جامعة المنارة
قسم هندسة الروبوت والأنظمة الذكية

الدارات الكهربائية

الدكتور المهندس
علاء الدين أحمد حسام الدين

6

الحالات العابرة في الدارات الكهربائية

الاستجابة الأولى لدارة RC

First order-RC

مقدمة:

سنقوم بدراسة نوعين من الدارات البسيطة: دارة تحتوي على مقاومة ومكثف، وتسمى دارة RC، ودارة تحتوي على مقاومة وملف، وتسمى دارة RL، وذلك كون هذه الدارات تتميز بكثرة تطبيقاتها في الالكترونيات، والاتصالات، و أنظمة التحكم...وغيرها.

نقوم بتحليل دارات RC و RL بتطبيق قوانين كيرشوف، كما فعلنا في الدارات الحاوية على مقاومات فقط. والفرق الوحيد هو أن تطبيق قوانين كيرشوف على دارات المقاومات البحتة ينتج عنه معادلات جبرية، أما أثناء تطبيق هذه القوانين على دارات RC و RL فستنتج معادلات تفاضلية، التي يصعب حلها أكثر من المعادلات الجبرية. المعادلات التفاضلية الناتجة عن تحليل دارات RC و RL تكون من الدرجة الأولى، وبالتالي، فإن هذه الدارات تعرف باسم دارات الدرجة الأولى. (First Order)

تتميز دارات الدرجة الأولى A first-order circuit (RL,RC) بأن معادلاتها التفاضلية من الدرجة الأولى.

هناك طريقتان للتغذية والتشغيل:

الطريقة الأولى: هي باستخدام الشروط الابتدائية (الأولية) (initial) لعناصر تخزين الطاقة في الدارة. في هذه الحالة تكون الدارة خالية من منبع التغذية، حيث نفترض أن الطاقة في الحالة الابتدائية أو الدارة الابتدائية (the initial circuit) (حالة عدم وجود منبع) تكون مخزنة في المكثف أو الملف، وتسبب سريان تيار في الدارة، ومن ثم تتبدد هذه الطاقة في المقاومات.

وبالرغم من أن الدارات الخالية من منبع التغذية أي خالية من المنابع المستقلة، إلا انها قد تكون حاوية على منابع غير مستقلة (تابعة)، وعندها يتم دراسة الدارة بشكل آخر.

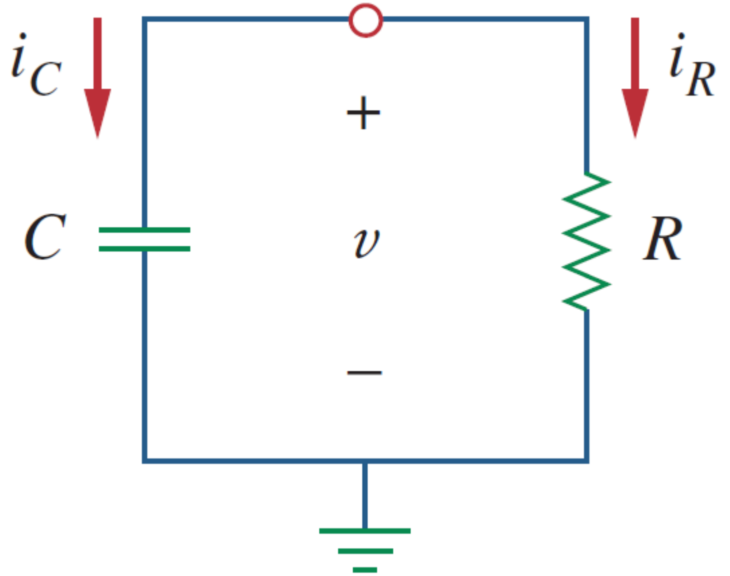
الطريقة الثانية: هي باستخدام الدارة الحاوية على منبع تغذية مستقل. في هذا الفصل سنعتبر منبع التغذية المستقل هو منبع تيار مستمر (بطارية). ولاحقاً سنعتبره منبع جيبي أو أسي.

سنقوم في هذا الفصل بدراسة نموذجي الدارات ذات الدرجة الأولى RC و RL مع طرق التغذية لهما والمذكورة آنفاً.

من أهم تطبيقات دارات RC و RL: دارات التأخير والريليات، فلاش الكاميرا، ودارة اشتعال (تشغيل) السيارات...وغيرها.

دارة RC بدون منبع تغذية:

يُقصد بدارة RC بدون منبع تغذية: حالة فصل منبع التيار المستمر بشكل مفاجئ، حيث يتم تفريغ طاقة المكثف المخزنة بين لبوسيه في المقاومات.

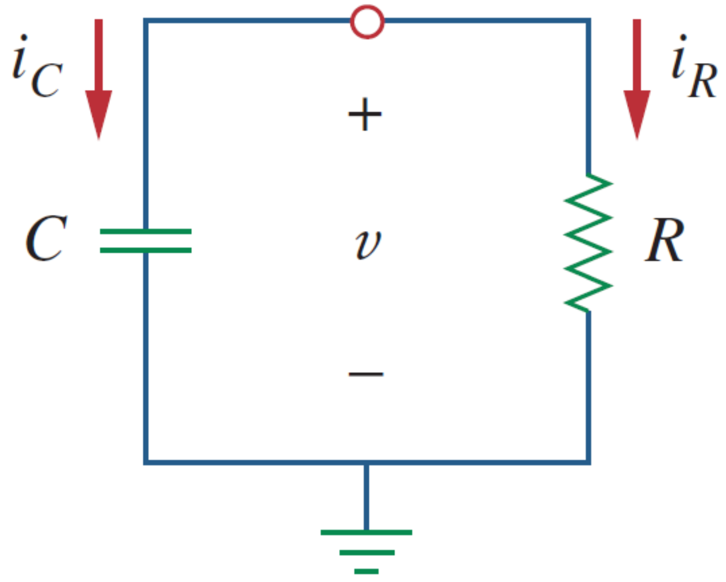


ليكن لدينا دارة تسلسلية مكونة من مقاومة ومكثف مشحون بشحنة ابتدائية، كما في الشكل. (قد يكون المكثف والمقاومة هما المكثف المكافئ أو المقاومة المكافئة لعدة مكثفات أو مقاومات).

والمطلوب تحديد استجابة الدارة (circuit response)، والتي تمثل قيمة الجهد على اقطاب المكثف **v(t)**. بما أن المكثف مشحون، يكون الجهد الأولي في اللحظة **t=0** هو:

$$v(0) = \mathrm{V}_0$$

وتعطى الطاقة المخزنة في المكثف بالعلاقة: $w(0) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V_0^2$



بتطبيق قانون كيرشوف الأول على العقدة المبينة في أعلى الدارة نجد:

$$i_C + i_R = 0$$

وكما نعلم فإن:

$$i_C = C \cdot \frac{dv}{dt} \quad , i_R = \frac{v}{R}$$

وبالتالي:

$$C \cdot \frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} = 0$$

بتقسيم العلاقة على سعة المكثف C تصبح العلاقة بالشكل: $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = 0$

وهي معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى، كونها تتضمن المشتق الأول للجهد. لحلها نعيد ترتيب الحدود، حيث نضرب حدود المعادلة بـ dt ونقسمها على v كما يلي:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dt}{\mathrm{RC}}$$

بتكامل الطرفين نجد:

$$\ln v = -\frac{t}{RC} + \ln A$$

حيث A ثابت التكامل، وبالتالي:

$$\ln\frac{v}{A} = -\frac{t}{RC} \Rightarrow v(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

ووفقاً للشروط الابتدائية فإن:

$$v(0) = A = V_0$$

وبالتالي:

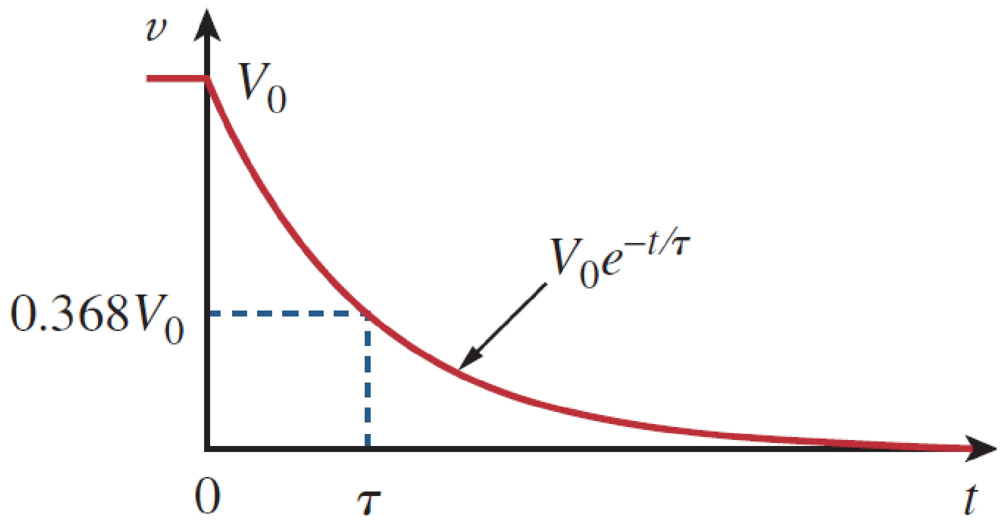
$$v(t) = V_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

تبين العلاقة الأخيرة أن استجابة الجهد لدارة **RC** تمثل تابع أسي من الجهد الأولي، وذلك لأن هذه الاستجابة ناجمة عن الطاقة المخزنة في المكثف، وبالخصائص الفيزيائية للدارة، وليس بسبب مؤثر خارجي كجهد أو تيار المنبع مثلاً، ولذلك تسمى هذه الاستجابة بالاستجابة الطبيعية للدارة **(the natural response of the circuit)**.

تشير الاستجابة الطبيعية للدارة (the natural response of the circuit) إلى السلوك الذاتي للدارة من حيث الجهد والتيار، وذلك في حالة عدم وجود منابع تغذية خارجية فيها.

فالاستجابة الطبيعية تعتمد على طبيعة الدائرة فقط، عند عدم وجود منبع تغذية خارجي. وفي الو اقع ، فإن الدارة لديها استجابة فقط بسبب الطاقة المخزنة في المكثف في الحالة الابتدائية.

يبين الشكل منحني الاستجابة الطبيعية للدارة، حيث يظهر أنه في اللحظة t=0 تكون الشروط الابتدائية صحيحة وفقاً للمعادلة $v(0)=V_0$، وبزيادة الزمن t ينخفض الجهد حتى يصل إلى الصفر.



يتم التعبيرعن السرعة التي ينخفض بها الجهد من خلال مصطلح الثابت الزمني، والذي يرمزله بالحرف اليوناني الصغير τ (تاو).

يعرف الثابت الزمني للدارة بأنه الزمن اللازم لتخامد منحني الاستجابة إلى قيمة 1/e أو 36.8% من قيمته الابتدائية.

بتعويض $t=\tau$ **في المعادلة**:

$$v(t) = V_0 \cdot e^{-t/RC} = V_0 \cdot e^{-t/\tau}$$

يكون:

$$V_0 \cdot e^{-t/RC} = V_0 \cdot e^{-t/\tau} = V_0 \cdot e^{-1} = 0.368V_0$$

باستخدام الآلة الحاسبة، من السهل أن إظهار أن النسبة $v(t)/V_0$ هي كما موضحة في الجدول 1 التالي:

TABLE 1

Values of $v(t)/V_0 = e^{-t/\tau}$.

t	$v(t)/V_0$
τ	0.36788
2τ	0.13534
3τ	0.04979
4τ	0.01832
5τ	0.00674

جَامعة المَنارة
MANARA UNIVERSITY

TABLE 1	
Values of $v(t)/V_0 = e^{-t/\tau}$.	
t	$v(t)/V_0$
τ	0.36788
2τ	0.13534
3τ	0.04979
4τ	0.01832
5τ	0.00674

يتضح من الجدول 1 أنه بعد 5 أمثال الثابت الزمني (5τ) فإن الجهد $v(t)$ يصبح أقل من 1% من القيمة الابتدائية للجهد (V_0). وفقاً لذلك يمكننا الافتراض بأن المكثف يمكن شحنه أو تفريغه بالكامل خلال خمس أمثال الثابت الزمني أي خلال (5τ)، وبعبارة أخرى، تستغرق الدارة زمن مقداره (5τ) للوصول إلى حالتها النهائية أو المستقرة.

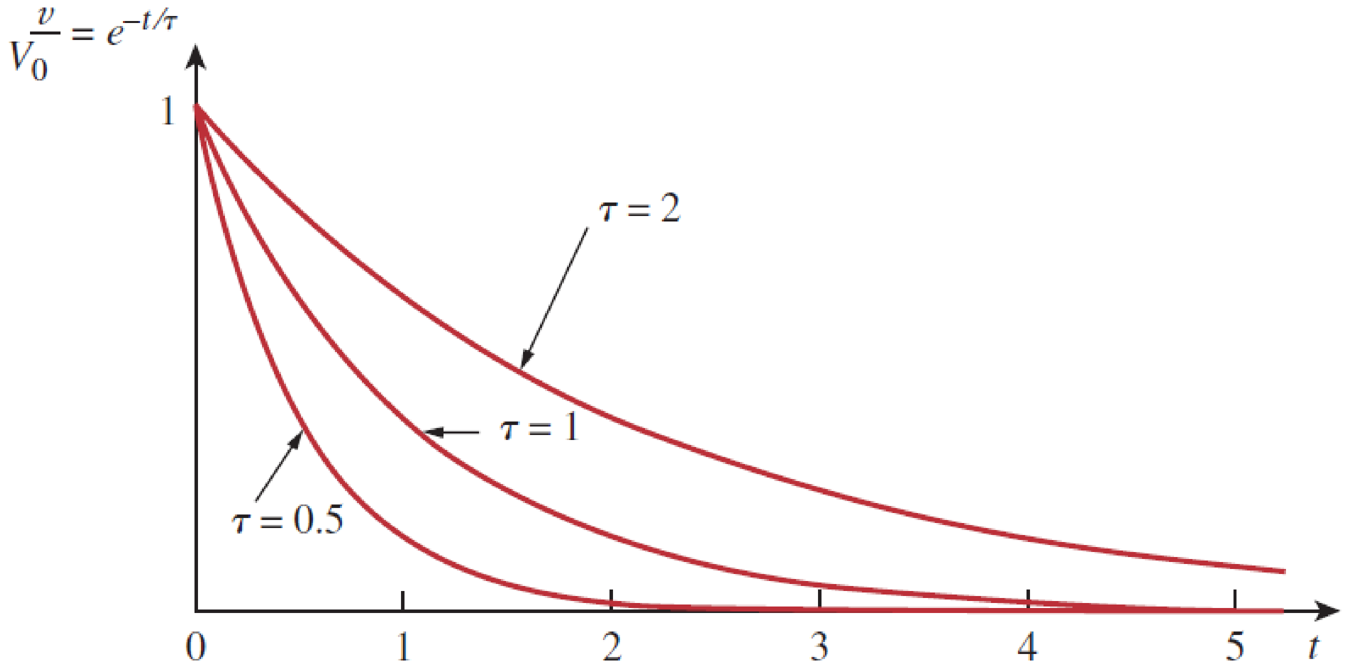
نلاحظ من الجدول أيضاً أنه في كل فترة زمنية يتم خفض للجهد بنسبة 36.8% عن قيمته السابقة:

$$v(t+\tau)=v(t)/e=0.368v(t)$$

بغض النظرعن قيم t.

نلاحظ من العلاقة $V_0 \cdot e^{-t/RC} = V_0 \cdot e^{-t/\tau} = V_0 \cdot e^{-1} = 0.368V_0$

كلما كان الثابت الزمني أصغر، كلما ازداد انخفاض الجهد بسرعة، أي كلما كانت الاستجابة أسرع. يوضح الشكل التالي منحني الاستجابة لدارة ذات ثابت زمني صغير، حيث تظهر الاستجابة السريعة في الوصول إلى الحالة المستقرة أو النهائية، أي يحدث فيه تبديد سريع للطاقة المخزنة في المكثف، في حين أن الدارة ذات الثابت الزمني الأكبر تعطي استجابة بطيئة وبالتالي تستغرق وقت أطول في الوصول إلى الحالة المستقرة أو النهائية.



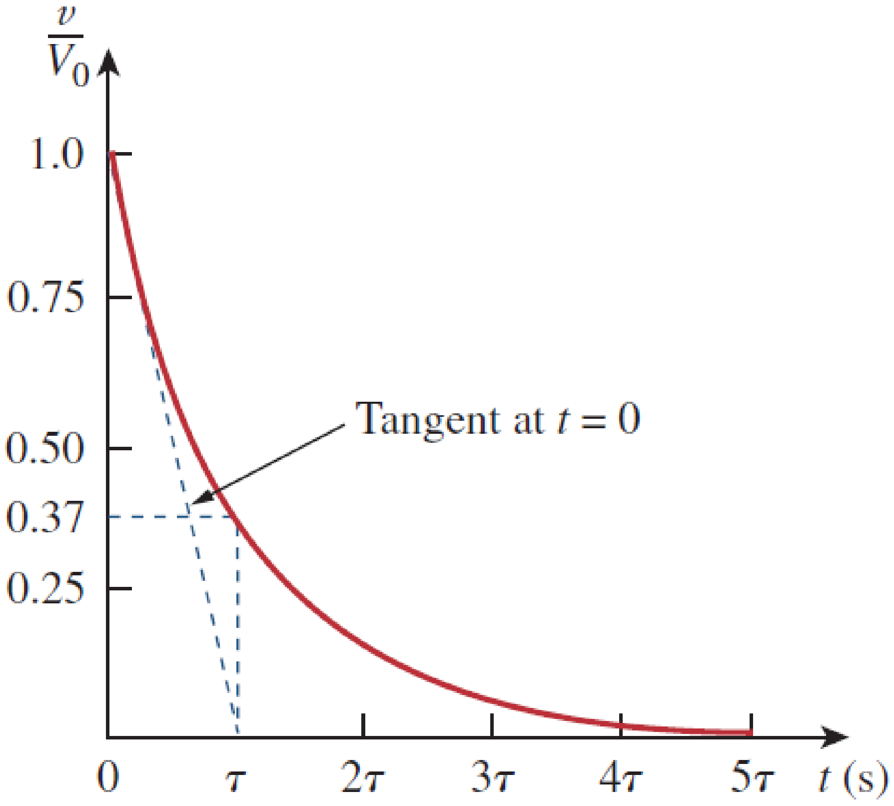
في كل الأحوال، سواء أكان الثابت الزمني صغيراً أو كبيراً فإن الدارة ستصل إلى الحالة المستقرة بعد خمس أمثال الثابت الزمني، أي بعد **(5τ)**.

