كلية الهندسة

جامعة المنارة

MANARA UNIVERSITY

قسم الميكاترونيكس

عميد الكلية

د. إياد حاتم

المحاضرة السادسة

مفهوم الاستقرار ومعيار راوث للاستقرار
Concept of Stability and the Routh Stability Criterion

نظم تحكم

د.بلال شيحا

مقدمة Introduction

- Bounded-Input Bounded-Output Stability
- معيار راوث للاستقرار Routh Stability Criterion
- الاستقرار النسبى (إزاحة المبدأ)
- مجال الاستقرار من أجل بارامتر ما
- أنماط التحكم الأساسية

Introduction مقدمة

يتعلق الاستقرار بمحدودية خرج نظام relaxed(أي له شروط ابتدائية صفرية) عند استجابته لدخل محدود ويُدعى استقرار محدود_الدخل محدود_الخرج **B**ounded-**I**nput **B**ounded-**O**utput (***BIBO***) stability. ويمكن القول أنّ النظام غير مستقر إذا كانت استجابته غير محدودة نتيجة تعرضه لدخل محدود.

- ففي النظم غير الخطية إذا كان النظام غير المقيد مستقراً لا يمكن ضمان أنّ يكون الخرج محدوداً من أجل دخل محدود.

Bounded-Input Bounded-Output Stability

- يمكن القول أنّ للنظام الخطي الذي له شروط ابتدائية صفرية (reaxed) استقرار $BIBO$ إذا أعطى عند أي دخل محدود خرجاً محدوداً.
- وبالتالي إذا كان للنظام دخل هو $r(t)$ وخرج $y(t)$ واستجابة نبضية هي $g(t)$:

$$y(t) = \int_0^{\infty} g(\tau) r(t-\tau) d\tau$$

Bounded-Input Bounded-Output Stability

- فإذا كان $r(t)$ محدوداً فإنّه يوجد ثابت ما M حيث أنّ :

$$\left| r(t) \right| \le M < \infty$$

$$\Rightarrow \left| y(t) \right| = \left| \int_0^{\infty} g(\tau) r(t-\tau) d\tau \right|$$

$$\left| y(t) \right| \le \int_0^{\infty} \left| g(\tau) r(t-\tau) \right| d\tau \le \int_0^{\infty} \left| g(\tau) \right| \left| r(t-\tau) \right| d\tau \le M \int_0^{\infty} \left| g(\tau) \right| d\tau$$

Bounded-Input Bounded-Output Stability

$$\Rightarrow \int_0^\infty |g(\tau)| d\tau < \infty$$

- وبذلك نستنتج أنّ النظام ذو الاستجابة النبضية يكون مستقراً *BIBO* إذا وفقط إذا كانت استجابته النبضية قابلة للتكامل بشكل مطلق ($\int_0^\infty |g(\tau)| d\tau$ يكون منتهياً).

- ربط متطلبات الاستجابة النبضية من أجل الاستقرار *BIBO* بقيود على أقطاب دالة الانتقال $G(s)$.

ربط متطلبات الاستجابة النبضية من أجل الاستقرار *BIBO* بقيود على أقطاب دالة الانتقال $G(s)$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{b_0 s^m+b_1 s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m}{a_0 s^n+a_1 s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}; \quad m\le n$$

$$g(t)=\ell^{-1}\left[G(s)\right]$$

$$\Delta(s)=a_0 s^n+a_1 s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n=0$$

- بفرض نظام الدرجة الثانية التالي:

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=G(s)=\frac{1}{s^2+a_1 s+a_2}$$

ربط متطلبات الاستجابة النبضية من أجل الاستقرار *BIBO* بقيود على أقطاب دالة الانتقال $G(s)$

$$R(s) = 1 \Rightarrow$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_2}$$

