جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY

تحليل رياضي 2

المحاضرة 10

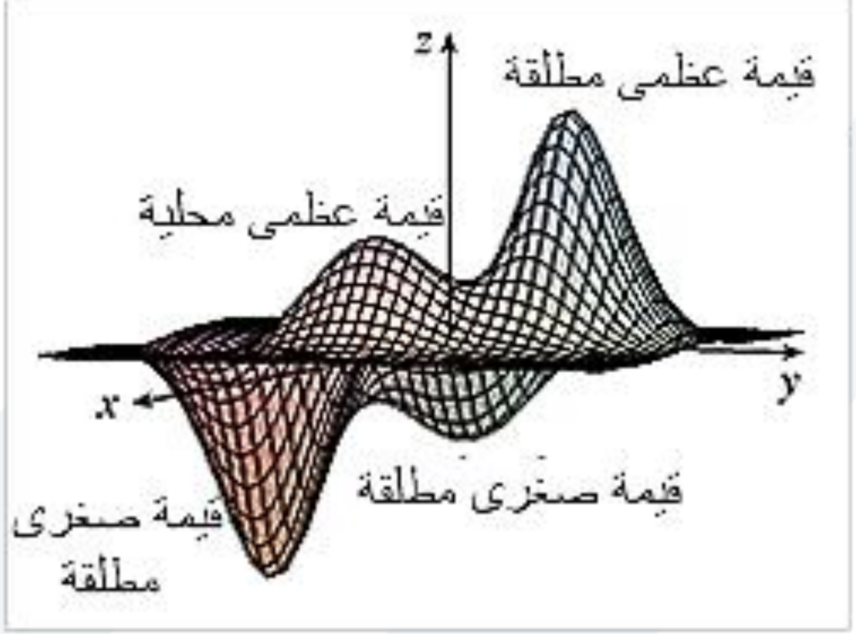
ميكاترونيكس

أ.د. سامي انجرو

تعريف: يقال أن للتابع f قيمة عظمى محلية في النقطة (a,b)، إذا كان $f(a,b) \geq f(x,y)$ من أجل كل النقاط (x,y) الموجودة داخل قرص مركزه النقطة (a,b)، ويسمى عندئذ العدد $f(a,b)$ بقيمة عظمى محلية. أما إذا كان $f(a,b) \leq f(x,y)$ من أجل كل النقاط (x,y) الموجودة داخل قرص مركزه النقطة (a,b)، عندئذ يقال أن للتابع f قيمة صغرى محلية في النقطة (a,b) هي العدد $f(a,b)$.

نتيجة: إذا كانت المتراجحتين السابقتين محققتين من أجل كل النقاط $(x\,,y)$ من المنطقة D ،

عندئذ يكون للتابع f قيم قصوى (عظمى أو صغرى) مطلقة في النقطة (a,b) .



مبرهنة: إذا كان للتابع f قيم قصوى (عظمى أو صغرى) محلية في النقطة (a,b)، وكانت المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى موجودة، عندئذ فإن:

$$f_x(a,b)=0 \ , \ f_y(a,b)=0$$

تعريف: تسمى النقطة التي تنتمي إلى مجموعة تعريف التابع $f(x,y)$ والتي ينعدم عندها $f_x \ , f_y$ أو يكون أحدهما أو كلاهما غير معرّف، بالنقطة الحرجة. **Critical point** of f

نتيجة: ليس من الضروري أن يكون للتابع f قيم قصوى (عظمى أو صغرى) محلية في النقطة الحرجة.

مثال: بفرض أن $f(x,y)=x^2+y^2-2x-6y+14$، أوجد النقطة الحرجة وهل للتابع قيم قصوى (عظمى أو صغرى) في هذه النقطة.