يمكن تعريف الثابت الزمني من منظور آخر. من المعادلة :

$$v(t) = V_0 \cdot e^{-t/RC} = V_0 \cdot e^{-t/\tau}$$

نقوم باشتقاق v(t) في اللحظة t=0، فنجد:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v}{V_0}\right)\bigg|_{t=0} = -\frac{1}{\tau} \cdot e^{-t/RC}\bigg|_{t=0} = -\frac{1}{\tau}$$



وبالتالي، فإن الثابت الزمني يعبر عن معدل التخامد الابتدائي، او الزمن المستغرق للتخامد من الواحدة إلى الصفر، وذلك عند فرض أن معدل التخامد ثابت. تفسير الميل الابتدائي للثابت الزمني غالباً ما يستخدم في المخبر للحصول على τ من منحني الاستجابة على راسم الإشارة. حيث يتم رسم المماس في اللحظة t=0 لمنحني الاستجابة كما هو موضح بالشكل. المماس يقطع محور الزمن في النقطة t=τ.

من العلاقة: $v(t) = V_0 \cdot e^{-t/RC} = V_0 \cdot e^{-t/\tau}$

يمكن الحصول على علاقة التيار: $i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{V_0}{R} \cdot e^{-t/RC}$

الطاقة المنتشرة والمبددة في المقاومة تساوي:

$$p(t) = v \cdot i_R = V_0 \cdot e^{-t/RC} \cdot \frac{V_0}{\mathrm{R}} \cdot e^{-t/RC} = \frac{V_0^2}{\mathrm{R}} \cdot e^{-2t/RC}$$

الطاقة المستهلكة في المقاومة حتى اللحظة t تساوي:

$$W_R(t) = \int_0^t p(t) \cdot dt = \int_0^t \frac{V_0^2}{R} \cdot e^{-2t/\tau} \cdot dt$$

$$= \frac{\tau \cdot V_0^2}{R} \cdot e^{-2t/\tau}\Big|_0^t = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V_0^2 \cdot \left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}}\right), \qquad \tau = RC$$

$$W_R(t) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V_0^2 \cdot \left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}}\right)$$

نلاحظ من العلاقة الأخيرة أنه عندما $t \rightarrow \infty$ فإن: $W_R(\infty) \rightarrow \frac{1}{2} \cdot C \cdot V_0^2$

وهو نفس قيمة الطاقة الابتدائية المخزنة في المكثف $W_C(0)$. وهذه الطاقة هي التي تستهلك في نهاية المطاف ضمن المقاومة.

الخلاصة

مفتاح العمل في دارة RC الخالية من منبع التغذية يتم من خلال ايجاد:

1. الجهد الابتدائي $v(t)=V_0$ المطبق على المكثف.
2. الثابت الزمني τ.

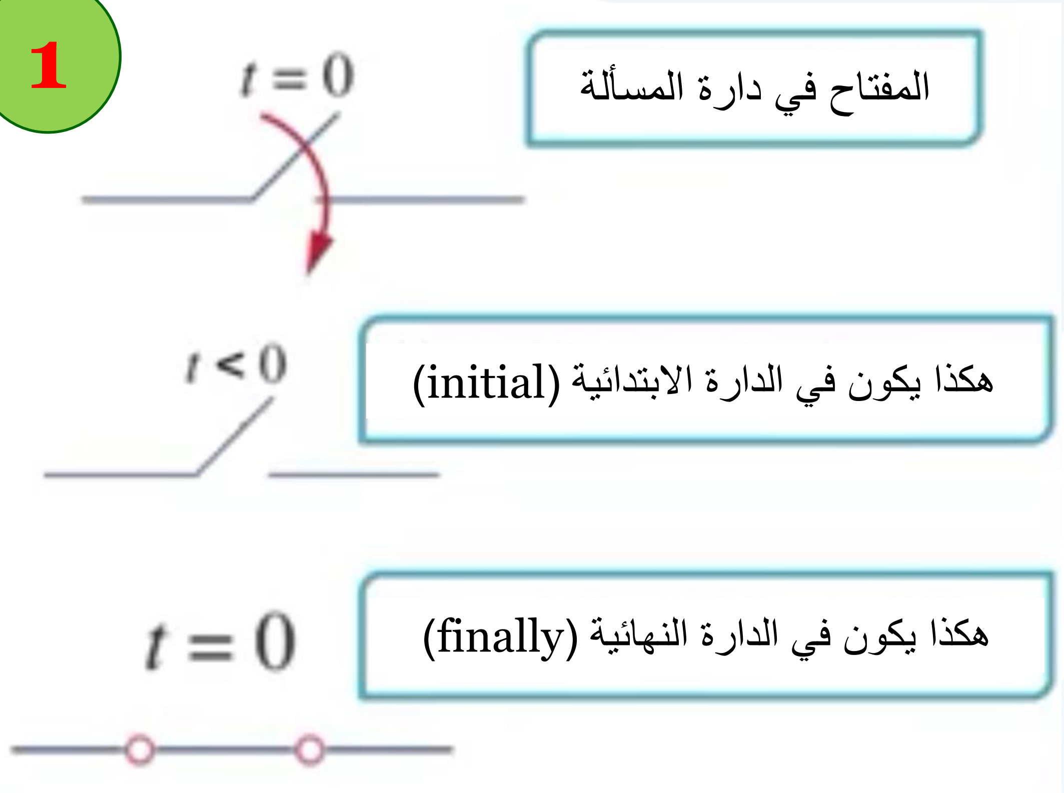
وفق البندين السابقين، نحصل على الاستجابة كجهد المكثف $v_C(t) = v(t) = V_0 \cdot e^{-t/RC} = V_0 \cdot e^{-t/\tau}$

بمجرد الحصول على جهد المكثف أول مرة، يمكن تحديد العديد من المتغيرات (تيار المكثف i_C، جهد المقاومة v_R، وتيار المقاومة i_R). ومن إيجاد الثابت الزمني $\tau=RC$، يتم حساب المقاومة R والتي غالباً ما تكون مقاومة ثيفينين $R=R_{th}$ بعد حذف المكثف من الدارة.

قبل البدء بحل المسائل يجب التعرف على حالات المفتاح في الدارة:

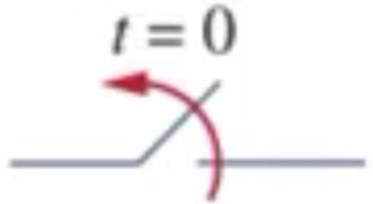
عند استخدام المفتاح في الدارة النهائية (Finally) نحرك المفتاح باتجاه السهم شرط أن تتغير حالة المفاتيح (مثلاً من مغلق إلى مفتوح أو بالعكس). فإذا لم تتغير حالة المفتاح فهذا يعني أن الدارة الابتدائية (initial) عكس السهم:

1

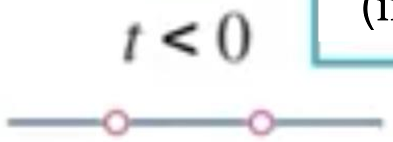


2

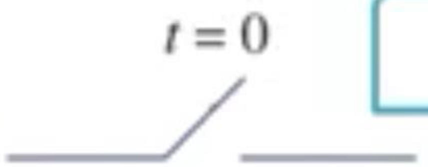
المفتاح في دارة المسألة



هكذا يكون في الدارة الابتدائية (initial)

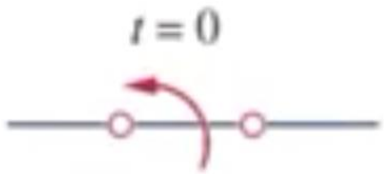


هكذا يكون في الدارة النهائية (finally)

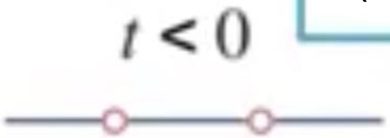


3

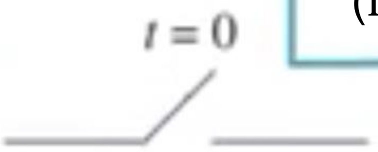
المفتاح في دارة المسألة



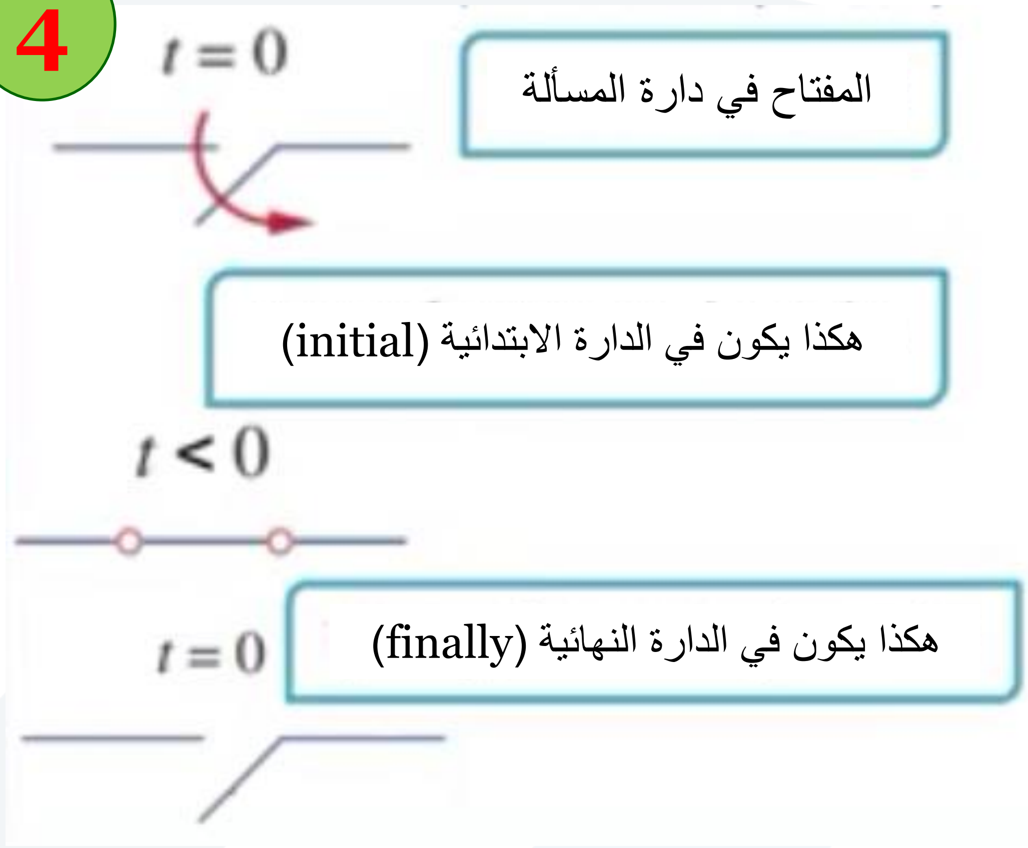
هكذا يكون في الدارة الابتدائية (initial)



هكذا يكون في الدارة النهائية (finally)

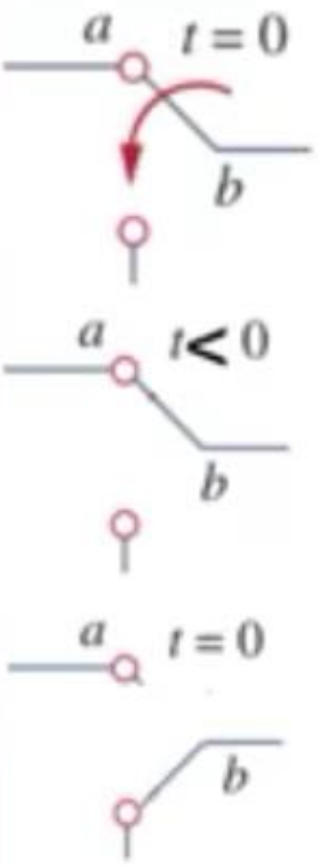


4



$t = 0$
المفتاح في دارة المسألة
هكذا يكون في الدارة الابتدائية (initial)
$t < 0$
$t = 0$
هكذا يكون في الدارة النهائية (finally)

5



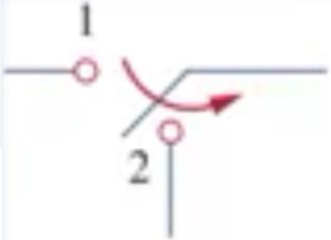
المفتاح في دارة المسألة

هكذا يكون في الدارة الابتدائية (initial)

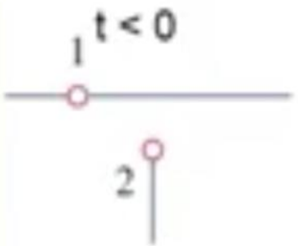
هكذا يكون في الدارة النهائية (finally)

6

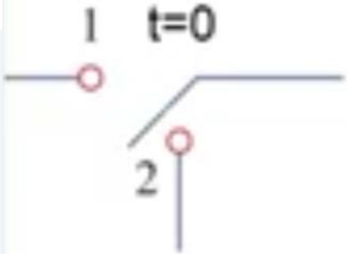
المفتاح في دارة المسألة



هكذا يكون في الدارة الابتدائية (initial)

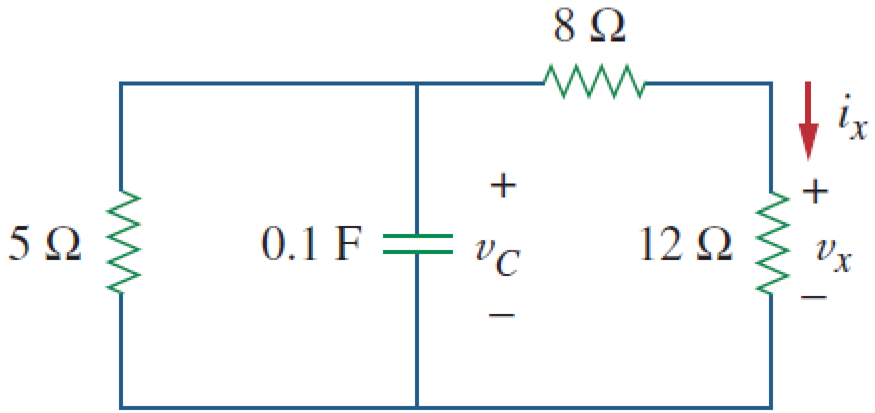


هكذا يكون في الدارة النهائية (finally)



أمثلة

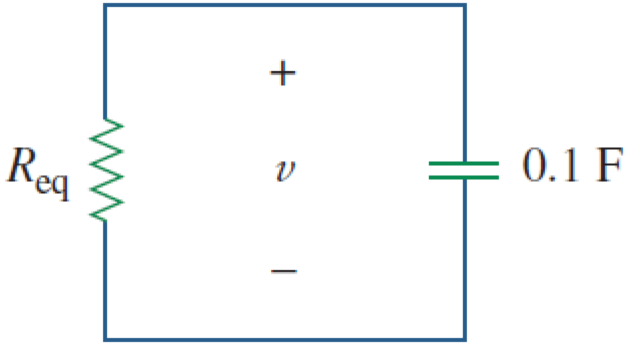
لتكن لدينا الدارة المبينة بالشكل، حيث $v_C(0)=15V$. المطلوب حساب v_C و v_x و i_x من أجل $t>0$.



الحل:

بداية يجب تحويل الدارة وجعلها متوافقة مع معيار دارة RC غير الحاوية على منبع تغذية والمكونة فقط من مقاومة ومكثف. لذلك لا بد من مكافئة المقاومات بعد عزل المكثف (بالنسبة لأقطاب المكثف) والحصول على المقاومة المكافئة وهي مقاومة ثيفينين.

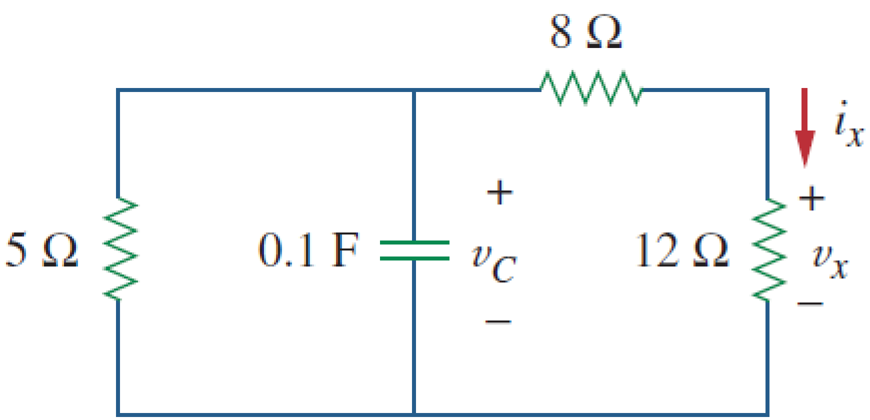
هدفنا الأول هو الحصول على جهد المكثف v_C، ومنه يمكن الحصول على v_x و i_C.



$$R_{eq} = \frac{5 \times (8+12)}{5+8+12} = \frac{100}{25} = 4\Omega$$

بناء على ذلك نحسب قيمة الثابت الزمني τ:

$$\tau = R_{eq} \cdot C = 4 \times 0.1 = 0.4sec$$



وبالتالي:

$$v = V_0 \cdot e^{-t/\tau} = 15 \cdot e^{-t/0.4}$$
$$v_C = v = 15 \cdot e^{-2.5t}[V]$$

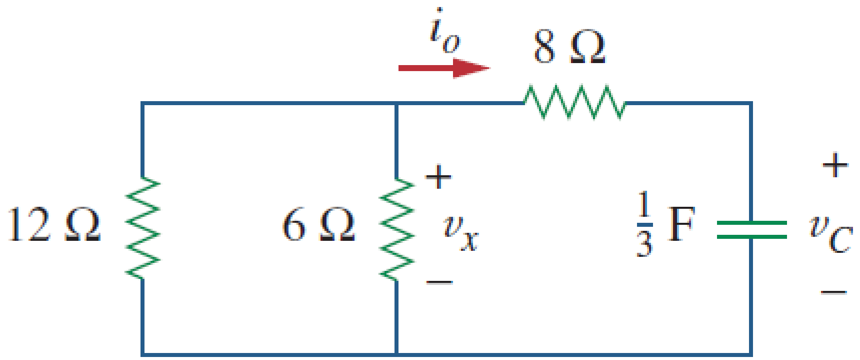
من الدارة الأصلية وباستخدام قاعدة مجزئ الجهد يمكن حساب الجهد v_x:

$$\frac{v_x}{v_C} = \frac{v_x}{v} = \frac{12}{12+8}$$
$$\Rightarrow v_x = 0.6v = 0.6 \times 15 \times e^{-2.5t} = 9 \cdot e^{-2.5t}[V]$$

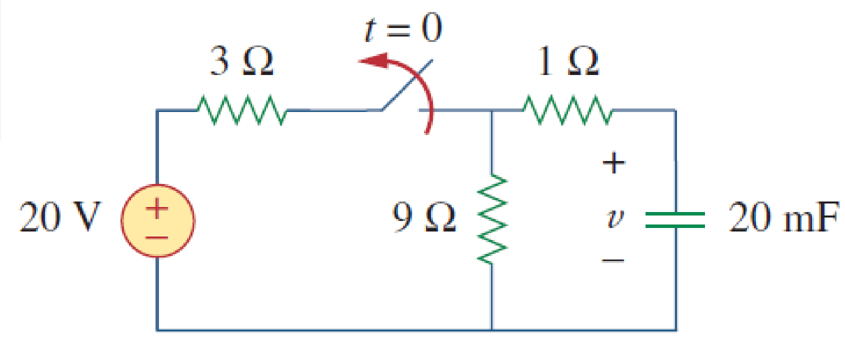
وأخيراً:

$$i_x = \frac{v_x}{12} = \frac{9 \cdot e^{-2.5t}}{12} = 0.75 \cdot e^{-2.5t}[A]$$

لتكن لدينا الدارة المبينة بالشكل، حيث $v_C(0)=60V$. المطلوب حساب v_C و v_x و i_o من أجل $t\geq0$.