$$\Downarrow$$

$$y(t) = g(t) = \ell^{-1}\left[\frac{1}{s^2 + a_1 s + a_2}\right]$$

- <u>أقطاب حقيقية</u>   <u>عقدية</u>   <u>حقيقية مكررة</u>   <u>عقدية مكررة</u>

<u>نتيجة</u>

أقطاب حقيقية للدالة $Y(s)$

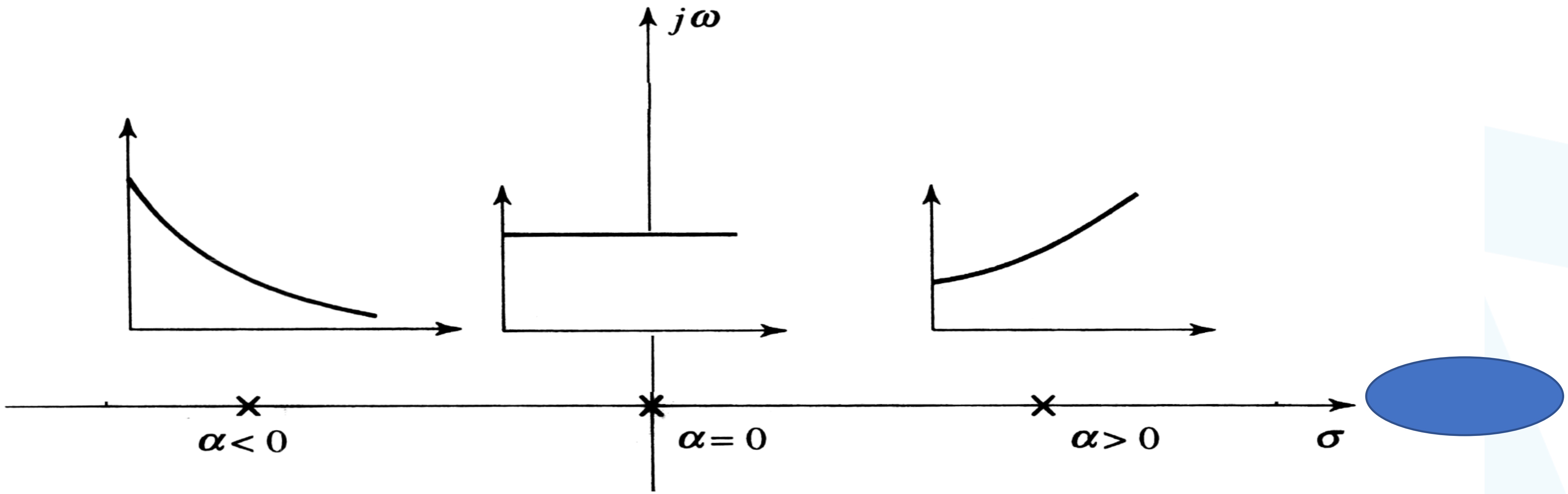
$$s^2 + a_1 s + a_2 = (s - \alpha_1)(s - \alpha_2)$$