الحل

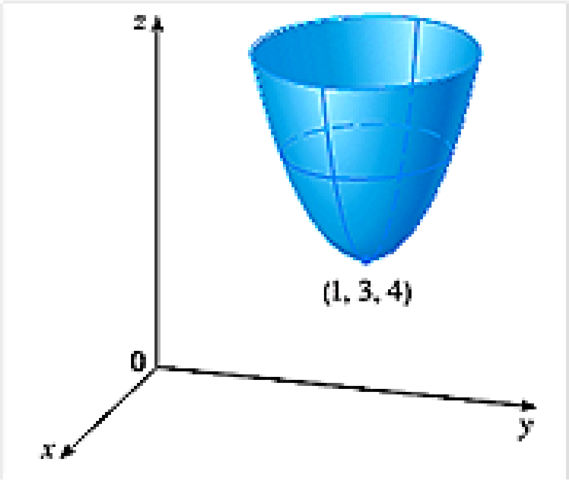
لنوجد أولاً المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى للتابع المعطى: $f_x(x,y)=2x-2 \quad , \quad f_y(x,y)=2y-6$

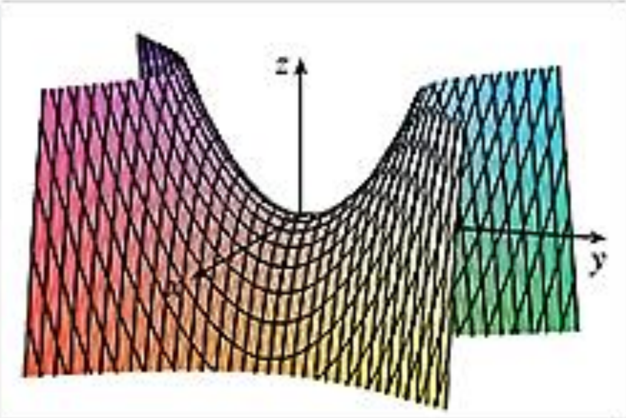
لنوجد النقطة الحرجة وذلك بجعل المشتقات الجزئية مساوية للصفر: $f_x(x,y)=2x-2=0 \quad , \quad f_y(x,y)=2y-6=0$

بحل المعادلتين نحصل على النقطة الحرجة $(1,3)$، وبالإتمام إلى مربع كامل نحصل على:

$$f(x,y)=4+(x-1)^2+(y-3)^2$$

وبما أن $(x-1)^2\geq 0$ و $(y-3)^2\geq 0$، فإن $f(x,y)\geq 4$، أياً كانت النقاط (x,y)، وبالتالي فإن للتابع المعطى قيمة صغرى مطلقة هي $f(1,3)=4$.





مثال: أوجد القيم القصوى للتابع الآتي، إن وجدت:

$$f(x,y)=y^2-x^2$$

الحل

لنوجد أولاً المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى للتابع المعطى:

$$f_x(x,y)=-2x \quad , \quad f_y(x,y)=2y$$

لنوجد النقطة الحرجة وذلك بجعل المشتقات الجزئية مساوية للصفر:

$$f_x(x,y)=-2x=0 \quad , \quad f_y(x,y)=2y=0$$

بحل المعادلتين السابقتين نحصل على النقطة الحرجة $(0,0)$، نلاحظ أنه من أجل النقاط التي على المحور $x-$، حيث لدينا $y=0$، لدينا $f(x,y)=-x^2\le 0=f(0,0)$، وكذلك من أجل كل النقاط التي على المحور $y-$، حيث لدينا $x=0$، لدينا $f(x,y)=y^2\ge 0=f(0,0)$، وبالتالي فإن أي قرص تكون النقطة $(0,0)$ مركزاً له، فإنه سيحتوي على نقاط يكون عندها للتابع المعطى قيم موجبة ونقاط يكون عندها للتابع المعطى قيم سالبة، لذلك فإن التابع المعطى لا يمتلك قيمة قصوى عند النقطة $(0,0)$، أي أن $f(0,0)=0$ ليست قيمة قصوى للتابع.