Answer: $60e^{-0.25t}$ V, $20e^{-0.25t}$ V, $-5e^{-0.25t}$ A.



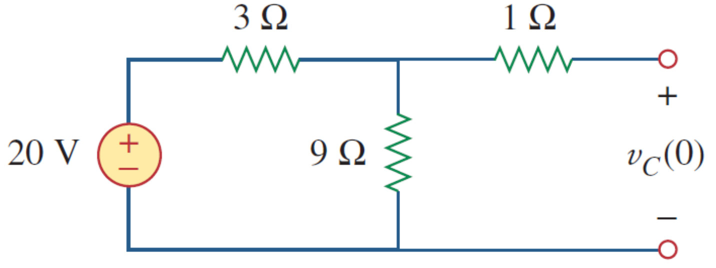
المفتاح في الدارة المبينة بالشكل كان مغلقاً لفترة طويلة، وتم فتحه في اللحظة $t=0$.

المطلوب:

1. إيجاد $v(t)$ من أجل $t\geq 0$.
2. حساب الطاقة الابتدائية المخزنة في المكثف $W_C(0)$.

الحل:

من أجل $t<0$ يكون المفتاح مغلقاً والمكثف في دارة التيار المستمر يجعل الدارة مفتوحة، كما هو موضح بالشكل (a). حسب قاعدة مجزئ الجهد نجد:

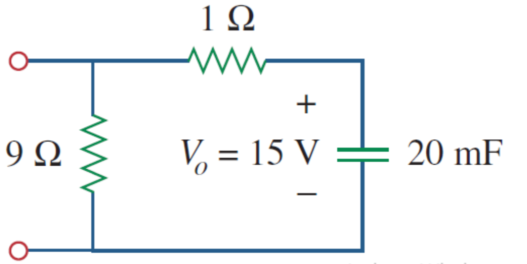


(a)

$$\frac{v_C(t)}{20}=\frac{9}{9+3}\Rightarrow v_C(t)=\frac{9}{9+3}\times 20=15[V]$$

بما أن الجهد المطبق على المكثف لا يمكن أن يتغير فوراً، فإن الجهد المطبق عليه في اللحظة $t=0^-$ هو نفسه في اللحظة $t=0$، أو:

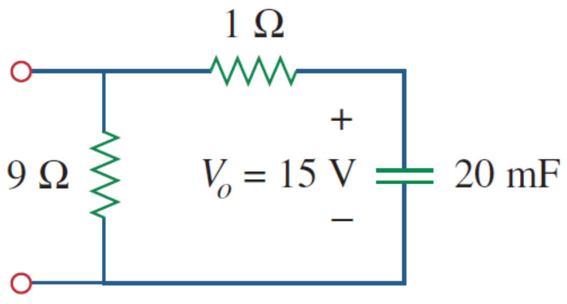
$$v_C(0)=V_0=15[V]$$



(b)

من أجل $t>0$ يكون المفتاح مفتوحاً، وتصبح دارة RC كما هو مبين بالشكل (b).

نلاحظ أن دارة RC هي بدون منبع تغذية، والغاية من المنبع المستقل الموصول في الدارة تسلسلياً أي:



(b)

$$R_{eq} = 1 + 9 = 10[\Omega]$$

نحسب الثابت الزمني: $\tau = R_{eq} \cdot C = 10 \times 20 \times 10^{-3} = 0.2\text{sec}$

وبالتالي فإن الجهد المطبق على المكثف من أجل اللحظة $t \geq 0$ هو:

$$v(t) = V_0 \cdot e^{-t/\tau} = 15 \cdot e^{-t/0.2}[V]$$

أو:

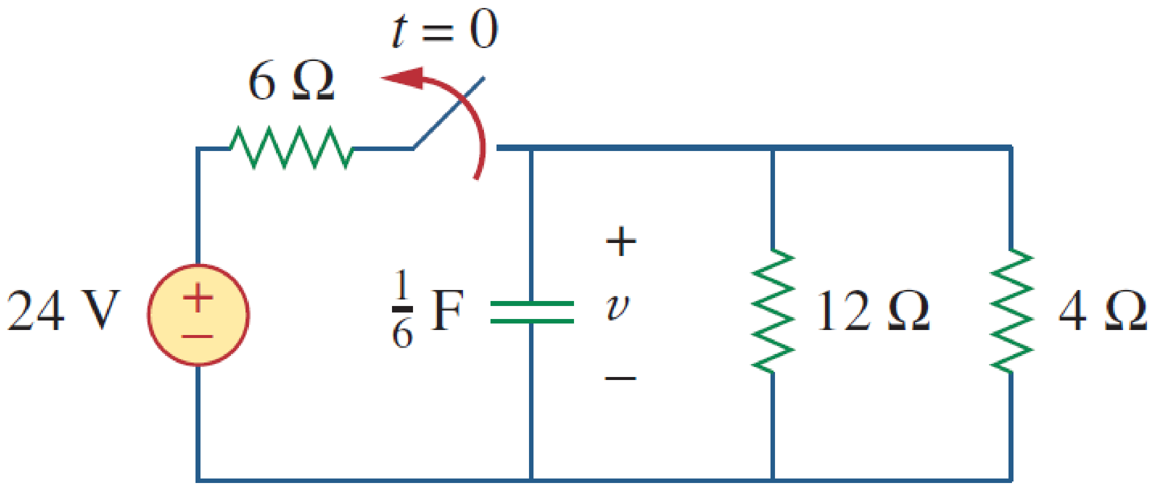
$$v(t) = 15 \cdot e^{-5t}[V]$$

الطاقة الابتدائية المخزّنة في المكثف تساوي:

$$W_C(0) = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V_0^2 = \frac{1}{2} \times 20 \times 10^{-3} \times 15^2 = 2.25[J]$$

المفتاح في الدارة المبينة بالشكل كان مغلقاً لفترة طويلة، وتم فتحه في اللحظة $t=0$. **المطلوب**:

1. إيجاد $v(t)$ من أجل $t\geq 0$.
2. حساب الطاقة الابتدائية المخزنة في المكثف $W_C(0)$.



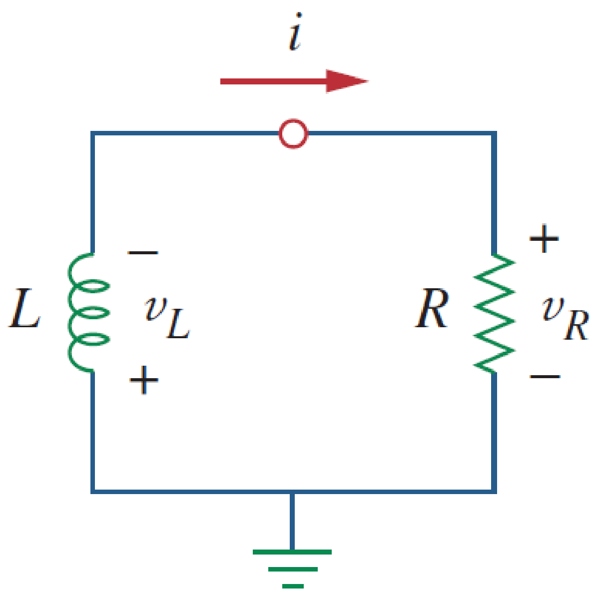
Answer: $8e^{-2t}$ V, 5.333 J.

الاستجابة الأولى لدارة RL

First order-RL

دارة RL بدون منبع تغذية:

يُقصد بدارة RL بدون منبع تغذية: **حالة فصل منبع التيار المستمر بشكل مفاجئ.**

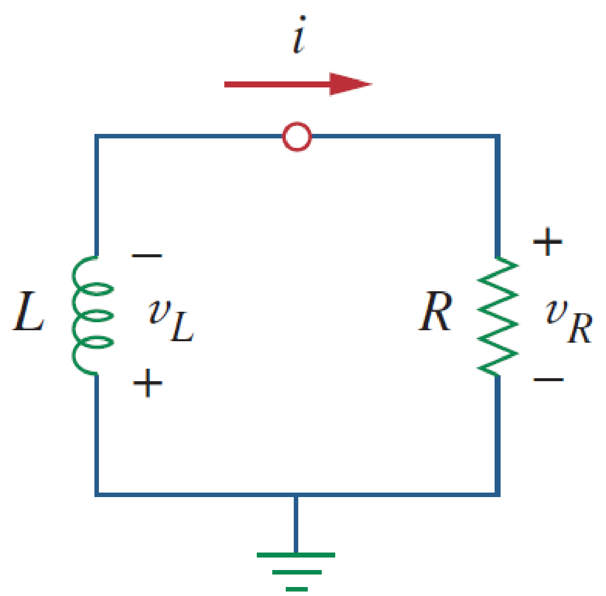


ليكن لدينا دارة تسلسلية مكونة من مقاومة وملف، كما في الشكل. والمطلوب تحديد استجابة الدارة، والتي تمثل التيار المار في الملف $i(t)$.حيث نأخذ بعين الاعتبار أن تيار الملف لا يمكن أن يتغير بشكل لحظي. نفرض أنه في اللحظة الزمنية $t=0$ يسري في الملف تيار ابتدائي I_0:

$$i(0) = I_0$$

يسبب هذا التيار اختزان طاقة في الملف مقدارها:

$$W_L(0)=\frac{1}{2}\cdot L\cdot I_0^2$$



بتطبيق قانون كيرشوف الثاني على حلقة الدارة نجد:

$$v_L+v_R=0$$

بتعويض قيم الجهود نجد:

$$L\cdot\frac{di}{dt}+R\cdot i=0$$

نقسم على L:

$$\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}\cdot i=0$$

نجري بعض العمليات الرياضية لإعادة ترتيب الحدود:

$$\frac{di}{dt}=-\frac{R}{L}\cdot i\Rightarrow di=-\frac{R}{L}\cdot i\cdot dt\Rightarrow\frac{di}{i}=-\frac{R}{L}\cdot dt$$

بالتكامل:

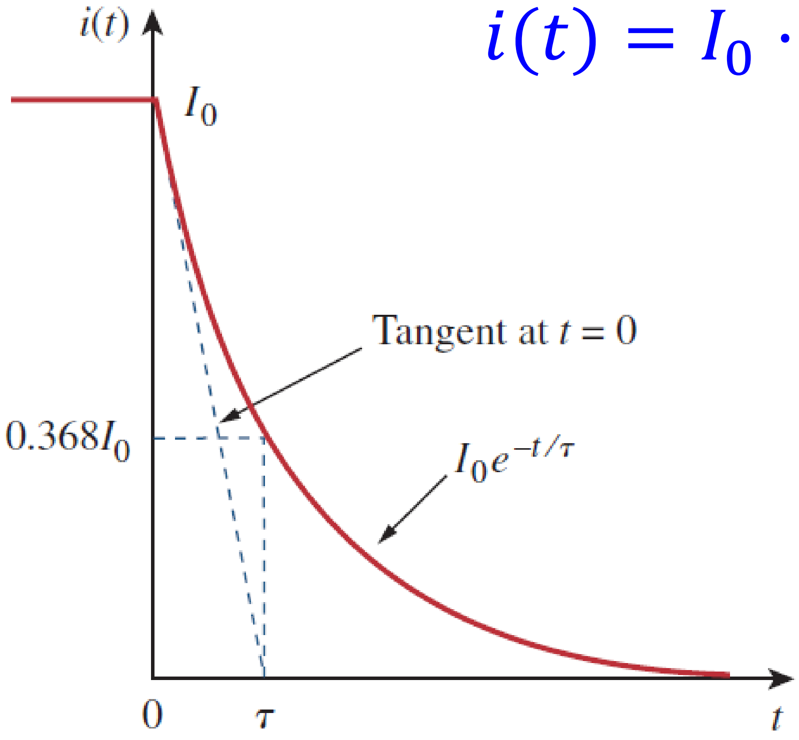
$$\int_{I_0}^{i(t)}\frac{di}{i}=-\int_0^t\frac{R}{L}\cdot dt\Rightarrow \ln i\Big|_{I_0}^{i(t)}=-\frac{Rt}{L}\Big|_0^t\Rightarrow \ln i\,(t)-\ln I_0=-\frac{Rt}{L}+0$$

أو:

$$\ln\frac{i(t)}{I_0}=-\frac{Rt}{L}\Rightarrow i(t)=I_0\cdot e^{-\frac{Rt}{L}}$$

تبين العلاقة الأخيرة $i(t) = I_0 \cdot e^{-Rt/L}$ أن استجابة الدارة **RL** تمثل تخامد للتيار الابتدائي بشكل أسي. ويظهر المنحني المبين شكل هذه الاستجابة، حيث يتضح أن الثابت الزمني لدارة **RL** هو: $\tau = L/R$

وبالتالي يمكن كتابة العلاقة $i(t) = I_0 \cdot e^{-Rt/L}$ كما يلي: $i(t) = I_0 \cdot e^{-t/\tau}$



استناداً للعلاقة السابقة يمكن الحصول على علاقة الجهد المطبق على المقاومة:

$$v_R(t) = i \cdot R = I_0 \cdot R \cdot e^{-t/\tau}$$

الطاقة المنتشرة والمبددة في المقاومة تساوي:

$$p = v_R \cdot i = I_0 \cdot R \cdot e^{-t/\tau} \cdot I_0 \cdot e^{-t/\tau} = I_0^2 \cdot R \cdot e^{-2t/\tau}$$

الطاقة المستهلكة في المقاومة حتى اللحظة t تساوي:

$$W_R(t) = \int_0^t p(t) \cdot dt = \int_0^t I_0^2 \cdot R \cdot e^{-2t/\tau} \cdot dt$$

$$= -\frac{\tau}{R} \cdot I_0^2 \cdot e^{-2t/\tau}\Big|_0^t = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I_0^2 \cdot (1 - e^{-2t/\tau}), \tau = L/R$$

نلاحظ من العلاقة الأخيرة أنه عندما $t \rightarrow \infty$ فإن:

$$W_R(\infty) \rightarrow \frac{1}{2} \cdot L \cdot I_0^2$$

وهي نفس قيمة الطاقة الابتدائية المخزنة في الملف $W_L(0)$. وهذه الطاقة هي التي تستهلك في نهاية المطاف ضمن المقاومة.

الخلاصة

مفتاح العمل في دارة RL الخالية من منبع التغذية يتم من خلال ايجاد:

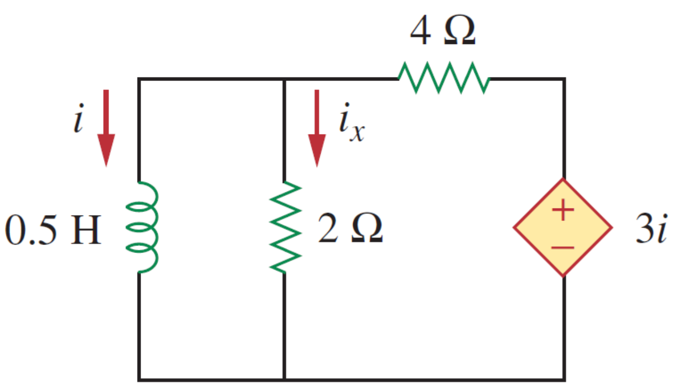
1. التيارالابتدائي $i(t)=I_0$ المارفي الملف.
2. الثابت الزمني τ للدارة.

وفق البندين السابقين، نحصل على الاستجابة التي تمثل تيارالملف :

$$i_L(t) = i(t) = I_0 \cdot e^{-Rt/L} = I_0 \cdot e^{-t/\tau}$$

بمجرد الحصول على التيار المار في الملف أول مرة i_L، يمكن تحديد العديد من المتغيرات (جهد الملف v_L، جهد المقاومة v_R، وتيارالمقاومة i_R). ومن ايجاد الثابت الزمني $\tau=L/R$، يتم حساب المقاومة الكلية (المكافئة) R والتي غالباً ما تكون مقاومة ثيفينين $R=R_{th}$ المحسوبة بالنسبة لأقطاب الملف بعد حذفه من الدارة.

أمثلة



لتكن لدينا الدارة المبينة بالشكل، بفرض $i_L(0)=10\ A$. المطلوب حساب $i(t)$ و $i_x(t)$.

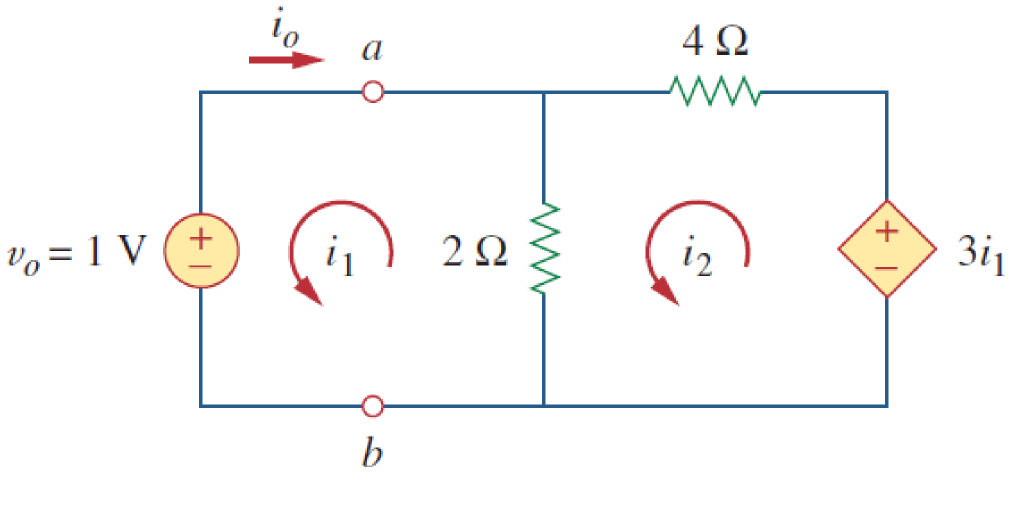
الحل:

يمكن حل المسألة بطريقتين: الطريقة الأولى بالحصول على المقاومة المكافئة بالنسبة لأقطاب الملف بعد نزعه من الدارة، ومن ثم حساب التيار fاستخدام العلاقة:

$$i_L(t) = i(t) = I_0 \cdot e^{-Rt/L} = I_0 \cdot e^{-t/\tau}$$

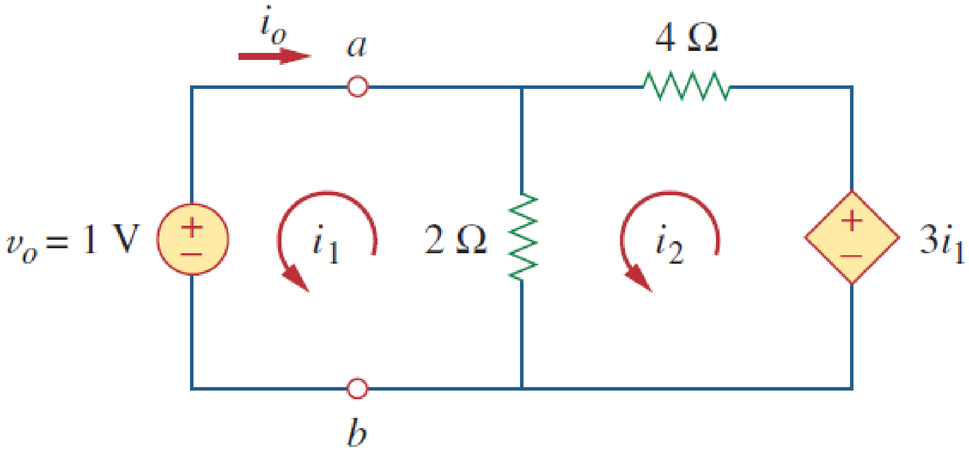
الطريقة الثانية هي بالبدء من الصفر باستخدام قانون كيرشوف الثاني.

