تحليل رياضي 2

المحاضرة 5

ميكاترونيكس

أ.د. سامي انجرو

الفصل الثاني: السلاسل اللانهائية

Infinite Series

١. اختبارات النسبة والجذر The Ratio and Root Tests

٢. كثيرات حدود تايلوروالتقريبات Taylor Polynomials and Approximations

٣. سلاسل القوى Power Series

٤. تمثيل التوابع بسلاسل القوى Representation of Functions by Power Series

٥. سلاسل تايلور وماكلورين Taylor and Maclaurin Series

٥. اختبارات النسبة والجذر The Ratio and Root Tests

التقارب المطلق والتقارب الشرطي absolute and conditional convergence

$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ متقاربة $\longrightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ متقاربة مطلقاً

$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$ متباعدة ، $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ متقاربة $\longrightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ متقاربة شرطياً

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

اختبار النسبة The Ratio Test

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n \longrightarrow \begin{cases} \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1 \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}a_n \text{ متقاربة مطلقاً} \\ \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1 \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}a_n \text{ متباعدة مطلقاً} \\ \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1 \longrightarrow \text{حالة شك} \end{cases}$$

أمثلة

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ متقاربة مطلقاً

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}/(n+1)!}{2^n/n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} = 0 < 1$$

2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 2^{n+1}}{3^n}$ متقاربة مطلقاً

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2 2^{n+2}/3^{n+1}}{n^2 2^{n+1}/3^n}\right| = \frac{2}{3} < 1$$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ متباعدة مطلقاً

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^{n+1}/(n+1)!}{n^n/n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n} = e > 1$$

اختبار الجذر The Root Test

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{متقاربة مطلقاً}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{متباعدة مطلقاً}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \longrightarrow \quad \text{حالة شك}$$

مثال

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2n}}{n^n} \quad \text{متقاربة مطلقاً}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{e^{2n}}{n^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^2}{n} = 0$$

تمارين

1 استخدم اختبار النسبة لتحديد فيما إذا كانت كل سلسلة من السلاسل الآتية متقاربة مطلقاً:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{3^n}$
- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{\ln n}$

الحل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^n \cdot 2}{(n+1)\cdot n!} \cdot \frac{n!}{2^n} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n+1} \right) = 0 < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$$

متقاربة مطلقاً

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{3^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \frac{(n+1)+2}{3^{n+1}}}{(-1)^n \frac{n+2}{3^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{3^n \cdot 3} \cdot \frac{3^n}{n+2} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{3n+6} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{3^n}$$

متقاربة مطلقاً

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{\ln n}$$

متباعدة مطلقاً

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{3^{(n+1)+2}}{\ln(n+1)}}{\frac{3^{n+2}}{\ln n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3^{n+2} \cdot 3}{\ln(n+1)} \cdot \frac{\ln n}{3^{n+2}} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3 \ln n}{\ln(n+1)} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{3}{n}}{\frac{1}{n+1}} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+3}{n} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{1} \right) = 3 > 1 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{\ln n}$$

تمارين

2 استخدم اختبار الجذرلتحديد فيما إذا كانت كل سلسلة من السلاسل الآتية متقاربة مطلقاً:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{(2n+5)^n}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(3n)^n}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+3}{3n-5}\right)^n$

الحل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{(2n+5)^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{7}{(2n+5)^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{7}}{2n+5}\right) = 0 < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{(2n+5)^n}$$ متقاربة مطلقاً

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(3n)^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{4^n}{(3n)^n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3n}\right) = 0 < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(3n)^n}$$ متقاربة مطلقاً

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+3}{3n-5}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{4n+3}{3n-5}\right)^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n+3}{3n-5}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n+3}{3n-5}\right)^n$$ متباعدة مطلقاً

٧. سلاسل القوى Power Series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1 (x-c) + a_2 (x-c)^2 + \cdots + a_n (x-c)^n + \cdots$$

Power Series Centered at c

سلسلة قوى مركزها النقطة c

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \longrightarrow c = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+1)^n = 1 - (x+1) + (x+1)^2 - (x+1)^3 + \cdots \longrightarrow c = -1$$

Radius and Interval of Convergence نصف قطرومجال التقارب

مجال التقارب

Interval of Convergence

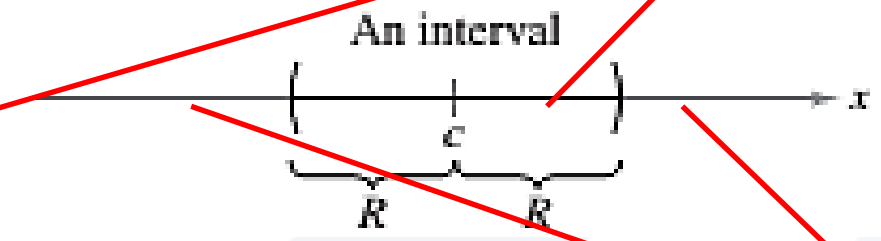
$$|x-c|<R$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

