تحليل رياضي 2

المحاضرة 1

ميكاترونيكس

أ.د. سامي انجرو

الفصل الأول: أشكال عدم التعيين والتكاملات المعتلة

Indeterminate Forms & Improper Integrals

أشكال عدم التعيين وقاعدة أوبيتال Indeterminate Forms & Hôpital's Rule

التكاملات المعتلة Improper Integrals

مبرهنة قاعدة أوبيتال

Theorem Hôpital's Rule

بفرض أن $f(a) = g(a) = 0$, وأن f و g قابلان للمفاضلة على مجال مفتوح يحوي a، $g'(x) \neq 0$ على هذا المجال من أجل $x \neq a$ ، عندئذ

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

بشرط أن تكون النهاية في الطرف الأيمن من هذه المساواة موجودة.

ملاحظة: يمكن تطبيق مبرهنة أوبيتال أكثر من مرة، كما يمكن تطبيقها من أجل $f(x) \to \pm\infty$ و $g(x) \to \pm\infty$ عندما $x \to a$.

مثال: احسب النهاية الآتية: $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$

الحل

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \frac{0}{0}$$

Hôpital's Rule

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^{2x} - 1)'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{2e^{2x}}{1} = 2$$

مثال: احسب النهاية الآتية: $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^{-x}}$

الحل

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^{-x}}=\frac{\infty}{\infty}$$

Hôpital's Rule

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2)'}{(e^{-x})'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-e^{-x}}=\frac{-\infty}{-\infty}$$

Hôpital's Rule

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(2x)'}{(-e^{-x})'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}}=0$$

ملاحظة

$$0.\infty,\ 1^{\infty},\ \infty^{0},\ 0^{0},\ \infty-\infty \longrightarrow \begin{cases}\infty/\infty\\ 0/0\end{cases}$$

عدم التعيين من الشكل $0.\infty$

Indterminate Form $0.\infty$

مثال: احسب النهاية الآتية: $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x}\sqrt{x}$

الحل

Hôpital's Rule

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sqrt{x} \overset{0.\infty}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^{x}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x}\right)'}{\left(e^{x}\right)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}\,e^{x}} = 0$$

عدم التعيين من الشكل 1^{∞}

Indterminate Form 1^{∞}

مثال: احسب النهاية الآتية: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$

الحل

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = 1^{\infty} \longrightarrow y = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} \xrightarrow{\ln}$$

$$\ln y = \lim_{x\to\infty} x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \overset{0.\infty}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1/x} \overset{0/0}{=}$$

Hôpital's Rule

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-1}{x^2}\left(1/\left(1+(1/x)\right)\right)}{-1/x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\left(1+(1/x)\right)} = 1 \longrightarrow y = e$$

Indterminate Form 0^0

عدم التعيين من الشكل 0^0

مثال: احسب النهاية الآتية: $\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^x$

الحل

$$\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^x = 0^0 \longrightarrow y = \lim_{x\to 0^+} (\sin x)^x \xrightarrow{\ln}$$

$$\ln y = \lim_{x\to 0^+} x \ln(\sin x) \overset{0.(-\infty)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{1/x} \overset{-\infty/\infty}{=}$$

Hôpital's Rule

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cot x}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{\tan x} \overset{0/0}{\underset{\text{Hôpital's Rule}}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{-2x}{\sec^2 x} = 0 \Longrightarrow y = 1$$

Indterminate Form $\infty - \infty$

عدم التعيين من الشكل $\infty - \infty$

مثال: احسب النهاية الآتية: $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$

الحل

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) = \infty - \infty \Longrightarrow \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{(x-1)-\ln x}{(x-1)\ln x}\right) \overset{0/0}{\underset{\text{Hôpital's Rule}}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{((x-1)-\ln x)'}{((x-1)\ln x)'}\right) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1-(1/x)}{(x-1)(1/x)+\ln x} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1-x}{x-1+x\ln x} \overset{0/0}{\underset{\text{Hôpital's Rule}}{=}} \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1+x(1/x)+\ln x} = \frac{1}{2}$$

ملاحظة

$$\infty + \infty \longrightarrow \infty$$

$$-\infty - \infty \longrightarrow -\infty$$

$$0^{\infty} \longrightarrow 0$$

$$0^{-\infty} \longrightarrow \infty$$

تمارين

1 احسب النهايات الآتية:

- $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3 - 2x}{7x^3 + 3}$
- $\lim_{\theta\to\pi/2} \frac{1 - \sin\theta}{1 + \cos 2\theta}$
- $\lim_{t\to 0} \frac{t \sin t}{1 - \cos t}$
- $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{3x + 1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$
- $\lim_{x\to\infty} (1 + 2x)^{1/(2\ln x)}$
- $\lim_{x\to 0} (e^x + x)^{1/x}$
- $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 2}\right)^{1/x}$

الحل:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3 - 2x}{7x^3 + 3} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x^3-2x}{7x^3+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{15x^2-2}{21x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{30x}{42x} = \lim_{x\to\infty} \frac{30}{42} = \frac{5}{7}$$

$$\lim_{\theta\to\pi/2} \frac{1 - \sin\theta}{1 + \cos 2\theta} = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin\theta}{1+\cos 2\theta} = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos\theta}{-2\sin 2\theta} = \lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta}{-4\cos 2\theta} = \frac{1}{(-4)(-1)} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{t\sin t}{1-\cos t}$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{t\sin t}{1-\cos t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t+t\cos t}{\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t+(\cos t-t\sin t)}{\cos t}=\frac{1+(1-0)}{1}=2$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{3x+1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{3x+1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{(3x+1)(\sin x)-x}{x\sin x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{3\sin x+(3x+1)(\cos x)-1}{\sin x+x\cos x}=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{3\cos x+3\cos x+(3x+1)(-\sin x)}{\cos x+\cos x-x\sin x}\right)=\frac{3+3+(1)(0)}{1+1-0}=\frac{6}{2}=3$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+2x)^{1/(2\ln x)} \qquad \infty^0$$

$$f(x)=(1+2x)^{1/(2\ln x)} \qquad \Rightarrow \ln f(x)=\frac{\ln(1+2x)}{2\ln x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\ln f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+2x)}{2\ln x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}(1+2x)^{1/(2\ln x)}=\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}e^{\ln f(x)}=e^{1/2}$$

$$\lim_{x\to 0}(e^x+x)^{1/x} \qquad 1^\infty$$

$$f(x)=\left(e^x+x\right)^{1/x} \qquad \Rightarrow \ln f(x)=\frac{\ln\left(e^x+x\right)}{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\ln f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(e^x+x\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+1}{e^x+x}=2.$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(e^x+x\right)^{1/x}=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}e^{\ln f(x)}=e^2$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)^{1/x} \qquad \infty^0$$

$$f(x)=\left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)^{1/x} \Rightarrow \ln f(x)=\ln\left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)^{1/x}=\frac{1}{x}\ln\left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\ln f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(x^2+1\right)-\ln(x+2)}{x}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x^2+1}-\frac{1}{x+2}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x-1}{(x^2+1)(x+2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x-1}{x^3+2x^2+x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+4}{3x^2+4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{6x+4}=0.$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)^{1/x}=\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}e^{\ln f(x)}=e^0=1$$

التكاملات المعتلة بحدود تكامل لانهائية

Improper Integrals with Infinite Limits of Integration

1) $$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

2) $$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)dx$$

3) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$$

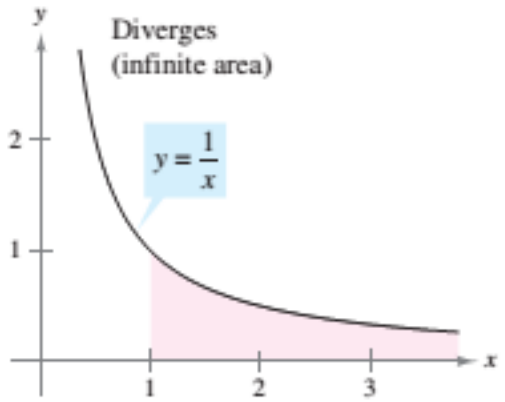
في الحالتين الأولى والثانية نقول عن التكامل أنه متقارب (convergent) إذا كانت النهاية موجودة، ويكون متباعد (divergent) فيما عدا ذلك. أما في الحالة الثالثة فيكون متباعد إذا كان أحد التكاملين متباعد.

