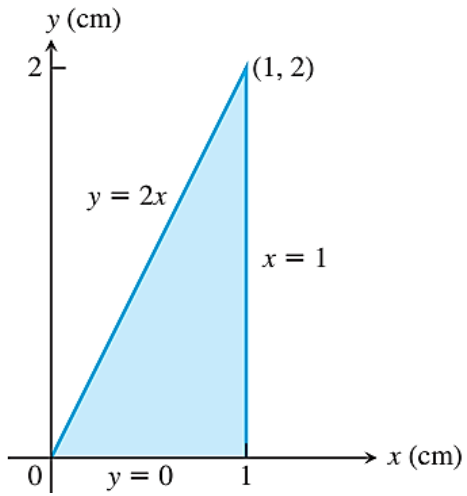
العزم حول المحور-y $\quad M_y = \int \tilde{x}\, dm$

الكتلة $\quad M = \int dm$

احداثيات مركز الكتلة $\quad \bar{x} = \dfrac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \dfrac{M_x}{M}$

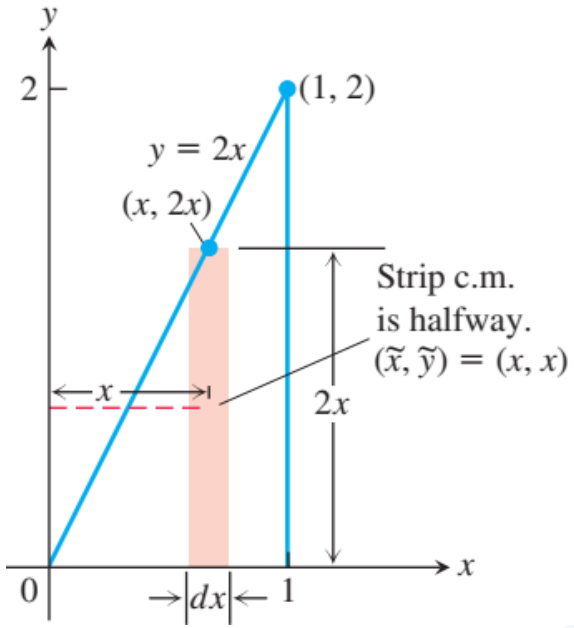
مثال بفرض أنه لدينا صفيحة مثلثية الشكل كثافتها ثابتة $\delta = 3\ \mathrm{g/cm^2}$

أوجد العزم M_y والكتلة M و الاحداثي -x لمركز الكتلة.



الحل

بأخذ شريط شاقولي كما في الشكل المرافق، لدينا:



مركز كتلة الشريط	$(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, x)$
طول الشريط	$2x$
عرض الشريط	dx
مساحة الشريط	$dA = 2x\,dx$
كتلة الشريط	$dm = \delta\, dA = 3 \cdot 2x\,dx = 6x\,dx$
المسافة عن المحور -y	$\tilde{x} = x$

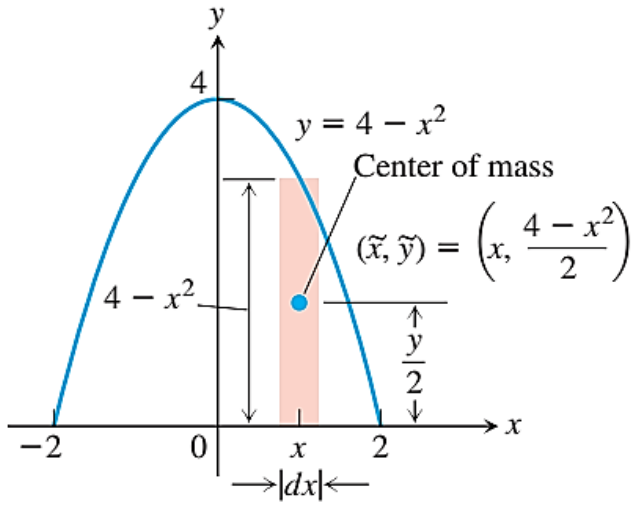
$$\tilde{x}\,dm = x \cdot 6x\,dx = 6x^2\,dx.$$

$$M_y = \int \tilde{x}\,dm = \int_0^1 6x^2\,dx = 2x^3\Big]_0^1 = 2\ \mathrm{g \cdot cm}.$$

$$M = \int dm = \int_0^1 6x\,dx = 3x^2\Big]_0^1 = 3 \text{ g}.$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2 \text{ g} \cdot \text{cm}}{3 \text{ g}} = \frac{2}{3} \text{ cm}.$$

مثال أوجد مركز كتلة صفيحة رقيقة تغطي المنطقة المحدودة من الأعلى بالقطع المكافئ $y = 4 - x^2$ ومن الأسفل بالمحور-x، مع العلم أن كثافة الصفيحة في النقطة (x, y) هي $\delta = 2x^2$.