مهما كانت الطريقة المستخدمة، فمن المفضل دائما حساب قيمة التيار المار في الملف.



(a)

باستخدام الطريقة الأولى: المقاومة المكافئة هي نفسها مقاومة ثيفينين بالنسبة لأقطاب الملف بعد نزعه من الدارة. وبما ان المنبع غير مستقل فإننا نحل الدارة باستبدال الملف بمنبع جهد قيمته 1V كما في الدارة المبينة بالشكل (a)، ثم نطبق طريقة تيارات ماكسويل على الحلقتين:



(a)

$$2i_1 - 2i_2 + 1 = 0 \Rightarrow i_1 - i_2 = -\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$-2i_1 + 6i_2 - 3i_1 = 0 \Rightarrow i_2 = \frac{5}{6} i_1 \quad (2)$$

نعوض (2) في (1) فيكون:

$$i_1 - \frac{5}{6} i_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{i_1}{6} = -\frac{1}{2} \Rightarrow i_1 = -3A \Rightarrow i_0 = -i_1 = 3A$$

وبالتالي:

$$R_{eq} = R_{th} = \frac{v_0}{i_0} = \frac{1}{3} \Omega$$

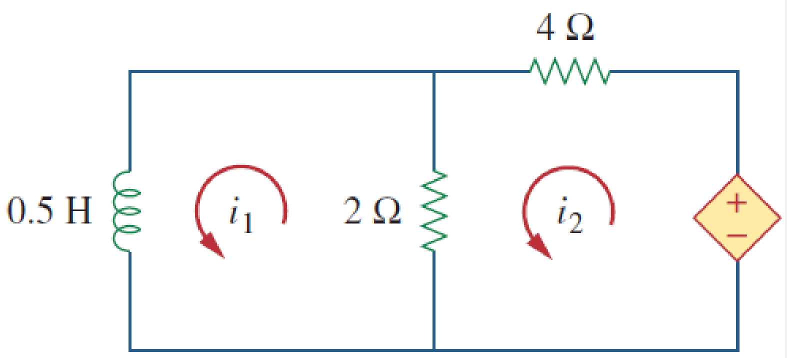
بناء على ذلك نحسب قيمة الثابت الزمني τ:

$$\tau = \frac{L}{R_{eq}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \sec$$

وبالتالي:

$$i(t) = i_L(0) \cdot e^{-t/\tau} = 10 \cdot e^{-2t/3} [A], t > 0$$

باستخدام الطريقة الثانية: نطبق قانون كيرشوف الثاني بشكل مباشر على الدارة المكونة من حلقتين مستقلتين كما هو موضح بالشكل (b):



بالنسبة للحلقة الأولى:

$$\frac{1}{2}\frac{di_1}{dt} + 2(i_1 - i_2) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{di_1}{dt} + 4i_1 - 4i_2 = 0 \qquad (1)$$

بالنسبة للحلقة الثانية:

$$6i_2 - 2i_1 - 3i_1 = 0 \Rightarrow i_2 = \frac{5}{6}i_1 \qquad (2)$$

نعوض (2) في (1) فيكون:

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{2}{3}i_1 = 0 \Rightarrow \frac{di_1}{dt} = -\frac{2}{3}i_1 \Rightarrow \frac{di_1}{i_1} = -\frac{2}{3}dt$$

بما أن $i_1=i$، فإننا نستطيع ان نستبدل i_1 بـ i في التكامل:

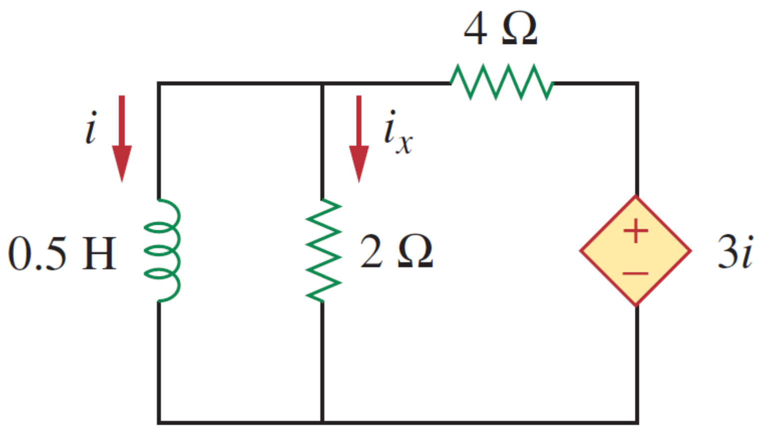
$$\ln i\Big|_{i(0)}^{i(t)} = -\frac{2}{3}t\Big|_0^t \Rightarrow \ln\frac{i(t)}{i(0)} = -\frac{2}{3}t$$

باعتماد صيغة القوة لـ e نجد:

$$i(t) = i(0) \cdot e^{-(2/3)t} = 10 \cdot e^{-(2/3)t} [A], t > 0$$

وهي نفس النتيجة التي حصلنا عليها باستخدام الطريقة الأولى.

الجهد المطبق على الملف:

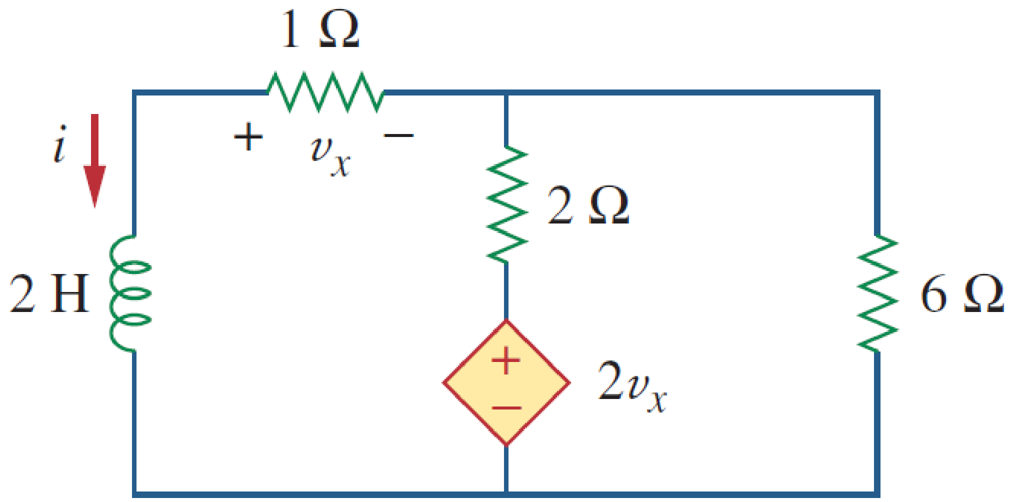


$$V = L\frac{di}{dt} = 0.5 \times 10 \times (-\frac{2}{3}) \cdot e^{-(2/3)t} = -\frac{10}{3} \cdot e^{-(2/3)t} [V]$$

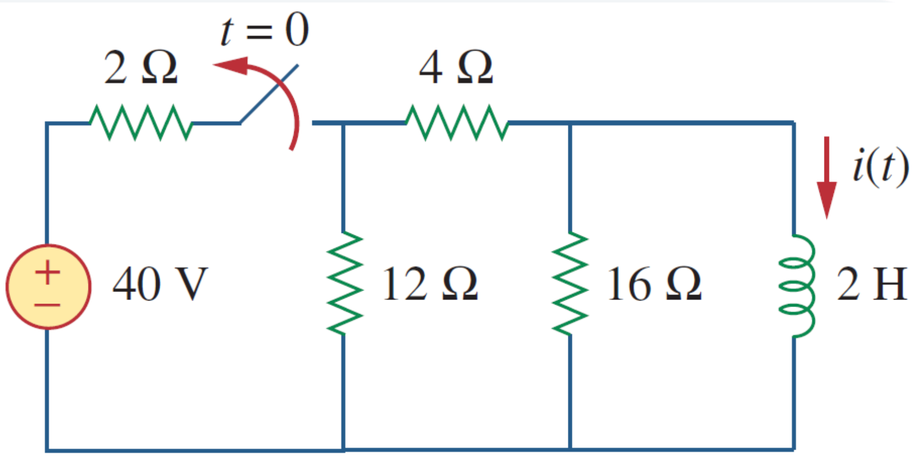
بما أن الملف موصول على التفرع مع المقاومة 2Ω فإن:

$$i_x(t) = \frac{v}{2} = -1.6667 \cdot e^{-(2/3)t} [A], t > 0$$

لتكن لدينا الدارة المبينة بالشكل، بفرض $i_L(0)=20\ A$. المطلوب حساب i و v_x.



Answer: $12e^{-2t}$ A, $-12e^{-2t}$ V, $t > 0$.

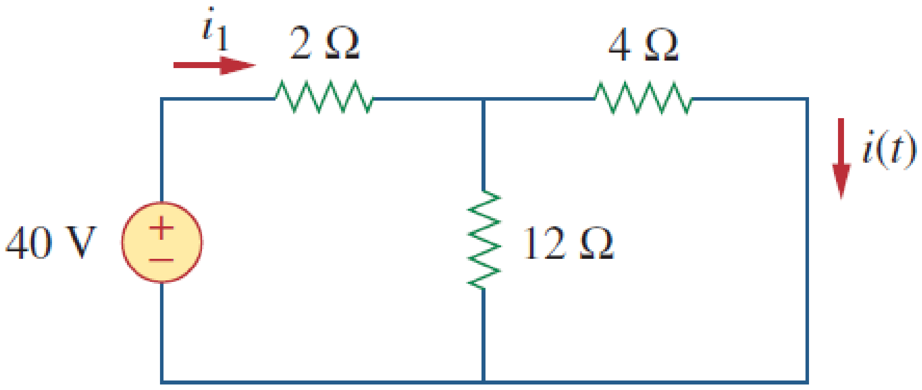


المفتاح في الدارة المبينة بالشكل كان مغلقاً لفترة طويلة، وتم فتحه في اللحظة t=o. **المطلوب**: إيجاد i(t) من أجل t>o.

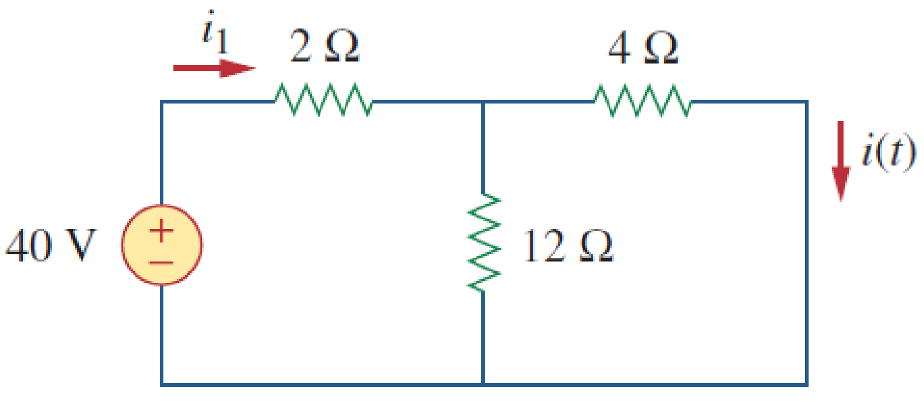
الحل:

من أجل t<o يكون المفتاح مغلقاً والملف في دارة التيار المستمر يجعل الدارة مقصورة، أي ان المقاومة 16Ω تكون مقصورة بواسطة الملف، كما هو موضح بالشكل (a). مما يجعل وصل المقاومتين 4Ω و 12Ω على التفرع:

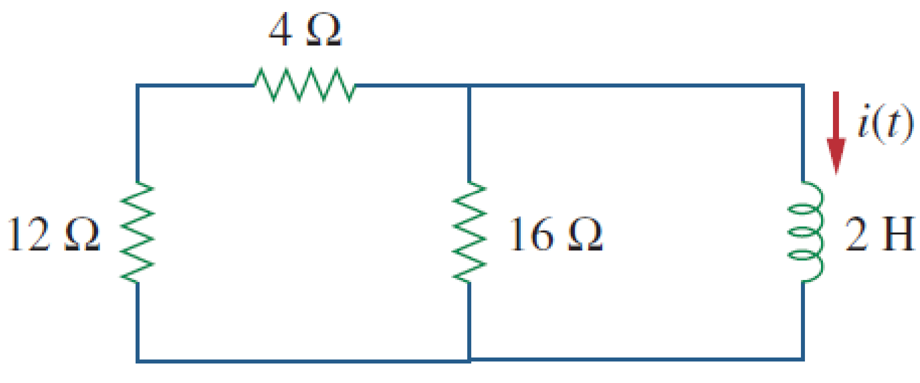
$$\frac{4 \times 12}{4+12} = 3[\Omega] \Rightarrow i_1 = \frac{40}{3+5} = 8[A]$$



(a)



(a)



(b)

يتم حساب قيمة التيار i(t) باستخدام قاعدة مجزئ التيار:

$$i(t) = i_1 \times \frac{12}{12+4} = 8 \times \frac{12}{12+4} = 6[A]\,, t < 0$$

بما أن التيار المار في الملف لا يمكن أن يتغير فوراً، فإن التيار المار في اللحظة $t=0^-$ هو نفسه في اللحظة $t=0$، أو:

$$i(0) = i(0^-) = 6[A]$$

عندما $t>0$ يكون المفتاح مفتوحاً، ويصبح منبع الجهد مفصولاً عن الدارة كما هو مبين بالشكل (b).

أي أننا نحصل على دارة RL بدون منبع تغذية. المقاومة المكافئة للدارة هي:

$$\mathrm{R_{eq}} = \frac{16 \times (12+4)}{16+12+4} = 8[\Omega]$$

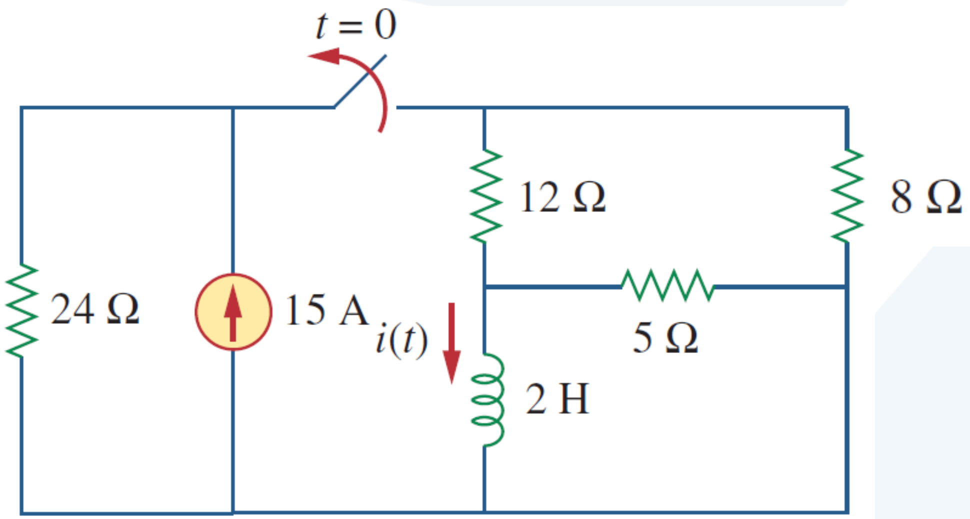
بناء على ذلك نحسب قيمة الثابت الزمني τ:

$$\tau = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{R_{eq}}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}\mathrm{sec}$$

وبالتالي:

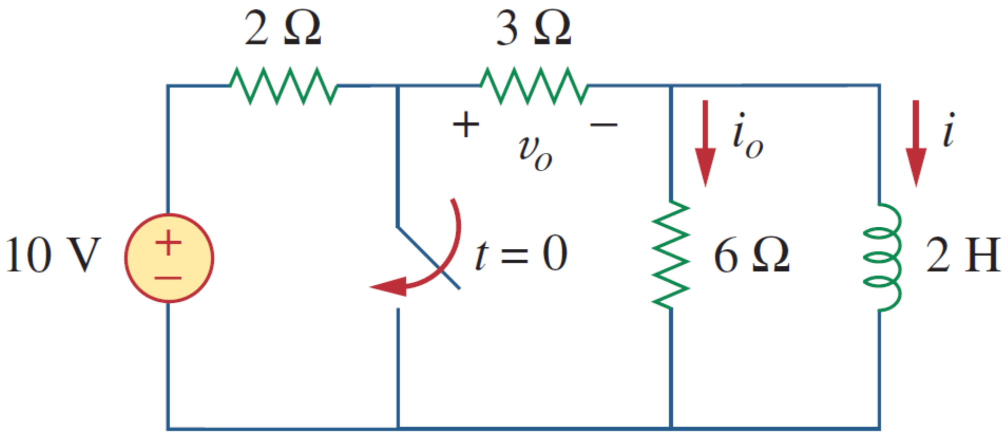
$$i(t) = i(0) \cdot e^{-t/\tau} = 6 \cdot e^{-4t}[A]$$

من أجل الدارة المبينة بالشكل. المطلوب: إيجاد i(t) من أجل t>o.