متقاربة مطلقاً

نصف قطر التقارب

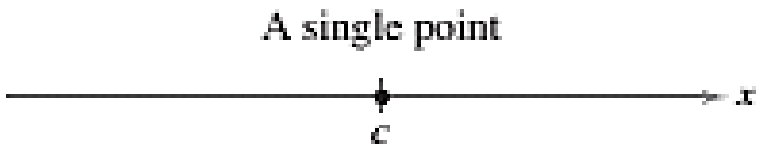
Radius of Convergence



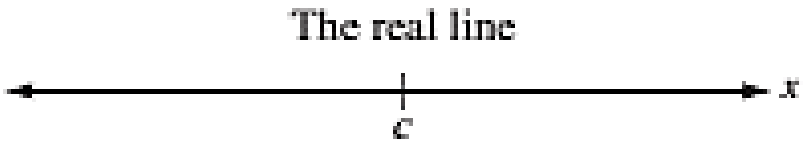
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

متباعدة مطلقاً

$R=0$



$R=\infty$



Finding the Radius of Convergence إيجاد نصف قطر التقارب

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{أو} \quad R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

أمثلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$$ التقارب في المركز فقط

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3(x-2)^n \qquad |x-2|<1 \qquad 1<x<3 \longrightarrow]1,3[$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{3}{3}\right| = 1 \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 3(1-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 3(-1)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} 3(3-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 3(1)^n$$

متباعدة متباعدة

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+1)^n}{2^n} \quad |x+1|<2 \quad -3<x<1 \longrightarrow]-3,1[$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n/2^n}{(-1)^{n+1}/2^{n+1}}\right|=2$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-2)^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}1$$ متباعدة

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2)^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$$ متباعدة

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2} \quad |x|<1 \quad -1<x<1 \longrightarrow [-1,1]$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1/n^2}{1/(n+1)^2}\right|=1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$ متقاربة

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$ متقاربة

Differentiation and Integration of Power Series اشتقاق وتكامل سلاسل القوى

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n\right)' = a_1 + 2a_2(x-c) + \cdots + na_n(x-c)^{n-1} + \cdots$$

$$\int\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n\right)dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n (x-c)^{n+1}}{n+1}$$

تمارين

1 أوجد نصف قطر ومجال تقارب كل من السلاسل الآتية وحدد قيم x التي تكون من أجلها السلسلة متقاربة مطلقاً أو متقاربة شرطياً:

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^3 3^n}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n}$
- $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4x+1)^n$
- $\sum_{n=0}^{\infty} (x+5)^n$
- $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

الحل:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| < 1 \Rightarrow |x| < 1 \Rightarrow -1 < x < 1$$

مركز السلسلة $x = 0$

$x = -1 \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ متباعدة

$x = 1 \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 1$ متباعدة

نصف قطر التقارب $R = 1$ مجال التقارب المطلق $-1 < x < 1$ مجال التقارب $-1 < x < 1$

لا يوجد قيم لـ x تجعل السلسلة متقاربة شرطياً.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x+5)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x+5)^{n+1}}{(x+5)^n}\right| < 1 \Rightarrow |x+5| < 1 \Rightarrow -6 < x < -4$$

مركز السلسلة $x = -5$

تمارين

$x=-6 \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ متباعدة

$x=-4 \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}1$ متباعدة

نصف قطر التقارب $R=1$

مجال التقارب المطلق $-6<x<-4$

مجال التقارب $-6<x<-4$

لا يوجد قيم لـ x تجعل السلسلة متقاربة شرطياً.

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(4x+1)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|<1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(4x+1)^{n+1}}{(4x+1)^n}\right|<1 \Rightarrow |4x+1|<1 \Rightarrow -1<4x+1<1 \Rightarrow -\frac{1}{2}<x<0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(4x+1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n\left(x+\frac{1}{4}\right)^n \longrightarrow$$ مركز السلسلة $x=-1/4$

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{4^{n+1}}=\frac{1}{4}$$ نصف قطر التقارب

$x=-\frac{1}{2} \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}1^n$ متباعدة

$x=0 \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ متباعدة

تمارين

مجال التقارب المطلق $-\frac{1}{2} < x < 0$ مجال التقارب $-\frac{1}{2} < x < 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n}\left(x - \frac{2}{3}\right)^n \longrightarrow$$ مركز السلسلة $x = -2/3$

نصف قطر التقارب $$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3^n/n}{3^{n+1}/(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n} = \frac{1}{3}$$

$$\left|x - \frac{2}{3}\right| < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{-1}{3} < x - \frac{2}{3} < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} < x < 1$$

$x = \frac{1}{3} \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ سلسلة متناوبة متقاربة لكنها ليست متقاربة مطلقاً أي أنها متقاربة شرطياً

$x = 1 \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة

مجال التقارب المطلق $\frac{1}{3} < x < 1$ مجال التقارب $\frac{1}{3} \le x < 1$ السلسلة متقاربة شرطياً عندما $x = \frac{1}{3}$

تمارين

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^3 3^n} \longrightarrow$$ مركز السلسلة $x = 1$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1/3^n n^3}{1/3^{n+1}(n+1)^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}(n+1)^3}{3^n n^3} = 3$$ نصف قطر التقارب

$$|x-1| < 3 \Rightarrow -3 < x-1 < 3 \Rightarrow -2 < x < 4$$

$$x = -2 \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n^2 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$ متقاربة مطلقاً حسب اختبار النسبة فهي متقاربة

$$x = 4 \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3)^n}{n^2 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$ متقاربة مطلقاً حسب اختبار النسبة فهي متقاربة

مجال التقارب المطلق $-2 \le x \le 4$ مجال التقارب $-2 \le x \le 4$

لا يوجد قيم لـ x تجعل السلسلة متقاربة شرطياً.