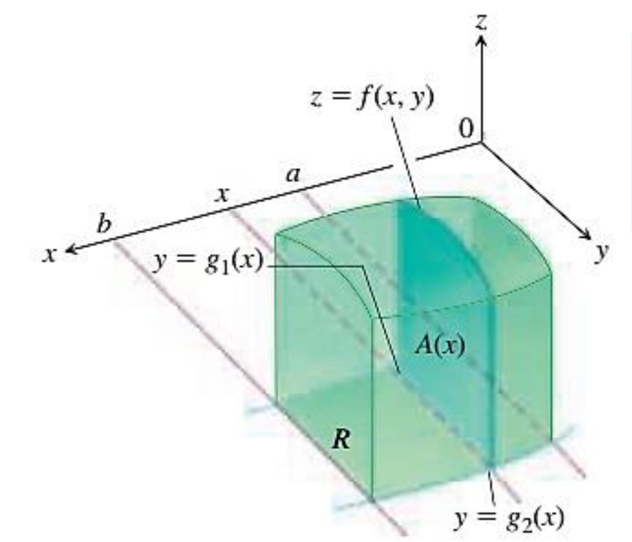
تحليل رياضي 2

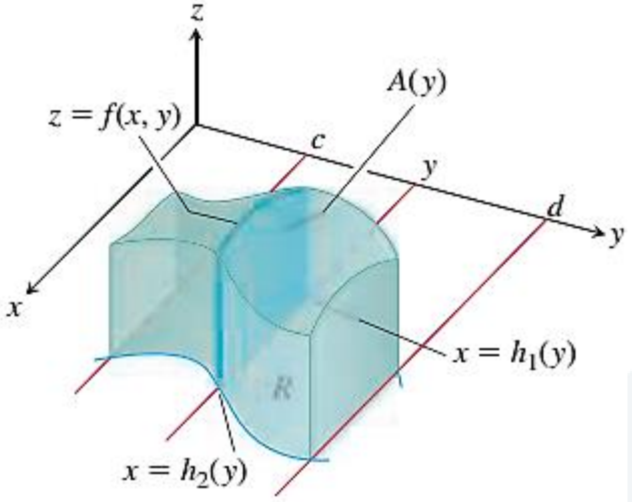
المحاضرة 11

ميكاترونيكس

أ.د. سامي انجرو

Double Integrals over General Regions





التكامل الثنائي على مناطق عامة

مبرهنة: مبرهنة فوبيني

ليكن $f(x, \;\; y)$ تابع مستمر على المنطقة R ، عندئذ

- إذا كانت المنطقة R معرفة بالشكل $a \le x \le b, g_1(x) \le y \le g_2(x)$ حيث g_1 و g_2 تابعين مستمرين على المجال $[\,a, b\,]$ ، عندئذ

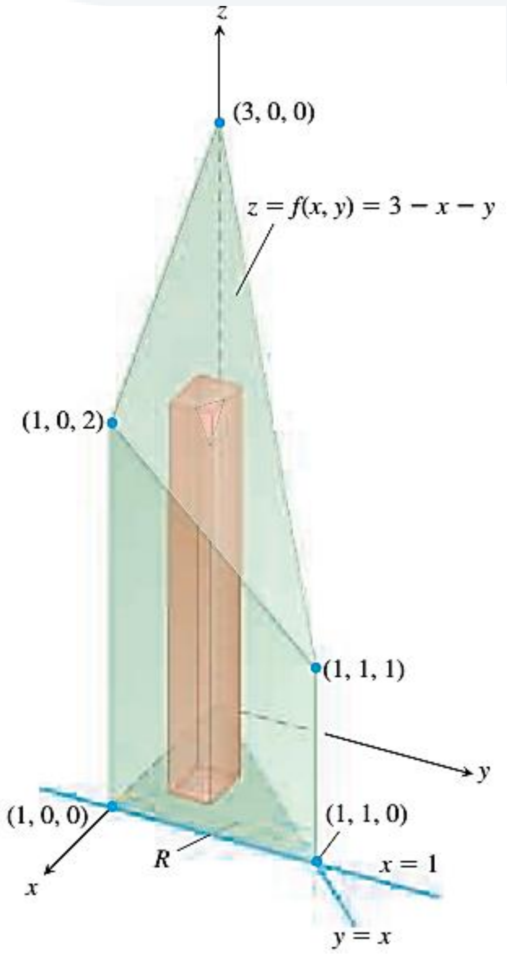
$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx.$$