مثال: احسب التكامل الآتي إن أمكن ذلك : $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$

الحل

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b} \frac{1}{x} dx = \lim_{b\to\infty} [\ln x]_1^b = \lim_{b\to\infty} (\ln b - \ln 1) = \infty$$

التكامل المعطى متباعد



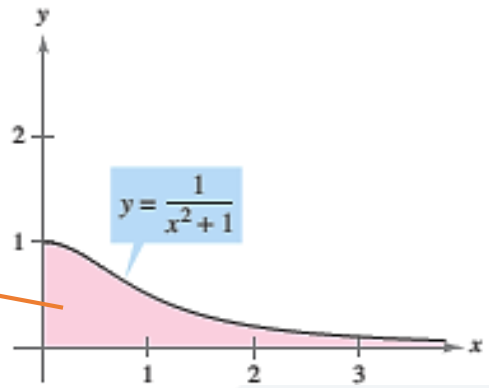
مثال: احسب التكامل الآتي إن أمكن ذلك: $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$

الحل

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} \frac{1}{x^2+1} dx = \lim_{b\to\infty} [\arctan x]_0^b = \lim_{b\to\infty} (\arctan b - \arctan 0) = \frac{\pi}{2}$$

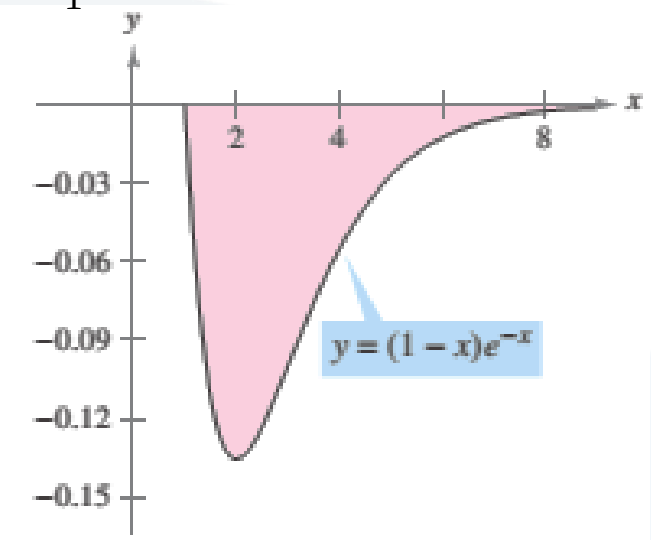
التكامل المعطى متقارب

$\frac{\pi}{2}$



مثال: احسب التكامل الآتي إن أمكن ذلك : $\int_{1}^{\infty}(1-x)e^{-x}dx$

الحل



$$\int_{1}^{\infty}(1-x)e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_{1}^{b}(1-x)e^{-x}dx$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left([-(1-x)e^{-x}]_{1}^{b} - \int_{1}^{b}e^{-x}dx\right)$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\frac{b}{e^{b}}\right) - \frac{1}{e} = -\frac{1}{e}$$

التكامل المعطى متقارب

مثال: احسب التكامل الآتي إن أمكن ذلك : $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

الحل

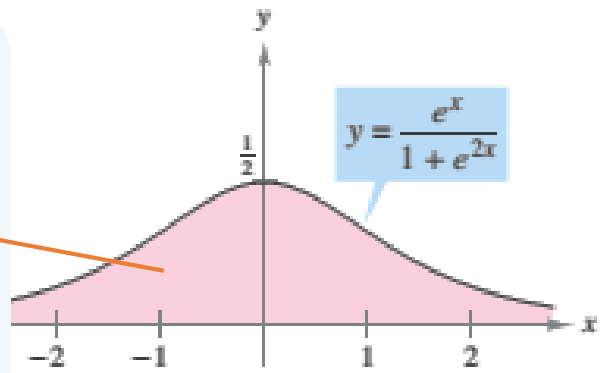
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx + \int_{0}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx + \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left[\arctan e^x\right]_a^0 + \lim_{b\to\infty} \left[\arctan e^x\right]_0^b$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \left(\frac{\pi}{4} - \arctan e^a\right) + \lim_{b\to\infty} \left(\arctan e^b - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - 0 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{2}$$



التكامل المعطى متقارب