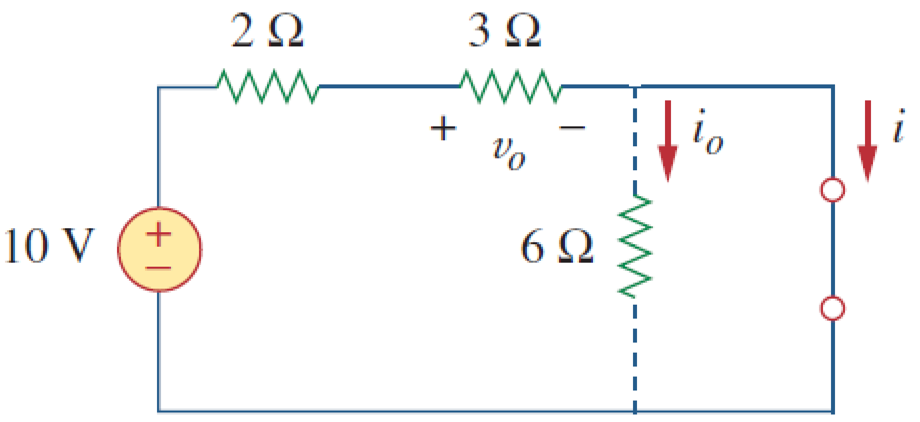
Answer: $5e^{-2t}$ A, $t > 0$.

جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY



لتكن لدينا الدارة المبينة بالشكل. المطلوب: إيجاد i ، i_o و v_o لكامل الزمن، وذلك بفرض أن المفتاح كان مفتوحاً لفترة زمنية طويلة.

الحل: نبدأ أولا بإيجاد قيمة تيار الملف i:



(a)

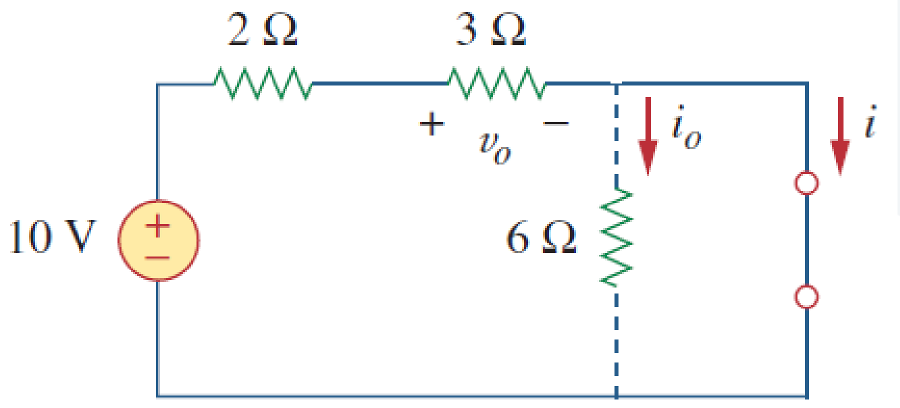
حسب وضعية المفتاح فإنه عند اللحظة $t<o$ يكون مفتوحاً. في هذه الحالة يعمل الملف على تشكيل دارة قصر لأن منبع التغذية مستمر كما في الشكل (a). وفق لذلك، وكما يظهر من الدارة فإن الملف يقصر المقاومة 6Ω، وبالتالي تكون قيمة التيار i_o معدومة.

إذاً:

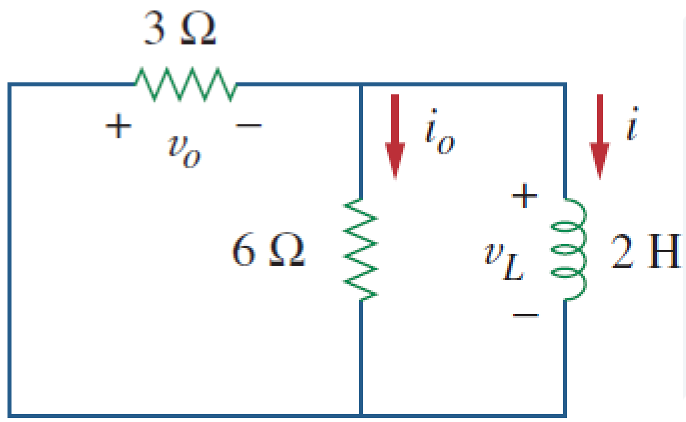
$$i_0 = 0 \Rightarrow i(t) = \frac{10}{2+3} = 2[A] \;\; , t < 0$$

$$v_0 = 3 \cdot i(t) = 3 \times 2 = 6[V] \;\; , t < 0$$

وبالتالي: $i(0) = 2[A]$



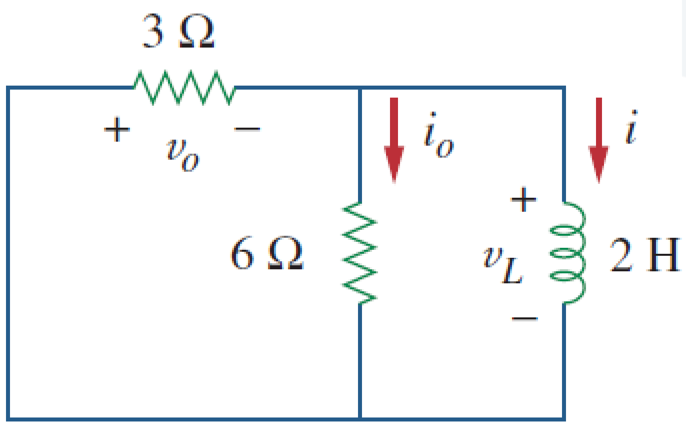
(a)



(b)

في اللحظة t>o يكون المفتاح مغلقاً ، الأمر الذي يسبب قصر منبع التغذية ، وعندها سنحصل على دارة RL بدون منبع تغذية كما هو مبين بالشكل (b). وبالتالي تكون المقاومة المكافئة للدارة بالنسبة لأقطاب الملف بعد نزعه (مقاومة ثيفينين) هي:

$$R_{th} = \frac{3 \times 6}{3+9} = 2[\Omega]$$



(b)

بناء على ذلك نحسب قيمة الثابت الزمني τ:

$$\tau = \frac{L}{R_{th}} = \frac{2}{2} = 1\text{sec}$$

وبالتالي:

$$i(t) = i(0) \cdot e^{-t/\tau} = 2 \cdot e^{-t}[A], t > 0$$

وبما أن الملف موصول على التفرع مع المقاومتين 6Ω و 3Ω فإن:

$$v_0(t) = -v_L = -L\frac{di}{dt} = -2 \cdot (-2e^{-t}) = 4e^{-t}[V], t > 0$$

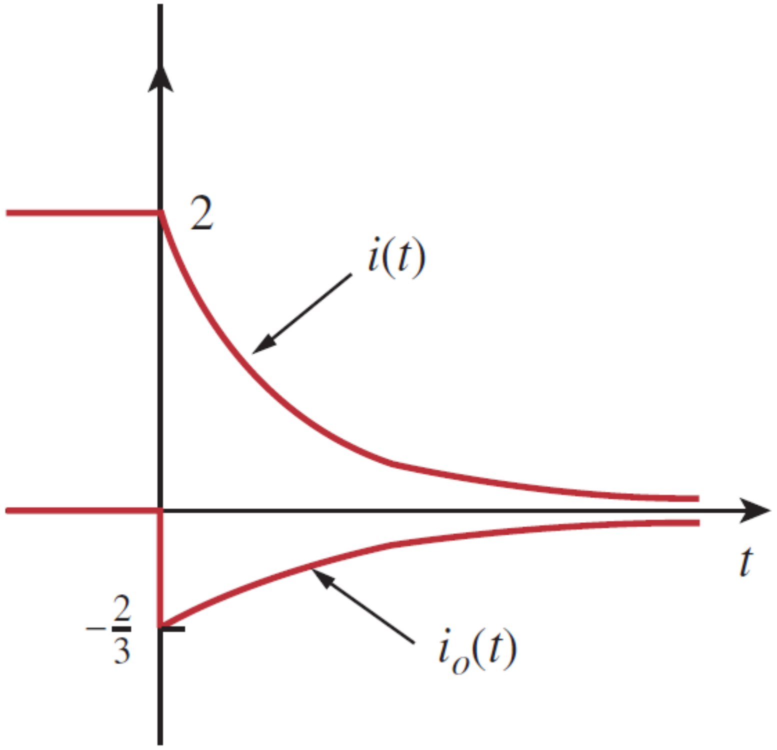
$$i_0(t) = \frac{v_L}{6} = -\frac{2}{3}2e^{-t}[A], t > 0$$

وبالتالي، بالنسبة كامل الزمن:

$$i_0(t) = \begin{cases} 0A & , t < 0 \\ -\frac{2}{3}e^{-t}A & , t > 0 \end{cases}$$

$$v_0(t) = \begin{cases} 6V & , t < 0 \\ 4e^{-t}V & , t > 0 \end{cases}$$

$$i(t) = \begin{cases} 2A & , t < 0 \\ 2e^{-t}A & , t \geq 0 \end{cases}$$



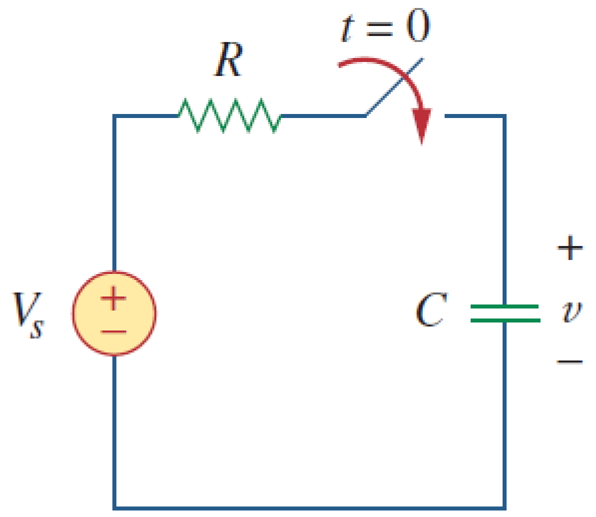
نلاحظ أن تيار الملف يبقى في حالة سريان متواصل حتى اللحظة t=0، بينما تنخفض قيمته خلال المقاومة 6-Ω من 0 حتى -2/3 عند t=0، وينخفض الجهد عبر المقاومة 3- Ω من 6 إلى 4 عند t=0.
نلاحظ أيضاً أن الثابت الزمني هو نفسه بغض النظر عن الخرج. يبين الشكل منحنيات التيارات i و i_o.

استجابة الخطوة (الاستجابة القسرية) لدارة RC

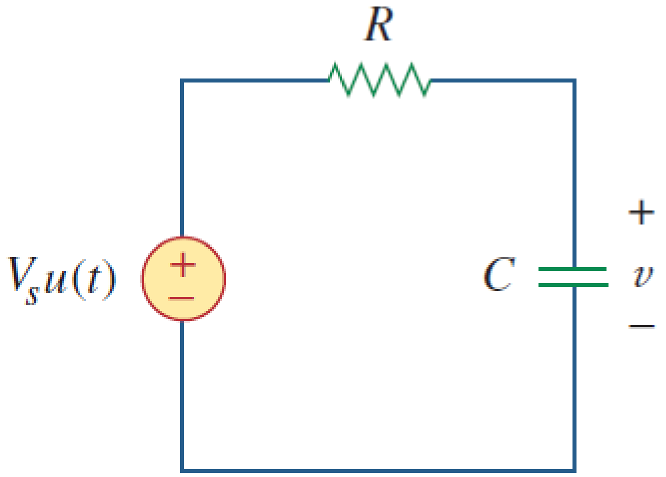
Step Response of an RC Circuit

عند وصل منبع التغذية المستمر DC بشكل مفاجئ في دارة RC فإن تابع الجهد أو التيار للمنبع يكون على شكل تابع خطوة. في هذه الحالة تسمى الاستجابة باستجابة الخطوة.

تعرف استجابة الخطوة للدارة (الاستجابة القسرية)، بأنها سلوكها عند الوصل المفاجئ لمنبع تغذية مستمر (جهد أو تيار) مع الدارة.



(a)

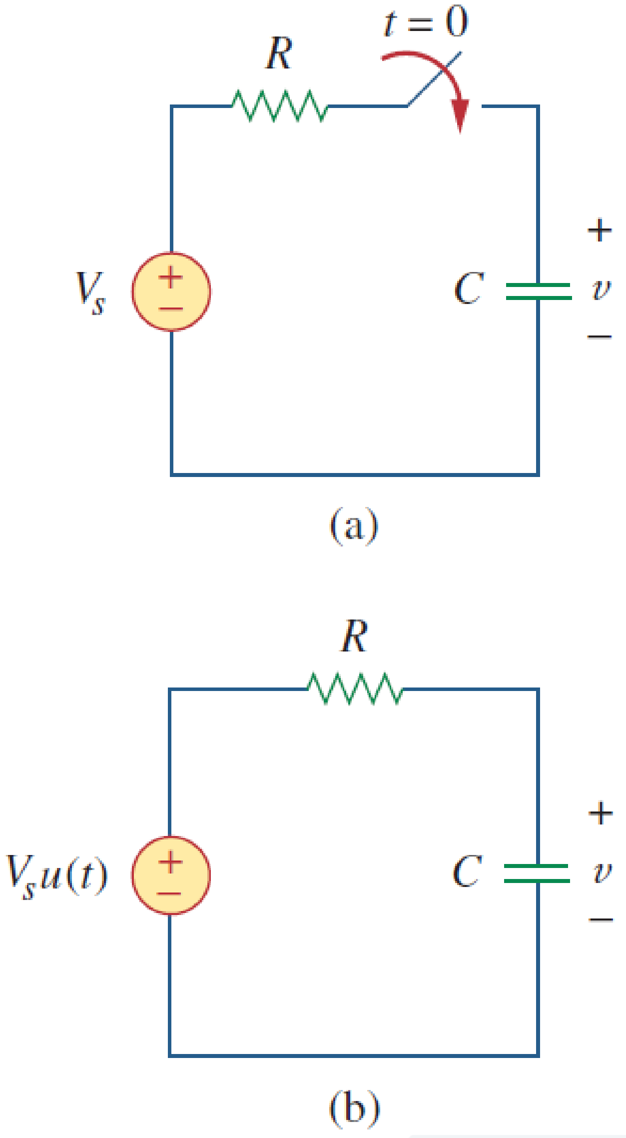


(b)

لتكن لدينا دارة RC المبينة بالشكل (a) والتي يمكن استبدالها بالدارة المبينة بالشكل (b)، حيث V_s هو منبع جهد مستمر ثابت. سيتم مرة أخرى اختيار جهد المكثف كاستجابة للدارة من أجل تحديد قيمته. سنفرض قيمة الجهد الابتدائي المطبق على المكثف V_o، بالرغم من أن ذلك غير ضروري لتحديد استجابة الخطوة، لأن جهد المكثف لا يمكن أن يتغير بشكل سريع وفوري.

$$v(0^-) = v(0^+) = V_0$$

حيث $v(0^-)$ هو جهد المكثف مباشرة قبل إغلاق (وصل) المفتاح، و $v(0^+)$ الجهد مباشرة بعد وصل المفتاح.



بتطبيق قانون كيرشوف الثاني على الدارة نجد:

$$C\frac{dv}{dt}+\frac{v-V_s}{R}=0$$

أو:

$$\frac{dv}{dt}+\frac{v}{RC}=\frac{V_s}{RC}$$

حيث v هو الجهد المطبق على المكثف.

في اللحظة $t>o$ تصبح العلاقة الأخيرة كما يلي:

$$\frac{dv}{dt}+\frac{v}{RC}=\frac{V_s}{RC}\Rightarrow\frac{dv}{dt}=-\frac{v-V_s}{RC}$$

$$\frac{dv}{v-V_s}=-\frac{dt}{RC}$$

$$\frac{dv}{v-V_s}=-\frac{dt}{RC}$$

بتكامل الطرفين وإدخال الشروط الابتدائية يكون:

$$\ln(v-V_s)\Big|_{V_0}^{v(t)}=-\frac{t}{RC}\Big|_0^t \Rightarrow \ln(v(t)-V_s)-\ln(V_0-V_s)=-\frac{t}{RC}+0$$

أو:

$$\ln\frac{v-V_s}{V_0-V_s}=-\frac{t}{RC}$$

بأخذ التابع الأسي للطرفين:

$$\frac{v-V_s}{V_0-V_s}=e^{-\frac{t}{RC}}=e^{-\frac{t}{\tau}},\tau=RC$$

$$v-V_s=(V_0-V_s)\cdot e^{-t/\tau}$$

أو:

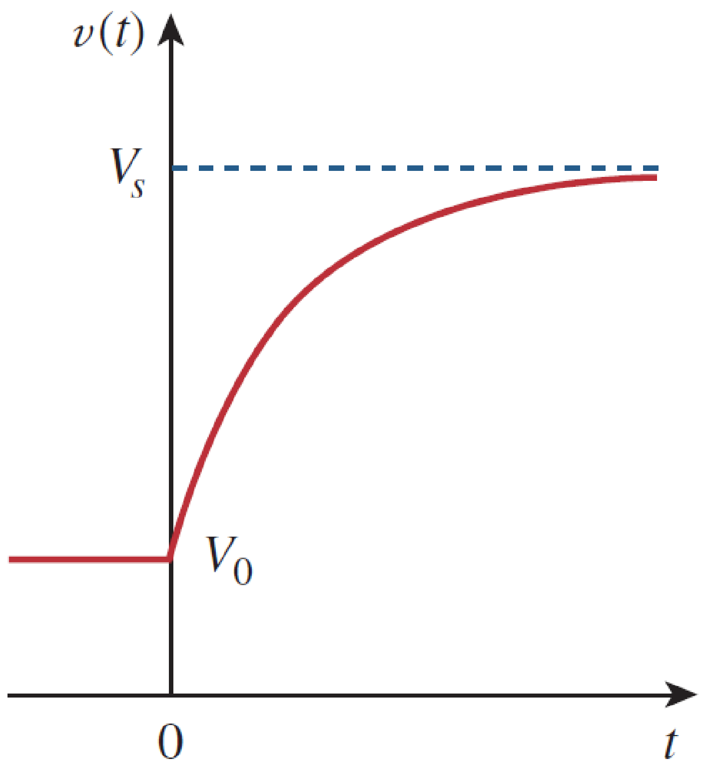
$$v(t)=V_s+(V_0-V_s)\cdot e^{-t/\tau},t>0$$

$$v(t) = V_s + (V_0 - V_s) \cdot e^{-t/\tau}, t > 0$$

وبالتالي:

$$v(t) = \begin{cases} V_0 & , t < 0 \\ V_s + (V_0 - V_s) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} & , t > 0 \end{cases}$$

تسمى الاستجابة في هذه الحالة بالاستجابة الكاملة أو الكلية لدارة RC الناتجة عن تغذيتها المفاجئة بمنبع جهد مستمر DC، وذلك بفرض أن المكثف كان في الحالة الابتدائية مشحوناً. وسبب تسمية الاستجابة بأنها كاملة سنوضحها لاحقاً. فبفرض أن $V_s>V_o$ فإن منحني $v(t)$ يكون كما في الشكل:



بفرض أن المكثف لم يكن مشحوناً في الحالة الابتدائية، فإننا نعوض $V_o = o$ في جملة المعادلات:

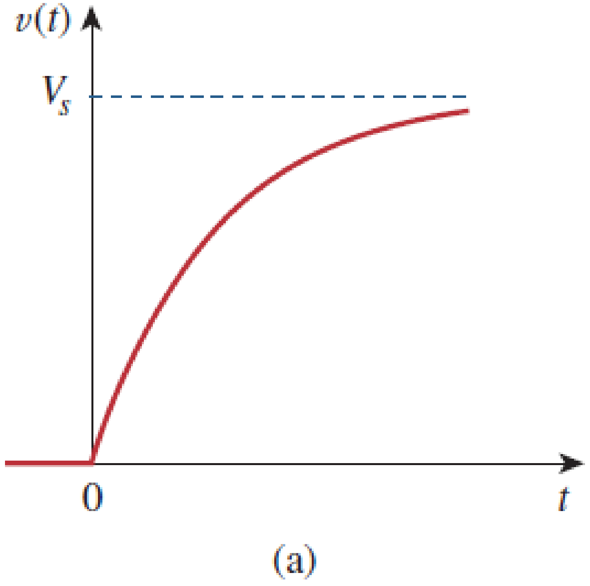
$$v(t) = \begin{cases} V_0, t < 0 \\ V_s + (V_0 - V_s) \cdot e^{-t/\tau}, t > 0 \end{cases}$$

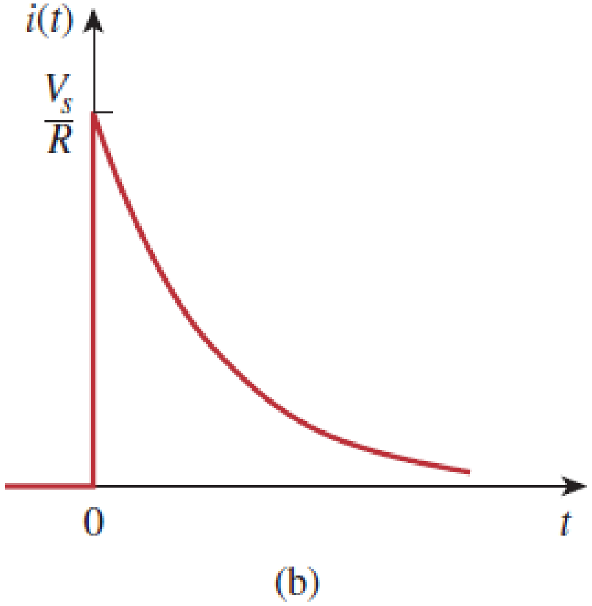
حيث تصبح بالشكل:

$$v(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ V_s \cdot (1 - e^{-t/\tau}), t > 0 \end{cases}$$

تمثل هذه المعادلة استجابة الخطوة الكاملة لدارة RC عندما يكون المكثف غير مشحون في الحالة الابتدائية.
ويمكن حساب التيار المار عبر المكثف من المعادلة:

$$i(t) = C\frac{dv}{dt}$$





$$i(t) = C\frac{dv}{dt} = C\frac{d}{dt}\left(V_s \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)\right)$$

$$i(t) = \frac{C}{\tau} \cdot V_s \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad , \tau = RC \quad , t > 0$$

$$\Rightarrow i(t) = \frac{C}{RC} \cdot V_s \cdot e^{-t/\tau} = \frac{V_s}{R} \cdot e^{-t/\tau}$$

يبين الشكل جانباً منحنيي الجهد المطبق على المكثف $v(t)$، **والتيار المار عبره** $i(t)$.

بدلاً من المرور بالمشتقات كما بينا سابقاً، فإن هناك طريقة مختصرة تعد منهجية لتحديد استجابة الخطوة لدارات RC أو RL. فإذا عدنا من جديد لبحث العلاقة:

$$v(t) = V_s + (V_0 - V_s) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad , t > 0$$

فإننا نجد أن للجهد $v(t)$ (الاستجابة الكلية) مركبتان. وهناك طريقتان لتحليلها إلى هاتين مركبتين:

الطريقة الأولى: هي بتقسيم الاستجابة الكلية إلى استجابة طبيعية *natural response*، واستجابة قسرية (إجبارية) *forced response*.

الطريقة الثانية: هي بتقسيم الاستجابة الكلية إلى استجابة عابرة *transient response*، واستجابة مستقرة *steady-state response*.

انطلاقاً من الطريقة الأولى يمكن كتابة الاستجابة الكلية كما يلي:

Complete response = natural response + forced response

stored energy — independent source

$$v = v_n + v_f$$

حيث:

$$v_n = V_0 \cdot e^{-t/\tau}$$

$$v_f = V_s \cdot (1 - e^{-t/\tau})$$

$$v = v_n + v_f = V_0 \cdot e^{-t/\tau} + V_s \cdot (1 - e^{-t/\tau})$$

تعرفنا سابقاً على الاستجابة الطبيعية v_n (حالة دارة RC و RL بدون مصدر تغذية). الاستجابة v_f هي الاستجابة القسرية التي تنتج في الدارة نتيجة وجود مؤثر خارجي (قوة خارجية)، والتي تتمثل في حالتنا هذه بمنبع الجهد. تعبر هذه الاستجابة عن السلوك الذي تجبر عليه الدارة، أو تضطر للقيام به عند وجود المؤثر الخارجي (منبع التغذية).

وأخيراً فإن الاستجابة الطبيعية تتلاشى (تهمل) مع المركبة العابرة للاستجابة القسرية تاركة فقط المركبة الثابتة (المستقرة) منها (من الاستجابة القسرية).

الطريقة الثانية لتحليل الاستجابة الكلية هي كما يلي:

Complete response = transient response + steady-state response

temporary part　　permanent part

$$v = v_t + v_{ss}$$

حيث:

$$v_t = (V_0 - V_s) \cdot e^{-t/\tau}$$

$$v_{ss} = V_s$$

$$v = v_t + v_{ss} = (V_0 - V_s) \cdot e^{-t/\tau} + V_s$$

الاستجابة العابرة (المؤقتة) v_t، وهي جزء من الاستجابة الكلية، والتي تتلاشى مع مرور الزمن واقترابه من اللانهاية. وبالتالي نعرف الاستجابة العابرة بأنها استجابة مؤقتة تتلاشى مع مرور الزمن.

الاستجابة المستقرة v_{ss}، هي جزء من الاستجابة الكلية، والتي تبقى بعد زوال المركبة العابرة وتلاشيها. وبالتالي نعرف الاستجابة المستقرة بأنها سلوك الدارة لفترة زمنية طويلة بعد وصل منبع التغذية الخارجي.

وفقاً لذلك فإن المركبة الأولى للاستجابة الكلية تتعلق بمنبع التغذية، بينما تتعلق المركبة الثانية بديمومة ردود الفعل (الاستجابات).

في حالات خاصة محددة تكون الاستجابة الطبيعية مساوية ومطابقة للاستجابة العابرة. وكذلك الأمر بالنسبة للاستجابة القسرية والاستجابة المستقرة.

أياً كانت الطريقة المتبعة، فإن الاستجابة الكلية المعبر عنها وفق العلاقة:

$$v(t) = V_s + (V_0 - V_s) \cdot e^{-t/\tau}, t > 0$$

يمكن كتابتها بالشكل:

$$v(t) = v(\infty) + [v(0) - v(\infty)] \cdot e^{-t/\tau}$$

حيث:

$v(o)$ القيمة الابتدائية للجهد في اللحظة $t=o^+$.

$v(\infty)$ القيمة النهائية للجهد (القيمة المستقرة).

وهذا يطابق تماماً القول بأن الاستجابة الكلية هي مجموع الاستجابة العابرة والاستجابة المستقرة.

وفقاً لذلك، يتطلب الحصول على استجابة الخطوة لدارة RC معرفة ثلاث قيم:

1. القيمة الابتدائية لجهد المكثف $v(0)$.
2. القيمة النهائية لجهد المكثف $v(\infty)$.
3. الثابت الزمني τ.

يتم الحصول على البند 1 من الدارة المعطاة من أجل $t<0$، والبندين 2 و 3 من أجل $t>0$.

بمجرد تحديد القيم الثلاث المذكورة، يمكن الحصول على الاستجابة اعتماداً على العلاقة:

$$v(t) = v(\infty) + [v(0) - v(\infty)] \cdot e^{-t/\tau}$$

تنطبق هذه الآلية أيضاً على دارات RL.

نلاحظ أنه إذا تم تغيير وضعية المفتاح في اللحظة $t=t_o$ بدلاً عن اللحظة $t=o$ فسيكون هناك تأخير زمني في الاستجابة وتصبح المعادلة السابقة بالشكل:

$$v(t) = v(\infty) + [v(t_0) - v(\infty)] \cdot e^{-(t-t_0)/\tau}$$

حيث: $v(t_o)$ القيمة الابتدائية للجهد في اللحظة $t=o^+$.

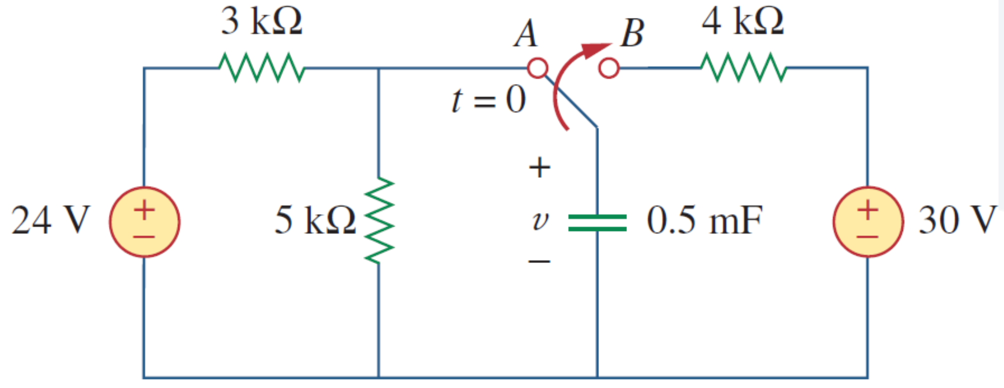
يجب الأخذ بالحسبان أن المعادلات:

$$v(t) = v(\infty) + [v(0) - v(\infty)] \cdot e^{-t/\tau}$$

$$v(t) = v(\infty) + [v(t_0) - v(\infty)] \cdot e^{-(t-t_0)/\tau}$$

يتم تطبيقها واستخدامها لتحديد استجابة الخطوة فقط، أي عند ثبات منبع التغذية.

أمثلة



لتكن لدينا الدارة المبينة بالشكل، حيث يظهر أن المفتاح موجود في الوضعية A لفترة طويلة. في اللحظة t=0 انتقل المفتاح إلى الوضعية B. المطلوب تحديد الجهد $v(\mathrm{t})$ في اللحظة t>0 وحساب قيمته من أجل t=1 s , 4s.

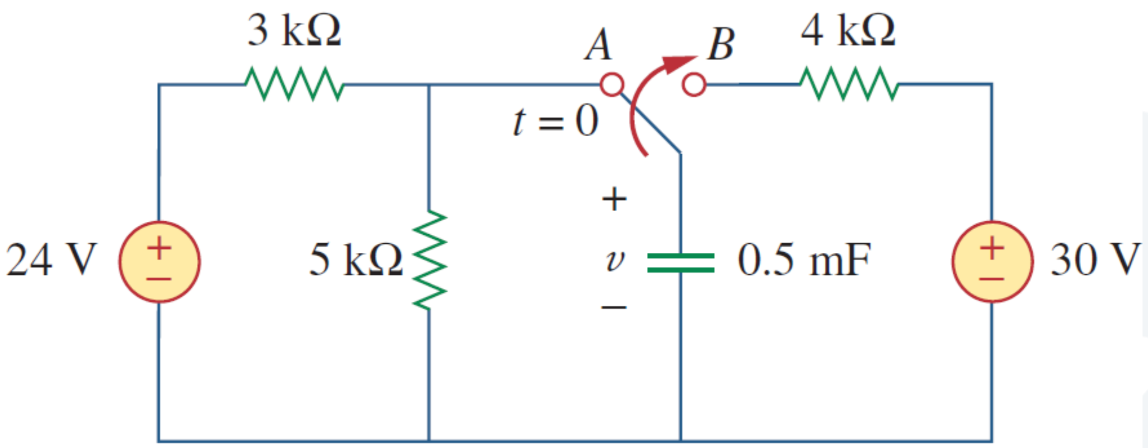
الحل:

من أجل وضعية المفتاح A. يكون المكثف موصول إلى منبع جهد مستمر وبالتالي تكون الدارة مفتوحة في مكان المكثف، أما الجهد v فهو نفسه المطبق على المقاومة $5k\Omega$. وبالتالي يمكن الحصول على الجهد المطبق على المكثف قبل $t=0$ بقليل، باستخدام قاعدة مجزئ الجهد:

$$\frac{v(0^-)}{24} = \frac{5}{5+3} \Rightarrow v(0^-) = \frac{5}{5+3} \times 24 = 15[V]$$

باستخدام حقيقة أن جهد المكثف لا يمكن أن يتغير بشكل فوري وسريع، يكون:

$$v(0) = v(0^-) = v(0^+) = 15[V]$$



من أجل وضعية المفتاح B. تكون قيمة مقاومة ثيفينين على أطراف مع المكثف $R_{Th}=4k\Omega$. وبالتالي تكون قيمة الثابت الزمني هي:

$$\tau = R_{Th} \cdot C = 4 \times 10^3 \times 0.5 \times 10^{-3} = 2sec$$

بما أن المكثف يعمل في دارات التيار المستمر كحالة دارة مفتوحة، وبحالة مستقرة فإن: $v(\infty) = 30[V]$

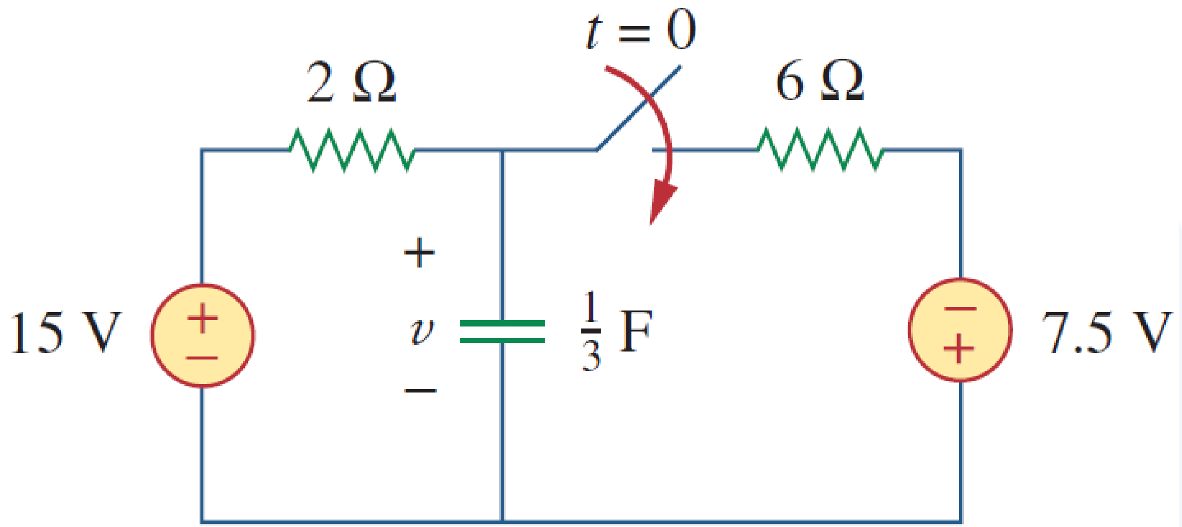
وبالتالي:

$$v(t) = v(\infty) + [v(0) - v(\infty)] \cdot e^{-t/\tau}$$
$$= 30 + (15 - 30) \cdot e^{-t/2} = (30 - 15 \cdot e^{-0.5t})[V]$$

من أجل t=1s: $v(1) = (30 - 15 \cdot e^{-0.5\times1}) = 20.9[V]$

من أجل t=4s: $v(4) = (30 - 15 \cdot e^{-0.5\times4}) = 27.97[V]$

لتكن لدينا الدارة المبينة بالشكل. أوجد $v(t)$ في اللحظة $t>0$.
بفرض أن المفتاح كان لفترة طويلة مفتوحاً، وأغلق في اللحظة $t=0$ المطلوب حساب الجهد $v(t)$
من أجل $t=0.5$ s.

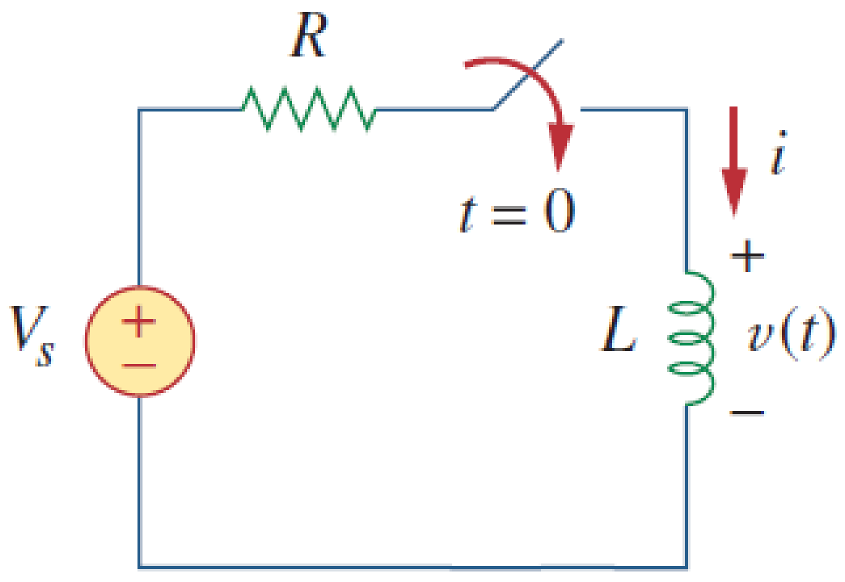


Answer: $(9.375 + 5.625e^{-2t})$ V for all $t > 0$, 7.63 V.