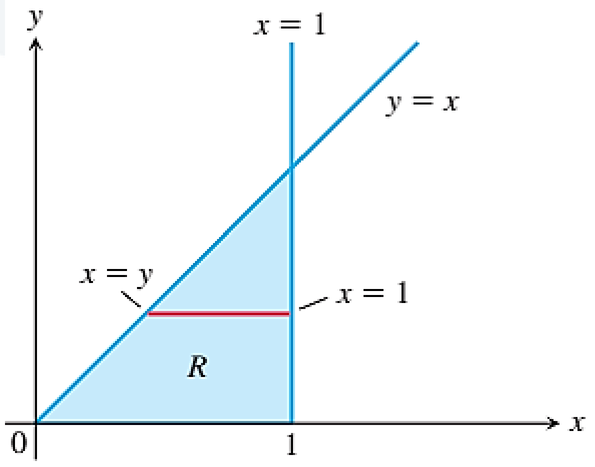
- إذا كانت المنطقة R معرفة بالشكل $c \le y \le d, h_1(y) \le x \le h_2(y)$ حيث h_1 و h_2 تابعين مستمرين على المجال $[\,c, d\,]$ ، عندئذ

$$\iint_R f(x, y)\, dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy.$$

مثال: أوجد حجم الموشور الذي قاعدته مثلث موجود في المستوي xy- محدود بالمحور x- والمستقيمين $y = x$ و $x = 1$ ، وقمته في المستوي $z = f(x, y) = 3 - x - y$.

الحل





$$V = \int_0^1 \int_0^x (3 - x - y)\, dy\, dx = \int_0^1 \left[3y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(3x - \frac{3x^2}{2} \right) dx = \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{2} \right]_{x=0}^{x=1} = 1.$$

جَـامعة المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

تمارين

1 احسب التكاملات الآتية

$$\int_0^{\pi}\int_0^{x} x\sin y\,dy\,dx \qquad \int_1^{\ln 8}\int_0^{\ln y} e^{x+y}\,dx\,dy \qquad \int_1^{4}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{3}{2}e^{y/\sqrt{x}}\,dy\,dx$$

الحل

$$\int_0^{\pi}\int_0^{x} x\sin y\,dy\,dx$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{x}(x\sin y)\,dy\,dx=\int_0^{\pi}[-x\cos y]_0^{x}\,dx=\int_0^{\pi}(x-x\cos x)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-(\cos x+x\sin x)\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}+2$$

$$\int_1^{\ln 8}\int_0^{\ln y} e^{x+y}\,dx\,dy$$

$$\int_1^{\ln 8}\int_0^{\ln y} e^{x+y}dx\,dy=\int_1^{\ln 8}\left[e^{x+y}\right]_0^{\ln y}dy=\int_1^{\ln 8}\left(ye^{y}-e^{y}\right)dy=\left[(y-1)e^{y}-e^{y}\right]_1^{\ln 8}$$

$$=8(\ln 8-1)-8+e=8\ln 8-16+e$$

$$\int_1^{4}\int_0^{\sqrt{x}} \frac{3}{2}e^{y/\sqrt{x}}\,dy\,dx$$

$$\int_1^{4}\int_0^{\sqrt{x}}\frac{3}{2}e^{y/\sqrt{x}}dy\,dx=\int_1^{4}\left[\frac{3}{2}\sqrt{x}e^{y/\sqrt{x}}\right]_0^{\sqrt{x}}dx=\frac{3}{2}(e-1)\int_1^{4}\sqrt{x}\,dx=\left[\frac{3}{2}(e-1)\left(\frac{2}{3}\right)x^{3/2}\right]_1^{4}=7(e-1)$$

تمارين

2 أوجد حجم المنطقة المحدودة من الأعلى بـ $z = x^2 + y^2$ ومن الأسفل بالمثلث المؤلف من المستقيمات $y = x, x = 0,$ $x + y = 2$

الحل

$$V = \int_0^1 \int_x^{2-x} \left(x^2 + y^2\right) dy\, dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3}\right]_x^{2-x} dx = \int_0^1 \left[2x^2 - \frac{7x^3}{3} + \frac{(2-x)^3}{3}\right] dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{7x^4}{12} - \frac{(2-x)^4}{12}\right]_0^1$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{7}{12} - \frac{1}{12}\right) - \left(0 - 0 - \frac{16}{12}\right) = \frac{4}{3}$$

3 أوجد حجم المجسم الذي قاعدته منطقة في المستوي xy- محدودة بالقطع المكافئ $y = 4 - x^2$ والمستقيم $y = 3x$ ، بينما قمته محدودة بالمستوي $z = x + 4$.