الحل

بما أن الصفيحة متناظرة بالنسبة للمحور -y ، فإن $\bar{x} = 0$

لنأخذ شريط شاقولي

مركز كتلة الشريط $(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(x, \dfrac{4 - x^2}{2}\right)$

طول الشريط $4 - x^2$

عرض الشريط dx

مساحة الشريط $dA = (4 - x^2)\,dx$

كتلة الشريط $dm = \delta\,dA = \delta(4 - x^2)\,dx$

المسافة عن المحور -x $\tilde{y} = \dfrac{4 - x^2}{2}$

$$M_x = \int \tilde{y}\, dm = \int_{-2}^{2} \frac{\delta}{2}(4 - x^2)^2\, dx = \int_{-2}^{2} x^2(4 - x^2)^2\, dx = \int_{-2}^{2} (16x^2 - 8x^4 + x^6)\, dx = \frac{2048}{105}.$$

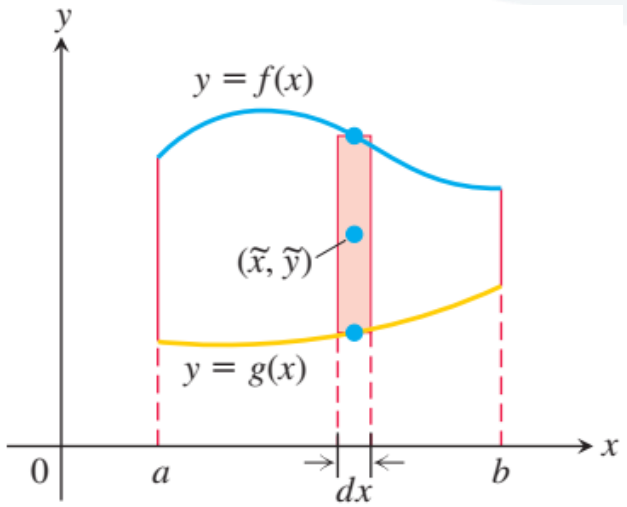
$$M = \int dm = \int_{-2}^{2} \delta(4 - x^2)\, dx = \int_{-2}^{2} 2x^2(4 - x^2)\, dx = \int_{-2}^{2} (8x^2 - 2x^4)\, dx = \frac{256}{15}.$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{2048}{105} \cdot \frac{15}{256} = \frac{8}{7}.$$

ومنه احداثيات مركز كتلة الصفيحة المعطاة $(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{8}{7}\right)$

صفائح محدودة بمنحنيين

بفرض أن الصفيحة تغطي منطقة محدودة بمنحنيين $y = f(x)$ و $y = g(x)$ ، حيث $f(x) \geq g(x)$ من اجل $a \leq x \leq b$ ،



بأخذ شريط شاقولي سيكون لدينا

مركز كتلة الشريط	$(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(x, \frac{1}{2}[f(x) + g(x)]\right)$
طول الشريط	$f(x) - g(x)$
عرض الشريط	dx
مساحة الشريط	$dA = [f(x) - g(x)]\, dx$
كتلة الشريط	$dm = \delta\, dA = \delta[f(x) - g(x)]\, dx.$

$$M_y = \int x\, dm = \int_a^b x\delta[f(x) - g(x)]\, dx,$$

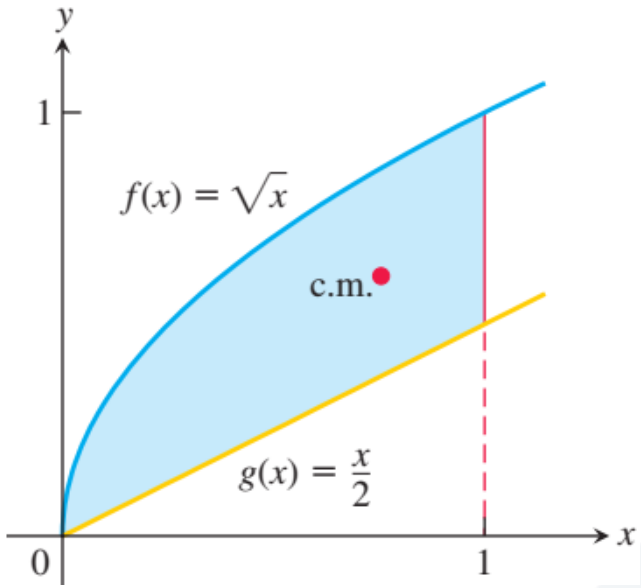
$$M_x = \int y\, dm = \int_a^b \frac{1}{2}[f(x) + g(x)] \cdot \delta[f(x) - g(x)]\, dx = \int_a^b \frac{\delta}{2}[f^2(x) - g^2(x)]\, dx.$$

بالتالي تكون احداثيات مركز الكتلة

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\int_a^b \delta x\,[\,f(x) - g(x)\,]\,dx \qquad \bar{y} = \frac{1}{M}\int_a^b \frac{\delta}{2}\,[\,f^2(x) - g^2(x)\,]\,dx$$

مثال أوجد مركز كتلة الصفيحة المحدودة بالمنحنيين $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x/2$ من أجل $0 \le x \le 1$ ، مع العلم أن تابع الكثافة $\delta(x) = x^2$

الحل



لدينا كتلة الشريط $dm = \delta[\,f(x) - g(x)\,]\,dx$

لنحسب كتلة الصفيحة

$$M = \int_0^1 x^2\left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right)dx = \int_0^1 \left(x^{5/2} - \frac{x^3}{2}\right)dx = \left[\frac{2}{7}x^{7/2} - \frac{1}{8}x^4\right]_0^1 = \frac{9}{56}.$$

$$\bar{x} = \frac{56}{9}\int_0^1 x^2 \cdot x\left(\sqrt{x} - \frac{x}{2}\right)dx = \frac{56}{9}\int_0^1 \left(x^{7/2} - \frac{x^4}{2}\right)dx = \frac{56}{9}\left[\frac{2}{9}x^{9/2} - \frac{1}{10}x^5\right]_0^1 = \frac{308}{405}$$

$$\bar{y} = \frac{56}{9}\int_0^1 \frac{x^2}{2}\left(x - \frac{x^2}{4}\right)dx = \frac{28}{9}\int_0^1 \left(x^3 - \frac{x^4}{4}\right)dx = \frac{28}{9}\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{20}x^5\right]_0^1 = \frac{252}{405}.$$