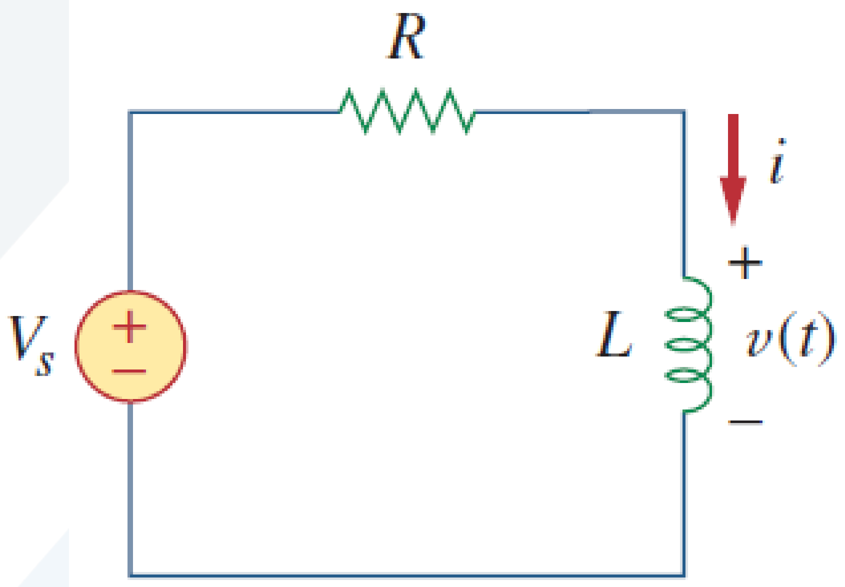
استجابة الخطوة لدارة RL

Step Response of an RL Circuit

لتكن لدينا دارة RL المبينة بالشكل (a) والتي يمكن استبدالها بالدارة المبينة بالشكل (b). هدفنا الآن هو الحصول على تيار الملف i والذي يمثل استجابة الدارة.



(a)



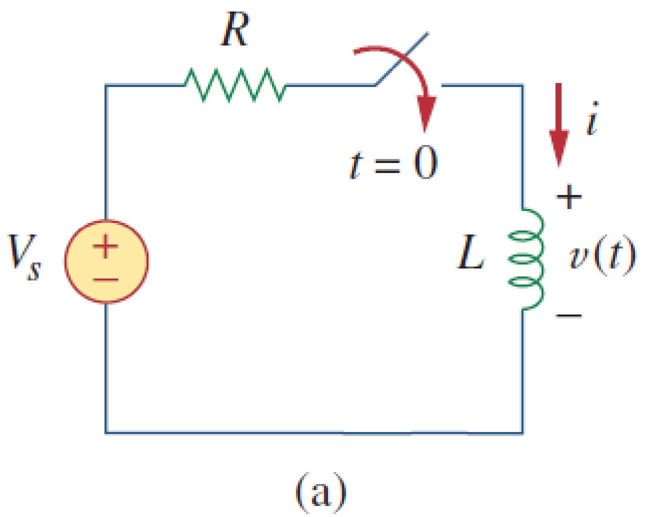
(b)

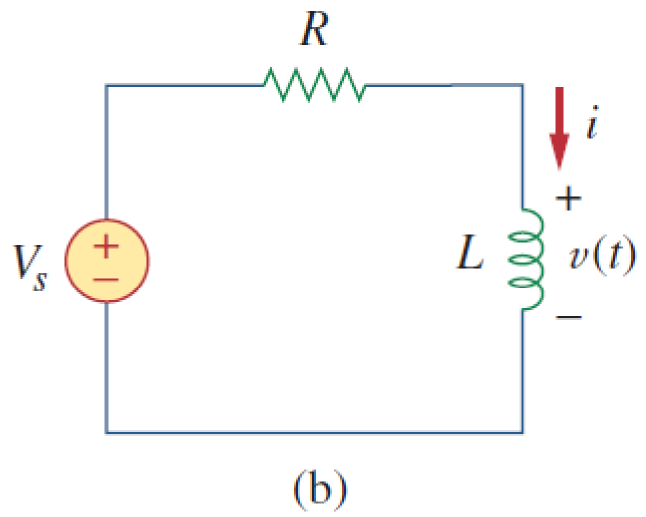
بدلاً من تطبيق قوانين كيرشوف، سنستخدم الطريقة المبسطة التي اعتمدناها في دارة RC (الاستجابة الكلية هي مجموع الاستجابة العابرة والاستجابة المستقرة):

Complete response = transient response + steady-state response

temporary part — permanent part

$$i = i_t + i_{ss}$$





نعلم مما سبق أن الاستجابة العابرة هي دائماً أسية متخامدة، أي:

$$i_t = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad , \qquad \tau = \frac{L}{R}$$

حيث A ثابت يتم تحديده.

الاستجابة المستقرة هي قيمة التيار عند اغلاق المفتاح في الدارة (a) ولفترة زمنية طويلة (كافية). وكما هو معلوم فإن الاستجابة العابرة تتخامد وتتلاشى بعد خمسة أمثال الثابت الزمني، أي بعد 5τ. وفي نفس الوقت فإن الملف في دارة التيار المستمر يسبب حالة قصر في الدارة، وبالجهد المطبق عليه يساوي صفر، وكامل جهد المنبع V_s سيطبق على المقاومة R. وبالتالي فإن الاستجابة المستقرة تساوي:

$$i_{ss} = \frac{V_s}{R}$$

بتعويض قيم i_t و i_{ss} السابقتين في العلاقة الأساسية:

$$i = i_t + i_{ss} = A \cdot e^{-t/\tau} + \frac{V_s}{R}$$

نحدد الآن الثابت A من القيمة الابتدائية للتيار i. فإذا فرضنا أن I_o هي القيمة الابتدائية للتيار المار في الملف، والذي يمكن أن يسري نتيجة وجود مصدر آخر غير V_s. وبما أن تيار الملف لا يمكن أن يتغير بشكل مفاجئ فإن:

$$i(0^+) = i(0^-) = I_0$$

وبالتالي تصبح المعادلة $i = A \cdot e^{-t/\tau} + \frac{V_s}{R}$ بالشكل:

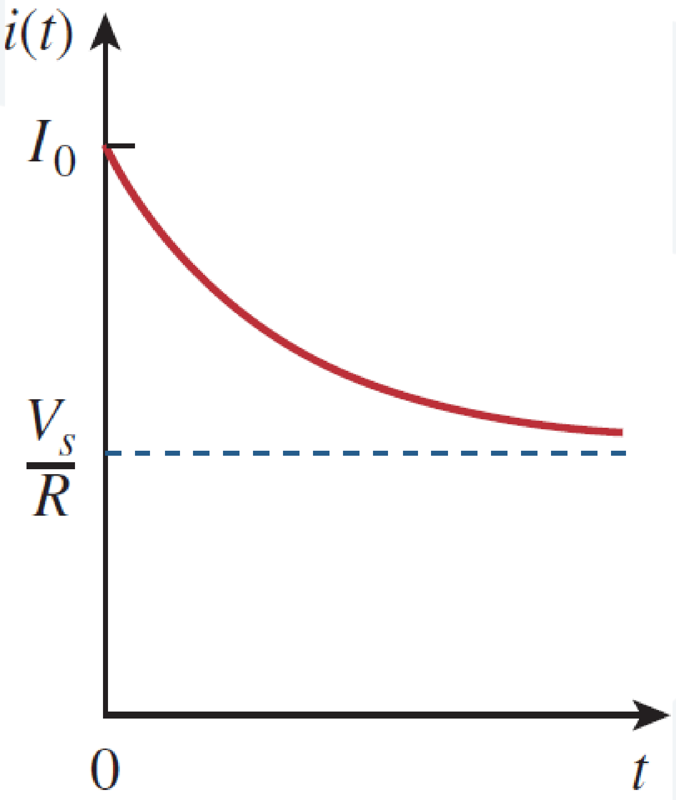
$$I_0 = A + \frac{V_s}{R}$$

من المعادلة الأخيرة يمكن استنتاج قيمة الثابت A:

$$A = I_0 - \frac{V_s}{R}$$

نعوض قيمة الثابت A في المعادلة $i = A \cdot e^{-t/\tau} + \frac{V_s}{R}$ فنجد:

$$i(t) = \frac{V_s}{R} + \left(I_0 - \frac{V_s}{R}\right) \cdot e^{-t/\tau}$$



تمثل العلاقة الأخيرة الاستجابة الكلية في دارة RL.
وهذه الاستجابة تظهر في الشكل المبين.

ويمكن كتابة الاستجابة الكلية بالشكل التالي:

$$i(t) = i(\infty) + [i(0) - i(\infty)] \cdot e^{-t/\tau}$$

حيث:

$i(0)$ القيمة الابتدائية للتيار في اللحظة $t=0^+$.

$i(\infty)$ القيمة النهائية للتيار (القيمة المستقرة).

وهذا يطابق تماماً القول بأن الاستجابة الكلية هي مجموع الاستجابة العابرة والاستجابة المستقرة.

وفقاً لذلك، يتطلب الحصول على استجابة الخطوة لدارة RL معرفة ثلاث قيم:

1. القيمة الابتدائية لتيار الملف $i(0)$.
2. القيمة النهائية لتيار الملف $i(\infty)$.
3. الثابت الزمني τ.

يتم الحصول على البند 1 من الدارة المعطاة من أجل $t<0$، والبندين 2 و 3 من أجل $t>0$.

بمجرد تحديد القيم الثلاث المذكورة، يمكن الحصول على الاستجابة اعتماداً على العلاقة:

$$i(t) = i(\infty) + [i(0) - i(\infty)] \cdot e^{-t/\tau}$$

لابد من التذكير مجدداً بأن التقنية السابقة متعلقة فقط باستجابة الخطوة.

نلاحظ أنه إذا تم تغيير وضعية المفتاح في اللحظة $t=t_0$ بدلاً عن اللحظة $t=0$ فسيكون هناك تأخير زمني في الاستجابة وتصبح المعادلة السابقة بالشكل:

$$i(t) = i(\infty) + [i(t_0) - i(\infty)] \cdot e^{-(t-t_0)/\tau}$$

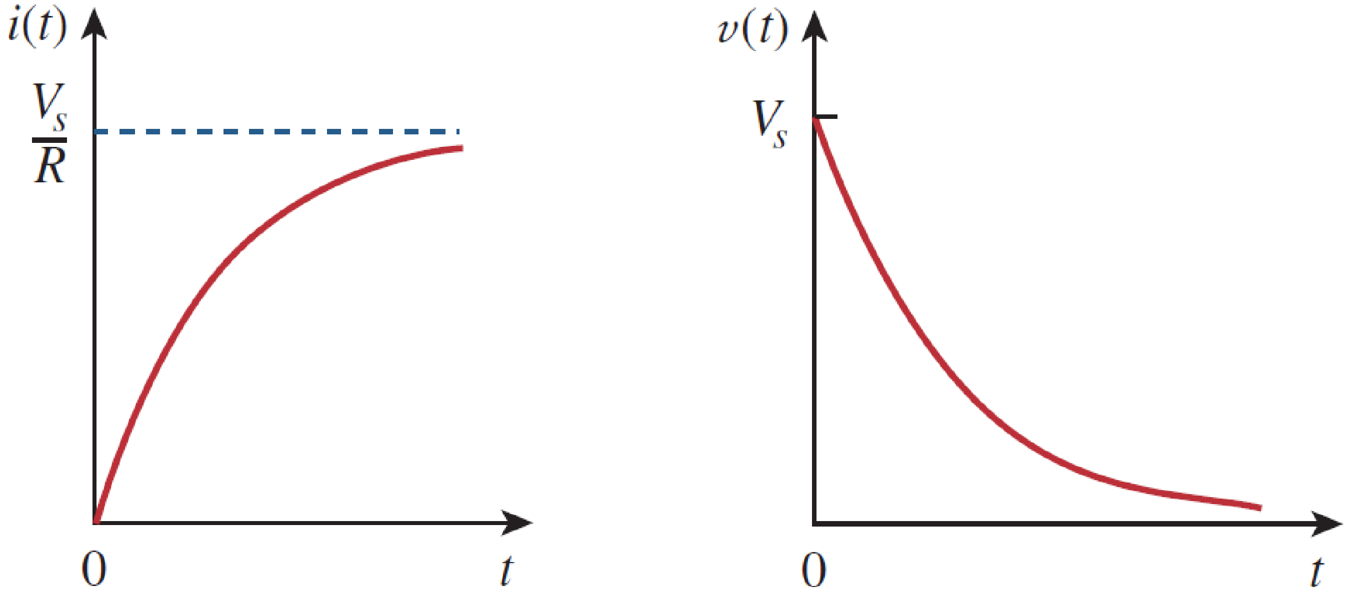
حيث: $i(t_0)$ القيمة الابتدائية للتيار في اللحظة $t=0^+$.

عند $I_0=0$ فإن:

$$i(t) = \begin{cases} 0 & ,t < 0 \\ \frac{V_s}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) & ,t > 0 \end{cases}$$

ويمكن حساب الجهد المطبق على الملف كما يلي:

$$v(t) = L \cdot \frac{di}{dt} = V_s \cdot \frac{L}{\tau \cdot R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} , \qquad \tau = \frac{L}{R} , \qquad t > 0$$

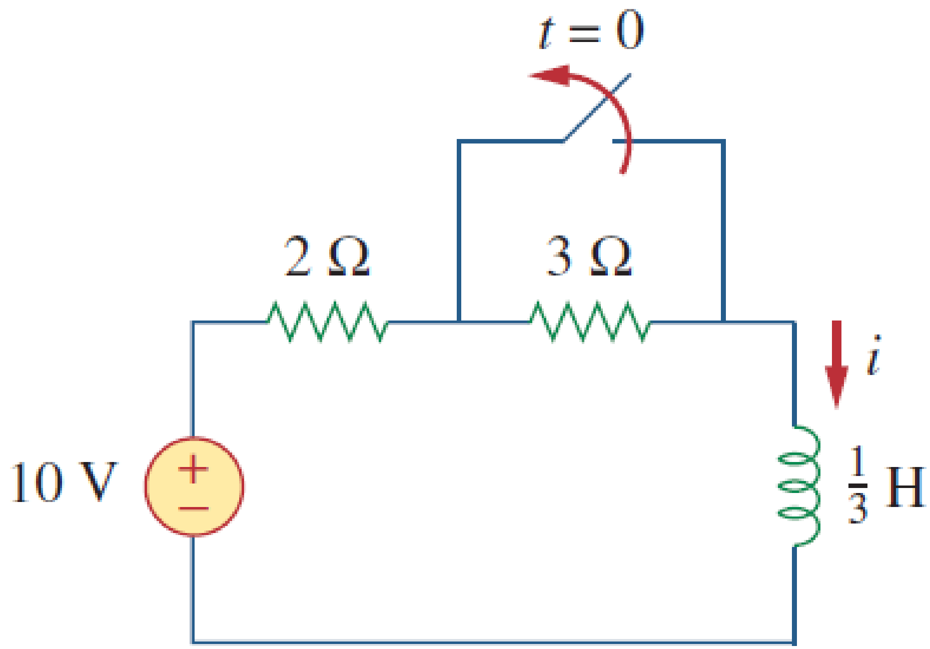


(a) (b)

تبين الأشكال التالية منحنيات استجابة الخطوة وفق المعادلات السابقة

أمثلة

لتكن لدينا الدارة المبينة بالشكل. المطلوب إيجاد التيار $i(t)$ في اللحظة $t>o$. وذلك بفرض أن المفتاح كان مغلقاً لفترة زمنية طويلة.



جـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

الحل:

عندما $t<0$ فإن المقاومة 3Ω تكون مقصورة، ويكون عمل الملف في هذه الحالة تشكيل دارة قصر. التيار المار في الملف في اللحظة $t=0^-$ (أو بمعنى آخر قبل $t=0$ بقليل).

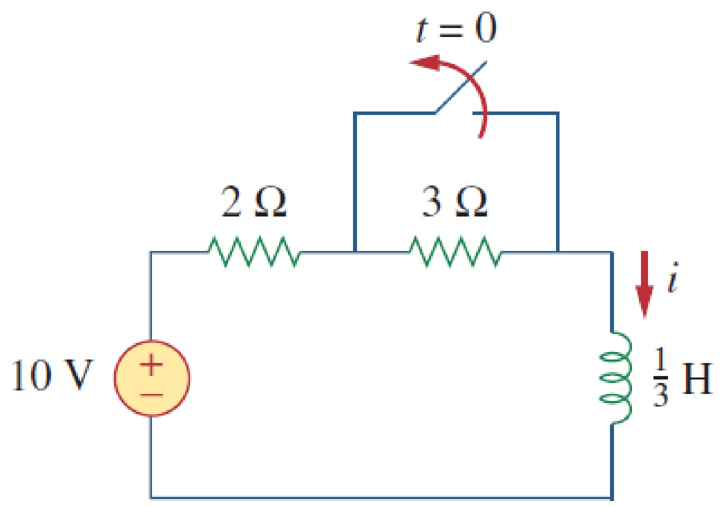
$$i(0^-) = \frac{10}{2} = 5[A]$$

بما أن تيار الملف لا يمكن أن يتغير بشكل فوري وسريع، يكون:

$$i(0) = i(0^+) = i(0^-) = 5[A]$$

من أجل $t>0$ يفتح المفتاح وتصبح المقاومتان موصولتان على التسلسل، مع بقاء الملف يشكل قصر في الدارة، وبالتالي:

$$i(\infty) = \frac{10}{2+3} = 2[A]$$



جَـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

وتكون قيمة مقاومة ثيفينين على أطراف الملف هي: $R_{Th} = 2 += 5[\Omega]$

وبالتالي تكون قيمة الثابت الزمني هي:

$$\tau = \frac{L}{R_{Th}} = \frac{\frac{1}{3}}{5} = \frac{1}{15}\sec$$

وبالتالي:

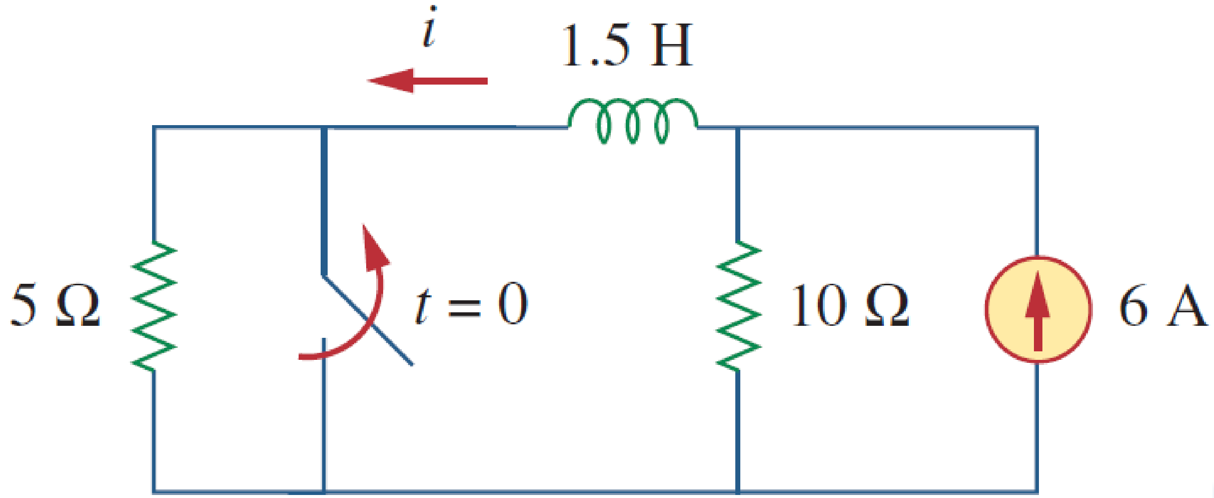
$$i(t) = i(\infty) + [i(0) - i(\infty)] \cdot e^{-t/\tau}$$
$$= 2 + (5 - 2) \cdot e^{-15t} = (2 + 3 \cdot e^{-15t})[A]$$

نتحقق من النتيجة باستخدام قانون كيرشوف الثاني على الحلقة من أجل **t>0**:

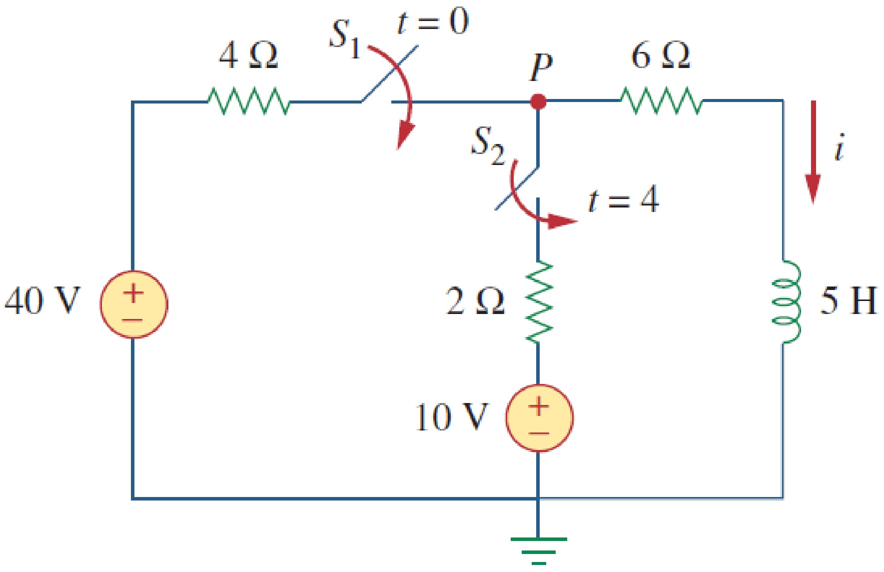
$$5i + L \cdot \frac{di}{dt} = 10 \Rightarrow 5 \times (2 + 3 \cdot e^{-15t}) + \frac{1}{3} \cdot \frac{d}{dt}(2 + 3 \cdot e^{-15t}) = 10$$

$$(10 + 15 \cdot e^{-15t}) + \frac{1}{3} \times [3 \times (-15) \cdot e^{-15t}] = 10 + 15 \cdot e^{-15t} - 15 \cdot e^{-15t} = 10$$

لتكن لدينا الدارة المبينة بالشكل. أوجد $i(t)$ في اللحظة $t>0$، وذلك بفرض أن المفتاح كان لفترة طويلة مغلقاً، وفُتح في اللحظة $t=0$.