الحل

$$V = \int_{-4}^1 \int_{3x}^{4-x^2} (x+4)\, dy\, dx = \int_{-4}^1 [xy + 4y]_{3x}^{4-x^2} dx = \int_{-4}^1 \left[x\left(4 - x^2\right) + 4\left(4 - x^2\right) - 3x^2 - 12x\right] dx$$

$$= \int_{-4}^1 \left(-x^3 - 7x^2 - 8x + 16\right) dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 - 4x^2 + 16x\right]_{-4}^1 = \left(-\frac{1}{4} - \frac{7}{3} + 12\right) - \left(\frac{64}{3} - 64\right) = \frac{157}{3} - \frac{1}{4} = \frac{625}{12}$$

الانتقال إلى الإحداثيات القطبية

قد نصادف في بعض الأحيان تكاملات صعبة الحساب في حالة الإحداثيات الديكارتية، لذلك نقوم بإجراء تحويل ينقلنا إلى الإحداثيات القطبية حيث يصبح حسابها أكثر سهولة.

بوضع $x = x(u,v)$ و $y = y(u,v)$ ، حيث أن التابعين $x(u,v)$ و $y(u,v)$ ومشتقاتهما الجزئية من المرتبة الأولى مستمرة في المنطقة D^* من المستوي uv المقابلة للمنطقة D وفق التحويل $x = x(u,v)$ و $y = y(u,v)$ ، عندئذ:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D^*} f(x(u,v),y(u,v))\left|J\right|dudv$$

حيث أن $|J|$ تمثل القيمة المطلقة لجاكوبي التحويل.

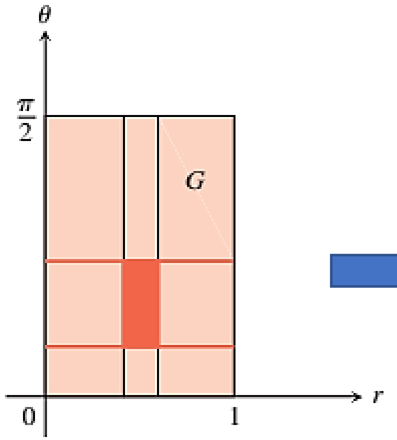
Double Integrals in Polar Form

التكامل الثنائي بالصيغة القطبية

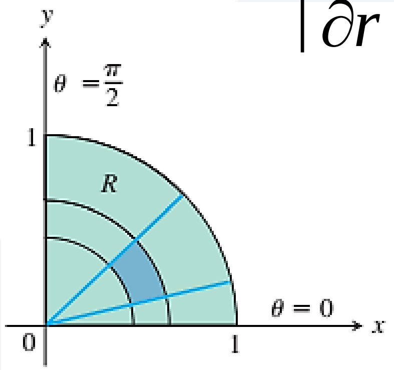
الانتقال إلى الإحداثيات القطبية

$$x = r\cos\theta \ , \ y = r\sin\theta \qquad 0 \le \theta \le 2\pi \ , r > 0$$

$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$



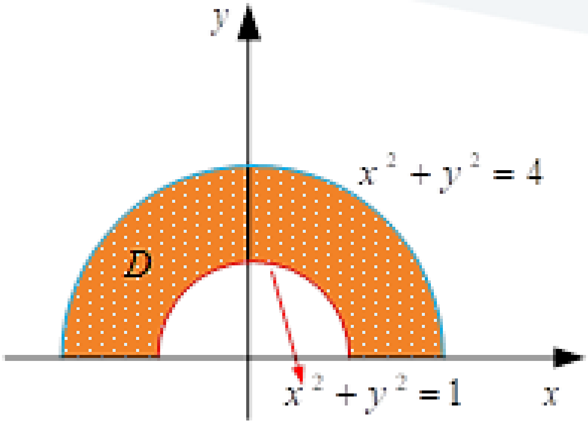
Cartesian $r\theta$-plane



Cartesian xy-plane

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \iint_G f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta.$$

مثال: احسب التكامل الثنائي $I = \iint\limits_{D} (3x + 4y^2)dxdy$ ، حيث أن D هي المنطقة الواقعة في النصف العلوي من المستوي $xy -$ والمحدودة بالدائرتين $x^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + y^2 = 4$ ، كما في الشكل