ملاحظة: تسمى النقطة في هذه الحالة بالنقطة السرجية. **saddle point**

اختبار المشتقات من المرتبة الثانية

بفرض ان المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية للتابع f مستمرة على قرص مركزه النقطة (a,b)،

وبفرض أن $f_y(a,b)=0$, $f_x(a,b)=0$، وليكن:

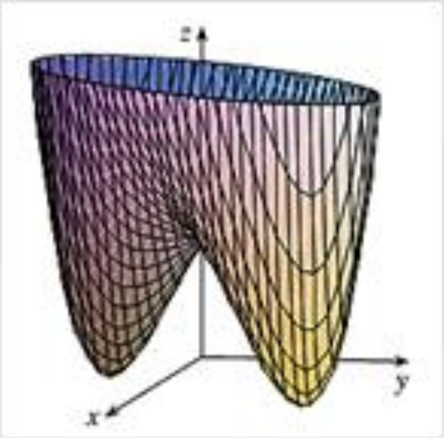
$$D=D(a,b)=f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)-\left[f_{xy}(a,b)\right]^2$$

1) إذا كان $D>0$ وكان $f_{xx}(a,b)>0$، عندئذ فإن $f(a,b)$ قيمة صغرى محلية.

2) إذا كان $D>0$ وكان $f_{xx}(a,b)<0$، عندئذ فإن $f(a,b)$ قيمة عظمى محلية.

3) إذا كان $D<0$، عندئذ فإن $f(a,b)$ ليست قيمة عظمى أو صغرى محلية.

ملاحظة: يقال عن النقطة (a,b) في الحالة الثالثة أنها نقطة سرجية للتابع f. بينما إذا كان $D=0$ فإن هذا الاختبار لا يقدم أية معلومات أي قد يكون للتابع f قيم قصوى محلية في هذه النقطة وقد لا يكون أي قد تكون نقطة سرجية.



مثال: أوجد النقاط الحرجة للتابع الآتي، والقيم القصوى إن وجدت: $f(x,y)=x^4+y^4-4xy+1$

الحل

لنوجد أولاً المشتقات الجزئية من المرتبة الأولى للتابع المعطى: $f_x(x,y)=4x^3-4y \quad , \quad f_y(x,y)=4y^3-4x$

لنوجد النقطة الحرجة وذلك بجعل المشتقات الجزئية مساوية للصفر: $f_x(x,y)=4x^3-4y=0 \quad , \quad f_y(x,y)=4y^3-4x=0$

النقاط الحرجة $(0,0)\ ,\ (1,1)\ ,\ (-1,-1)$

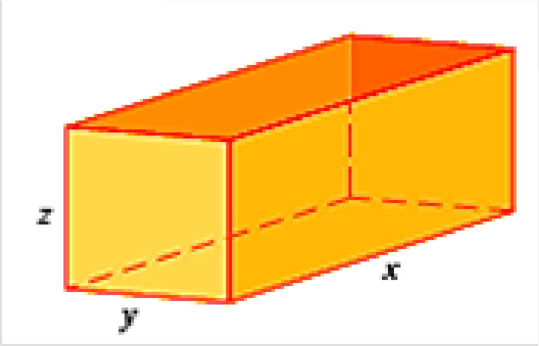
$f_{xx}(x,y)=12x^2 \quad , \quad f_{yy}(x,y)=12y^2 \quad , \quad f_{xy}(x,y)=-4 \Rightarrow D(x,y)=144x^2y^2-16$

$D(0,0)=-16<0 \Rightarrow (0,0)$ نقطة سرجية $\Rightarrow$ ليس للتابع المعطى قيمة قصوى عندها

$D(1,1)=128>0 \quad f_{xx}(1,1)=12>0 \Rightarrow$ للتابع المعطى قيمة صغرى محلية عند النقطة $(1,1)$ $\Rightarrow f(1,1)=-1$

$D(-1,-1)=128>0 \quad f_{xx}(-1,-1)=12>0 \Rightarrow$ للتابع المعطى قيمة صغرى محلية عند النقطة $(-1,-1)$ $\Rightarrow f(-1,-1)=-1$

مثال: بفرض انه لدينا $12m^2$ من الصفيح أو من الكرتون، ونريد تصميم صندوق على شكل متوازي مستطيلات بدون غطاء أوجد أبعاد هذا الصندوق حتى يحوي أعظم حجم ممكن، واحسب هذا الحجم.