Answer: $(4 + 2e^{-10t})$ A for all $t > 0$.



لتكن لدينا الدارة المبينة بالشكل. في اللحظة **t=0** يغلق المفتاح S_1، وبعد **4s** يغلق المفتاح S_2. المطلوب إيجاد **i(t)**.
وحساب **i** من أجل **t=2s** و **t=5s**.

الحل:

يجب الأخذ بالحسبان الفترات الزمنية الثلاث: **t≤0** و **0≤t≤4** و **t≥4** وبشكل منفصل. في اللحظة **t<0** يكون المفتاحان S_1 و S_2 مفتوحان، وبالتالي فإن **i=0**.

بما أن تيار الملف لا يمكن أن يتغير بشكل فوري وسريع، يكون:

$$i(0) = i(0^+) = i(0^-) = 0$$

من أجل 0≤t≤4 يغلق المفتاح S_1 ويصبح توصيل المقاومتين 4-Ω و 6-Ω على التسلسل. (تذكران المفتاح S_2 مازال مفتوحاً في هذا الوقت). وبالتالي، إذا فرضنا أنه في الوقت الحالي المفتاح S_1 مغلق دوماً فإن:

$$i(\infty)=\frac{v}{R_{Th}}=\frac{40}{4+6}=4[A],R_{Th}=4+6=10[\Omega]$$

الثابت الزمني:

$$\tau=\frac{L}{R_{Th}}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}[s]$$

بالتالي:

$$\begin{aligned}i(t)&=i(\infty)+[i(0)-i(\infty)]\cdot e^{-t/\tau}\\&=4+(0-4)\cdot e^{-2t}=4(1-e^{-2t})[A]\,,\qquad 0\le t\le 4\end{aligned}$$

من أجل t≥4 يغلق المفتاح S_2 ويصبح منبع الجهد 10-V موصولاً للدارة، وستتغير الدارة. هذا التغير المفاجئ لا يؤثر على تيار الملف، لأنه لا يمكنه ان يتغير بشكل مفاجئ. وبالتالي فإن القيمة الابتدائية للتيار هي:

$$i(4) = i(4^-) = 4(1 - e^{-8}) \approx 4[A]$$

لإيجاد $i(\infty)$، نفرض v جهد العقدة P المبينة بالدارة. باستخدام قانون كيرشوف الأول KCL يكون:

$$\frac{40 - v}{4} + \frac{10 - v}{2} = \frac{v}{6} \Rightarrow v = \frac{180}{11} [V]$$

بالتالي:

$$i(\infty) = \frac{v}{6} = \frac{\frac{180}{11}}{6} = \frac{30}{11} = 2.727[A]$$

وتكون قيمة مقاومة ثيفينين على أطراف الملف هي:

$$R_{Th} = 4//2 + 6 = \frac{4 \times 2}{6} + 6 = \frac{22}{3} [\Omega]$$

الثابت الزمني:

$$\tau = \frac{L}{R_{Th}} = \frac{5}{\frac{22}{3}} = \frac{15}{22}[s]$$

بالتالي:

$$i(t) = i(\infty) + [i(4) - i(\infty)] \cdot e^{-(t-4)/\tau} \quad , \quad t \geq 4$$

نحتاج (t-4) في الأس بسبب التأخير الزمني، وبالتالي:

$$i(t) = 2.727 + (4 - 2.727) \cdot e^{-1.4667(t-4)}, t \geq 4$$

نضع المعادلات الناتجة مع بعضها:

$$i(t) = \begin{cases} 0 \, , & t \leq 0 \\ 4(1 - e^{-2\tau}) \, , & 0 \leq t \leq 4 \\ 2.727 + 1.273 \cdot e^{-1.4667(t-4)} \quad , & t \geq 4 \end{cases}$$

عندما t=2s:

$$i(2) = 4(1 - e^{-2\times2}) = 4(1 - e^{-4}) = 3.93\,[A]$$

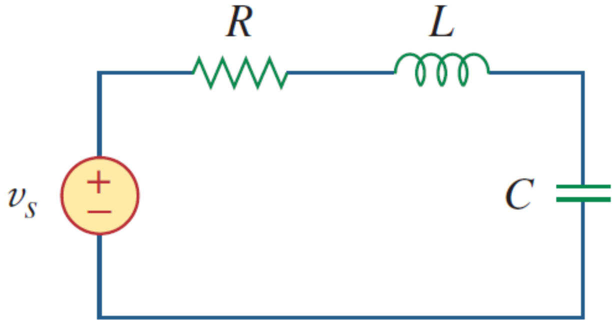
عندما t=5s:

$$i(5) = 2.727 + 1.273 \cdot e^{-1.4667(5-4)} = 2.727 + 1.273 \cdot e^{-1.4667} = 3.02[A]$$

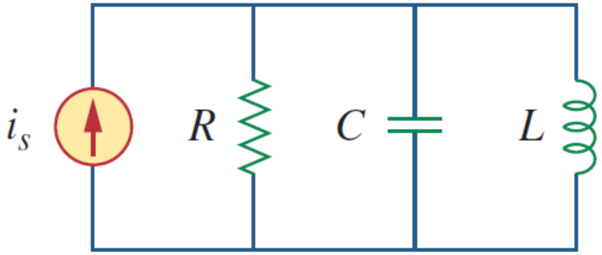
الاستجابة الثانية للدارات

Second order-circuits

درسنا سابقاً الدارات التي تحتوي عنصر تخزين واحد للطاقة (مكثف أو ملف)، والتي تسمى دارات الدرجة الأولى لأن المعادلات التفاضلية التي تصف هذه الدارات هي من الدرجة الأولى.



(a)



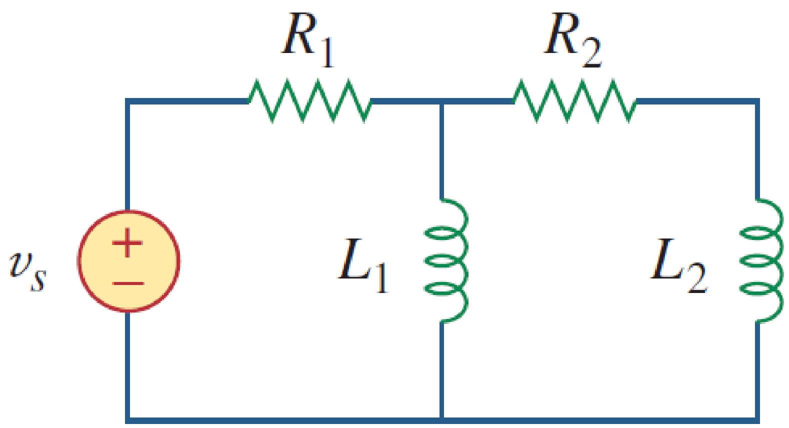
(b)

سنقوم الآن بدراسة الدارات الحاوية على عنصري تخزين للطاقة، ومثل هذه الدارات تسمى دارات الدرجة الثانية، لأن استجابتها توصف بمعادلات تفاضلية ثنائية الاشتقاق.

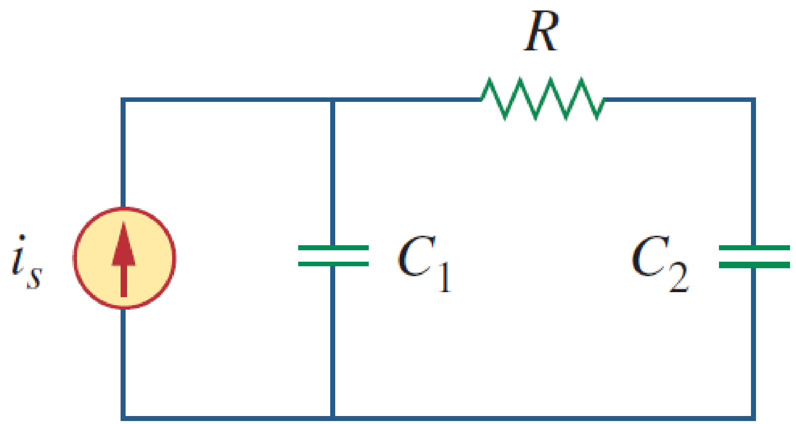
من الأمثلة النموذجية لدارات الدرجة الثانية دارة **RLC** الحاوية على العناصر الثلاثة غير الفعالة (مقاومة، مكثف وملف). وتبين الأشكال (a) و (b) أمثلة عن هذا النوع من الدارات.

تبين الأشكال (c) و (d) أمثلة عن الدارات الثنائية الدرجة نموذج RL و RC كونها تحتوي على عنصري تخزين من نفس النوع.

إذاً دارات الدرجة الثانية قد تحتوي على عنصري تخزين طاقة مختلفين بالنوع او على عنصري تخزين طاقة من نفس النوع عندما لا يمكن مكافأتها بعنصر واحد مكافئ.



(c)



(d)

طريقة تحليل دارات الدرجة الثانية مشابهة لما قمنا به في دارات الدرجة الأولى، حيث نأخذ -بداية- بالحسبان وجود الشروط الابتدائية على عناصر تخزين الطاقة. مع الأخذ بالحسبان إمكانية وجود منابع غير مستقلة في الدارة، وعدم وجود منابع مستقلة فيها. ستعطي هذه الدارات الخالية من منبع التغذية استجابة طبيعية كما هو متوقع. وسنأخذ بالحسبان لاحقاً الدارات المغذاة بمنابع تغذية مستقلة، والتي تعطي استجابة عابرة واستجابة مستقرة. في هذا الفصل سنأخذ بالحسبان وجود منابع تغذية مستمرة DC مستقلة فقط.

نبدأ أولاً بتعلم الحصول على الشروط الابتدائية لمتغيرات الدارة واشتقاقاتها، لأن هذا الامر بالغ الأهمية بالنسبة لدارات الدرجة الثانية. بعد ذلك نأخذ بالحسبان حالة الوصل التسلسلي أم التفرعي لدارات RLC كما هو موضح بالأشكال السابقة، وذلك بالنسبة للحالتين التاليتين: بالشروط الابتدائية لعناصر تخزين الطاقة، وبمدخلات الخطوة.

إيجاد القيم الابتدائية والنهائية: Finding Initial and Final Values

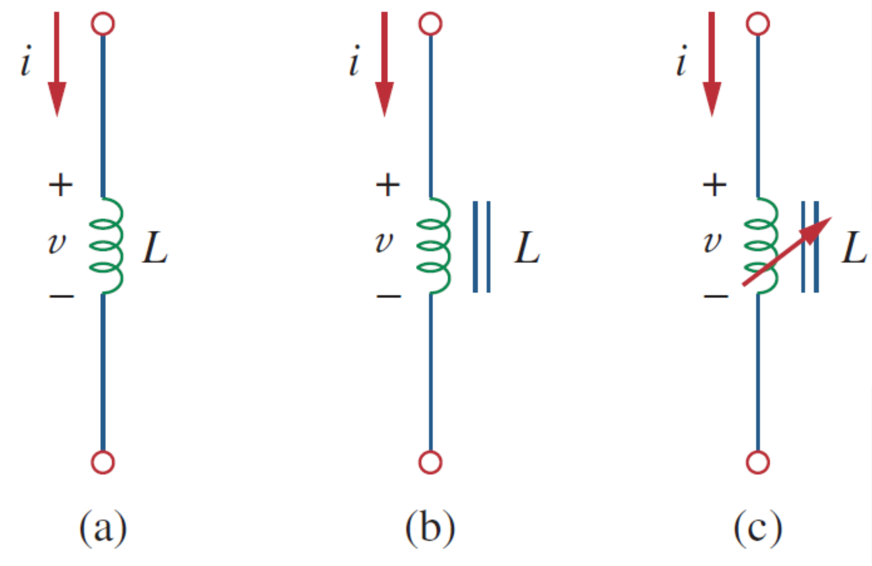
ربما تكونا المشكلة الأساسية التي تواجهنا عند التعامل مع دارات الدرجة الثانية هي إيجاد الشروط الابتدائية والنهائية لمتغيرات الدارة.

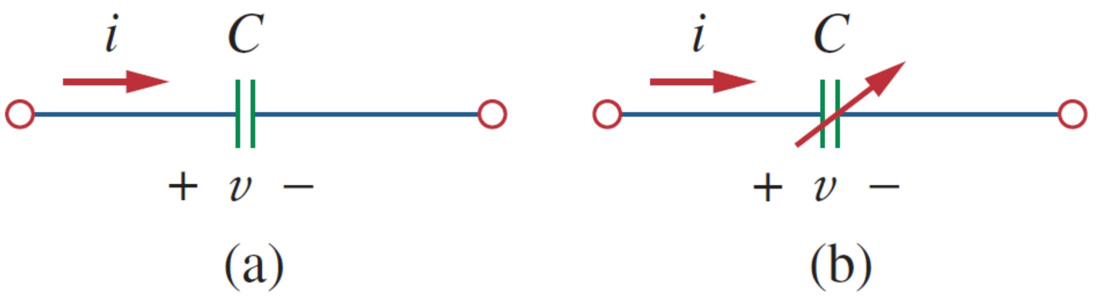
عادة يشعر الطلاب بالارتياح في الحصول على القيم الابتدائية والنهائية للجهد v والتيار i، ولكنهم يجدون صعوبة في الحصول على القيم الابتدائية للمشتقات dv/dt و di/dt.

ولذلك نكرس حيز مفصل لكيفية الحصول على $v(0), i(0)$ و $dv(0)/dt, di(0)/dt$ و $v(\infty), i(\infty)$ سنعتمد من الآن مالم نشير لخلاف ذلك عندما نذكر الجهد v فإننا نقصد جهد المكثف، وعندما نذكر التيار i فإننا نقصد تيار الملف.

هناك نقطتان رئيستان يجب أخذهما بالحسبان عند تحديد الشروط الابتدائية:

الأولى: يجب الانتباه إلى قطبية جهد المكثف، واتجاه تيار الملف، وفق القواعد المبينة بالشكل.





الثانية: يجب الأخذ بالحسبان أن جهد المكثف متواصل دائماً، ولذلك يكون:

$$v(0^+) = v(0^-)$$

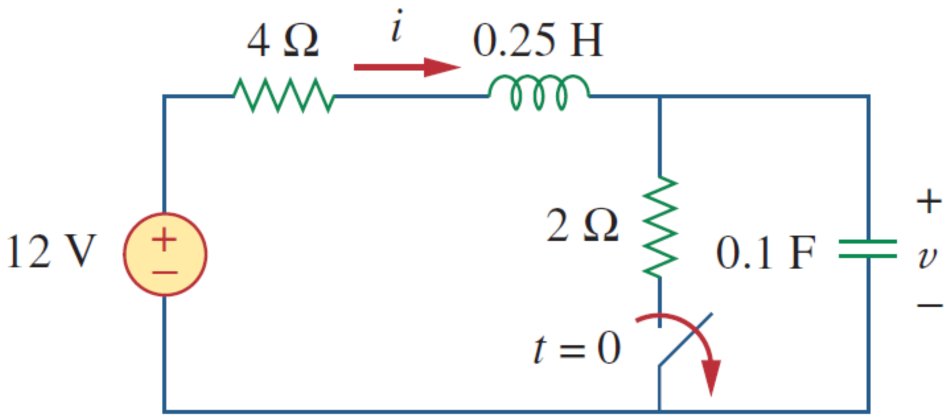
وأن تيار الملف متواصل دائماً، ولذلك يكون: $i(0^+) = i(0^-)$

حيث $t=0^-$ تشير إلى الزمن قبل حدوث التبديل (فتح المفتاح أو إغلاقه) و $t=0^+$ الزمن مباشرة بعد حدوث التبديل، وذلك بفرض أن عملية التبديل حدثت في اللحظة $t=0$.

وبالتالي، يجب التركيز عند إيجاد الشروط الابتدائية على هذه المتغيرات التي لا يمكن أن تتغير بشكل مفاجئ، مثل جهد المكثف، وتيار الملف، وذلك بتطبيق العلاقات الأخيرة السابقة.

الأمثلة التالية توضح هذه الأفكار.

لتكن لدينا الدارة المبينة بالشكل. المفتاح كان مغلقاً لفترة زمنية طويلة، وتم فتحه في اللحظة $t=0$، المطلوب:



أ. إيجاد $i(0^+)$, $v(0^+)$

ب. إيجاد $di(0^+)/dt$, $dv(0^+)/dt$

ج. إيجاد $i(\infty)$, $v(\infty)$