الحل

نلاحظ أنه ليس من السهل المكاملة على المنطقة المعطاة

$$D = \{(x, y)|0 \le y \ , 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$$

نحولها إلى منطقة بسيطة بالانتقال إلى الإحداثيات القطبية، فتصبح المنطقة:

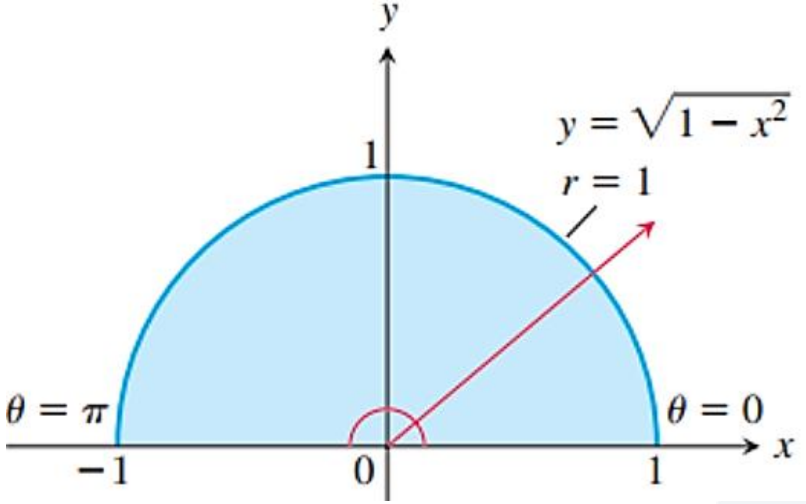
$$D^* = \{(r, \theta)|1 \le r \le 2 \ , \ 0 \le \theta \le \pi\}$$

$$I = \iint\limits_{D} (3x + 4y^2)dxdy = \iint\limits_{D^*} (3r\cos\theta + 4r^2\sin^2\theta)rdrd\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\int_1^2 (3r^2\cos\theta + 4r^3\sin^2\theta)dr \right) d\theta = \int_0^{\pi} (7\cos\theta + 15\sin^2\theta)d\theta = \frac{15}{2}\pi$$

مثال: احسب التكامل الثنائي $I = \iint\limits_{D} e^{x^2+y^2} dxdy$ ، حيث أن D هي المنطقة نصف الدائرية الواقعة في النصف العلوي من المستوي $xy -$ والمحدودة بالمحور $x -$ والمنحني $y = \sqrt{1-x^2}$ ، كما في الشكل

الحل



نحولها إلى منطقة بسيطة بالانتقال إلى الإحداثيات القطبية، فتصبح المنطقة:

$$D^* = \{(r,\theta) | 0 \le r \le 1 \, , \, 0 \le \theta \le \pi\}$$

$$\iint\limits_{R} e^{x^2+y^2}\, dy\, dx = \int_0^{\pi}\int_0^1 e^{r^2} r\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi}\left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_0^1 d\theta = \int_0^{\pi}\frac{1}{2}(e-1)\, d\theta = \frac{\pi}{2}(e-1).$$

تمارين

1 احسب التكاملات الثنائية الآتية بالانتقال إلى الاحداثيات القطبية:

- $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}}(x^2+y^2)\,dx\,dy$
- $\displaystyle\int_{-1}^0\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\,dx$
- $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2}\,dy\,dx$

الحل

$$\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}}(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}}\left(x^2+y^2\right)dx\,dy=\int_0^{\pi/2}\int_0^2 r^3\,dr\,d\theta=4\int_0^{\pi/2}d\theta=2\pi$$

$$\int_{-1}^0\int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\,dy\,dx=\int_{\pi}^{3\pi/2}\int_0^1\frac{2r}{1+r}\,dr\,d\theta=2\int_{\pi}^{3\pi/2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+r}\right)dr\,d\theta=2\int_{\pi}^{3\pi/2}(1-\ln 2)\,d\theta=(1-\ln 2)\pi$$

$$\int_{-1}^1\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2}\,dy\,dx=4\int_0^{\pi/2}\int_0^1\frac{2r}{\left(1+r^2\right)^2}\,dr\,d\theta=4\int_0^{\pi/2}\left[-\frac{1}{1+r^2}\right]_0^1 d\theta=2\int_0^{\pi/2}d\theta=\pi$$