الحل

x و y و z تمثل طول وعرض وارتفاع هذا الصندوق على الترتيب مقاسة بالأمتار

الحجم $V = xyz$

المساحة الجانبية $S = 2xz + 2yz + xy = 12$

$$\Rightarrow z = \frac{12 - xy}{2(x+y)}$$

$$\Rightarrow V = xy\frac{12 - xy}{2(x+y)} = f(x,y)$$

لنوجد النقاط الحرجة

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{y^2\left(12 - 2xy - x^2\right)}{2(x+y)^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{x^2\left(12 - 2xy - y^2\right)}{2(x+y)^2} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{y^2(12-2xy-x^2)}{2(x+y)^2}=0\ ,\ \frac{\partial V}{\partial y}=\frac{x^2(12-2xy-y^2)}{2(x+y)^2}=0$$

نلاحظ أنه عندما $x=0$ أو $y=0$ ليس للمسألة أي معنى لأنه سيكون $V=0$،

$$12-2xy-x^2=0\ ,\ 12-2xy-y^2=0 \Rightarrow x^2=y^2 \xrightarrow{x>0,y>0} x=y$$

$$\Rightarrow x=2\ ,\ y=2 \Rightarrow z=1 \Rightarrow V=4m^3$$

لنرى فيما إذا كان هذا الحجم هو أعظم حجم يحويه الصندوق.

$$V_{xx}(2,2)=-4\ ,\ V_{yy}(2,2)=-4\ ,\ V_{xy}(2,2)=-2$$

$$D(2,2)=12>0 \qquad V_{xx}(2,2)=-4<0$$

الحجم يبلغ أعظم قيمة له عندما $z=1$ $x=2\ ,\ y=2$

تمارين

1 أوجد القيم القصوى المحلية والنقاط السرجية للتوابع الآتية

$f(x, y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x + 4y - 4$

$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4$

$f(x, y) = x^2 + xy + 3x + 2y + 5$

الحل

$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4$

$f_x(x, y) = 2x + y + 3 = 0 \quad f_y(x, y) = x + 2y - 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \quad y = 3$ النقطة الحرجة $(-3, 3)$

$f_{xx}(-3, 3) = 2,\ f_{yy}(-3, 3) = 2,\ f_{xy}(-3, 3) = 1$ ⟶ $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = 3 > 0 \quad f_{xx} > 0$

للتابع المعطى قيمة صغرى في النقطة $(-3, 3)$ هي $f(-3, 3) = -5$

$$f(x, y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x + 4y - 4$$

$f_x(x, y) = 2y - 10x + 4 = 0 \quad f_y(x, y) = 2x - 4y + 4 = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{2}{3} \quad y = \frac{4}{3} \longrightarrow \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ النقطة الحرجة

$f_{xx}\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = -10,\ f_{yy}\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = -4,\ f_{xy}\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = 2 \longrightarrow f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 36 > 0 \quad f_{xx} < 0$

للتابع المعطى قيمة عظمى في النقطة $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ هي $f\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = 0$

$$f(x, y) = x^2 + xy + 3x + 2y + 5$$

$f_x(x, y) = 2x + y + 3 = 0 \quad f_y(x, y) = x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \quad y = 1 \longrightarrow (-2, 1)$ النقطة الحرجة

$f_{xx}(-2, 1) = 2,\ f_{yy}(-2, 1) = 0,\ f_{xy}(-2, 1) = 1 \longrightarrow f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -1 < 0$

للتابع المعطى نقطة سرجية هي $(-2, 1)$

تمارين

2 أوجد أقصر مسافة من النقطة $(2,-1,1)$ إلى المستوي $x+y-z=2$

الحل

$$d(x,y,z)=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2} \longrightarrow D(x,y,z)=(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2$$

$$x+y-z=2 \Rightarrow z=x+y-2 \longrightarrow D(x,y)=(x-2)^2+(y+1)^2+(x+y-3)^2$$

$$\longrightarrow D_x(x,y)=2(x-2)+2(x+y-3)=0 \quad D_y(x,y)=2(y+1)+2(x+y-3)=0 \longrightarrow$$

النقطة الحرجة $\left(\frac{8}{3},-\frac{1}{3}\right)$

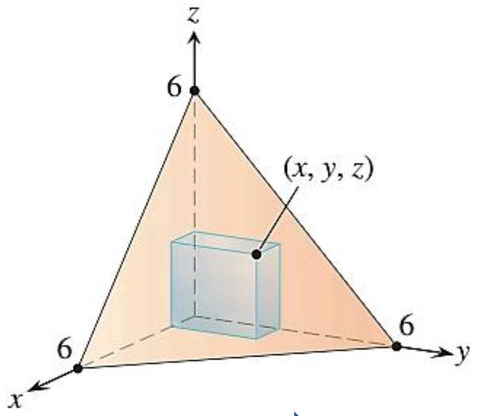
$$\Rightarrow z=\frac{1}{3} \longrightarrow D_{xx}\left(\frac{8}{3},-\frac{1}{3}\right)=4,\ D_{yy}\left(\frac{8}{3},-\frac{1}{3}\right)=4 \quad D_{xy}\left(\frac{8}{3},-\frac{1}{3}\right)=2 \quad \Rightarrow D_{xx}D_{yy}-D_{xy}^2=12>0 \quad D_{xx}>0$$

أقصر مسافة $\longleftarrow$ $d\left(\frac{8}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}$

تمارين

3 لدينا صندوق موجود في الثمن الأول ومحدود من الأعلى بالمستوي $x + y + z = 6$ كما في الشكل المرفق

أوجد أبعاد هذا الصندوق حتى يكون حجمه أعظم ما يمكن.



الحل

$$V(x, y, z) = xyz$$
$$z = 6 - x - y$$

$$\Rightarrow V(x, y) = xy(6 - x - y) = 6xy - x^2y - xy^2$$

$$\Rightarrow V_x(x, y) = 6y - 2xy - y^2 = y(6 - 2x - y) = 0 \qquad V_y(x, y) = 6x - x^2 - 2xy = x(6 - x - 2y) = 0$$

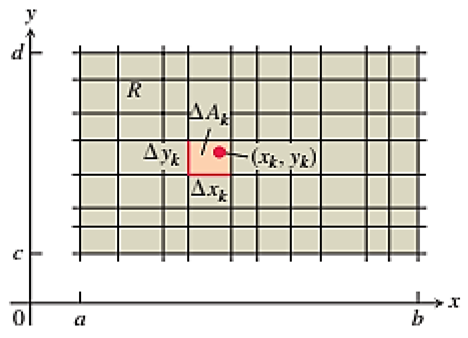
$\Rightarrow$ النقطة الحرجة $(2, 2)$ $\Rightarrow$ $V_{xx}(2,2) = -4,\ V_{yy}(2,2) = -4,\ V_{xy}(2,2) = -2$

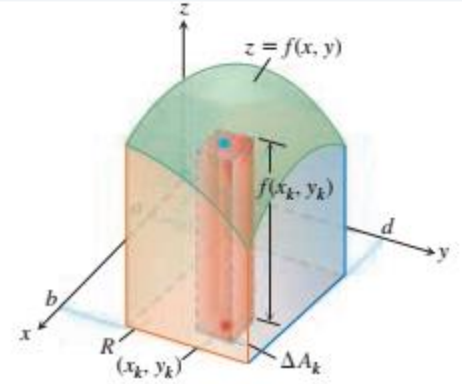
$$\Rightarrow V_{xx}V_{yy} - \left(V_{xy}\right)^2 = 12 > 0 \qquad V_{xx} < 0$$

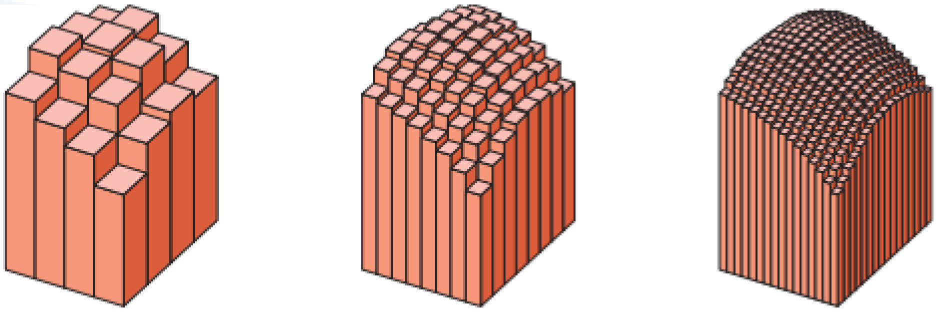
$\Leftarrow$ أعظم حجم ممكن للصندوق $V(2, 2, 2) = 8$

Double and Iterated Integrals over Rectangles

التكامل الثنائي على مستطيل







(a) $n = 16$ (b) $n = 64$ (c) $n = 256$

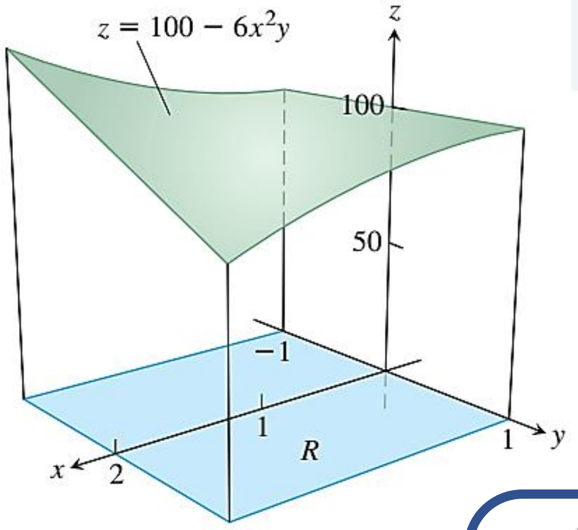
مبرهنة: مبرهنة فوبيني

ليكن $f(x, y)$ تابع مستمر على المنطقة المستطيلة $R: a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d$ ، عندئذ

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx.$$

مثال: احسب $\iint_R f(x, y)\, dA$ ، حيث $f(x, y) = 100 - 6x^2y$ و $R: \quad 0 \le x \le 2, \quad -1 \le y \le 1$

الحل



$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{2}(100 - 6x^2y)\, dx\, dy = \int_{-1}^{1}\Big[100x - 2x^3y\Big]_{x=0}^{x=2} dy$$

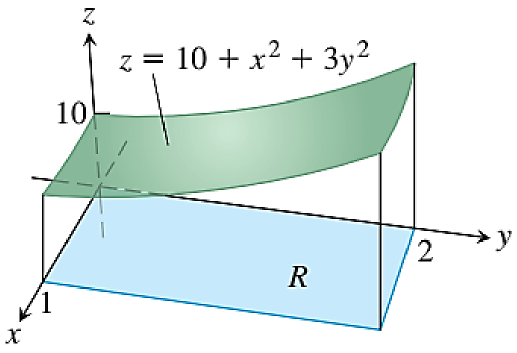
$$= \int_{-1}^{1}(200 - 16y)\, dy = \Big[200y - 8y^2\Big]_{-1}^{1} = 400.$$

ملاحظة: يمثل التكامل $\iint_R f(x, y)\, dA$ حجم المنطقة المحدودة تحت السطح $z = f(x, y)$ فوق المستطيل R .

$$\text{Volume} = \iint_R f(x, y)\, dA$$

مثال: أوجد حجم المنطقة المحدودة من الأعلى بـ $z = 10 + x^2 + 3y^2$ ومن الأسفل بالمستطيل $R: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2$.

الحل



$$V = \iint_R (10 + x^2 + 3y^2)\, dA = \int_0^1 \int_0^2 (10 + x^2 + 3y^2)\, dy\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[10y + x^2 y + y^3 \right]_{y=0}^{y=2} dx$$

$$= \int_0^1 (20 + 2x^2 + 8)\, dx = \left[20x + \frac{2}{3}x^3 + 8x \right]_0^1 = \frac{86}{3}.$$

تمارين

1 احسب التكامل الثنائي المكرر الآتي

$$\int_1^2\int_0^4 2xy\,dy\,dx \qquad \int_0^3\int_{-2}^0 (x^2y-2xy)\,dy\,dx \qquad \int_\pi^{2\pi}\int_0^\pi (\sin x+\cos y)\,dx\,dy$$

الحل

$$\int_1^2\int_0^4 2xy\,dy\,dx$$

$$\int_1^2\int_0^4 2xy\,dy\,dx=\int_1^2\left[xy^2\right]_0^4 dx=\int_1^2 16x\,dx=\left[8x^2\right]_1^2=24$$

$$\int_0^3\int_{-2}^0 (x^2y-2xy)\,dy\,dx$$

$$\int_0^3\int_{-2}^0\left(x^2y-2xy\right)dy\,dx=\int_0^3\left[\frac{x^2y^2}{2}-xy^2\right]_{-2}^0 dx=\int_0^3\left(4x-2x^2\right)dx=\left[2x^2-\frac{2x^3}{3}\right]_0^3=0$$

$$\int_\pi^{2\pi}\int_0^\pi (\sin x+\cos y)\,dx\,dy$$

$$\int_\pi^{2\pi}\int_0^\pi(\sin x+\cos y)\,dx\,dy=\int_\pi^{2\pi}\left[-\cos x+x\cos y\right]_0^\pi dy$$

$$=\int_\pi^{2\pi}(2+\pi\cos y)\,dy=\left[2y+\pi\sin y\right]_\pi^{2\pi}=2\pi$$

تمارين

2 احسب التكامل الثنائي المعطى مع المنطقة المعطاة

$$\iint_R (6y^2 - 2x)\, dA, \qquad R: \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2$$

$$\iint_R e^{x-y}\, dA, \qquad R: \quad 0 \le x \le \ln 2, \quad 0 \le y \le \ln 2$$

الحل

$$\iint_R (6y^2 - 2x)\, dA, \qquad R: \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2$$

$$\iint_R \left(6y^2 - 2x\right) dA = \int_0^1 \int_0^2 \left(6y^2 - 2x\right) dy\, dx = \int_0^1 [2y^3 - 2xy]_0^2\, dx = \int_0^1 (16 - 4x)\, dx = [16x - 2x^2]_0^1 = 14$$

$$\iint_R e^{x-y}\, dA, \qquad R: \quad 0 \le x \le \ln 2, \quad 0 \le y \le \ln 2$$

$$\iint_R e^{x-y}\, dA = \int_0^{\ln 2} \int_0^{\ln 2} e^{x-y}\, dy\, dx = \int_0^{\ln 2} \left[-e^{x-y}\right]_0^{\ln 2} dx = \int_0^{\ln 2} \left(-e^{x-\ln 2} + e^x\right) dx = \left[-e^{x-\ln 2} + e^x\right]_0^{\ln 2} = \frac{1}{2}$$

تمارين

3 أوجد حجم المنطقة المحدودة من الأعلى بـ $z = x^2 + y^2$ ومن الأسفل بالمستطيل $R: -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1$.

الحل

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(x^2 + y^2\right) dy\, dx = \int_{-1}^{1}\left[x^2 y + \frac{1}{3}y^3\right]_{-1}^{1} dx = \int_{-1}^{1}\left(2x^2 + \frac{2}{3}\right) dx = \left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}$$

4 أوجد حجم المنطقة المحدودة من الأعلى بـ $z = 2 - x - y$ ومن الأسفل بالمستطيل $R: 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$

الحل

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA = \int_0^1\int_0^1 (2 - x - y)\, dy\, dx = \int_0^1\left[2y - xy - \frac{1}{2}y^2\right]_0^1 dx = \int_0^1\left(\frac{3}{2} - x\right) dx = \left[\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = 1$$