$$Y(s) = \frac{A_1}{s - \alpha_1} + \frac{A_2}{s - \alpha_2}$$

$$\Downarrow$$

$$y(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}$$

أقطاب حقيقية للدالة $Y(s)$



أقطاب عقدية للدالة $Y(s)$

$$s_1 = p = \sigma + j\omega$$

$$s_2 = p^* = \sigma - j\omega$$

$$\Downarrow$$

$$Y(s) = \frac{A}{s-p} + \frac{A^*}{s-p^*}$$

$$A = |A|\angle\phi$$

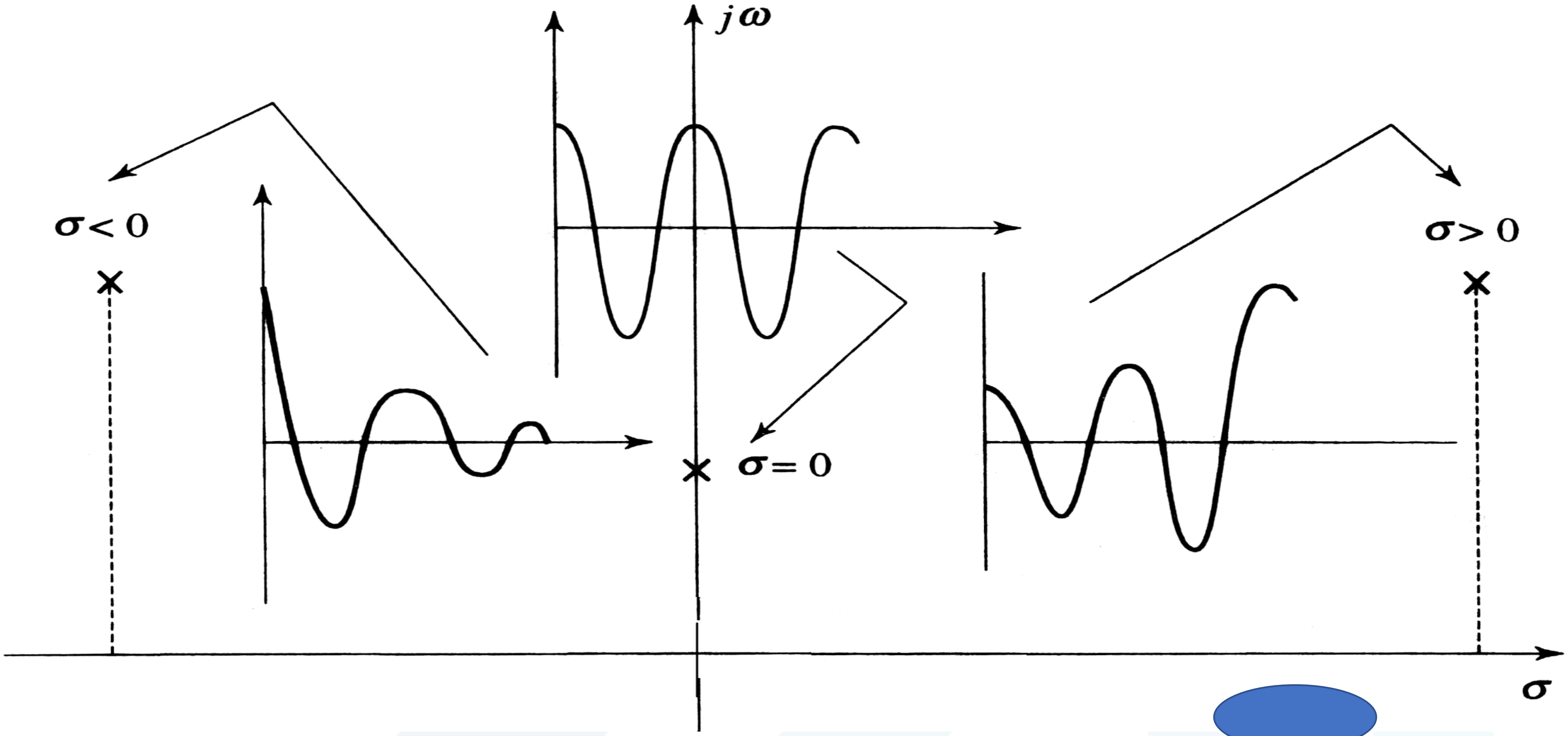
$$A^* = |A|\angle -\phi$$

أقطاب عقدية للدالة $Y(s)$

$$y(t) = Ae^{pt} + A^{*}e^{p^{*}t} = Ae^{pt} + \left(Ae^{pt}\right)^{*} = 2\,\mathrm{Re}\left[Ae^{pt}\right]$$

$$= 2\,\mathrm{Re}\left[|A|e^{j\phi}e^{\sigma t}e^{j\omega t}\right] = 2|A|e^{\sigma t}\,\mathrm{Re}\left[e^{j(\omega t+\phi)}\right]$$

$$= 2|A|e^{\sigma t}\cos(\omega t + \phi)$$


$j\omega$
$\sigma < 0$
$\sigma = 0$
$\sigma > 0$
σ

أقطاب حقيقية مكررة للدالة $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{A_{1(m)}}{(s-\alpha)^m} + \frac{A_{1(m-1)}}{(s-\alpha)^{m-1}} + \cdots + \frac{A_{12}}{(s-\alpha)^2} + \frac{A_{11}}{(s-\alpha)} + \cdots$$

$$\frac{1}{s-\alpha} \leftrightarrow e^{\alpha t}$$

$$-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-\alpha}\right) \leftrightarrow te^{\alpha t} \quad or \quad \frac{1}{(s-\alpha)^2} \leftrightarrow te^{\alpha t}$$

$$\frac{1}{(s-\alpha)^3} \leftrightarrow \frac{1}{2!}t^2 e^{\alpha t}$$

$$\frac{1}{(s-\alpha)^m} \leftrightarrow \frac{1}{(m-1)!}t^{m-1} e^{\alpha t}$$

أقطاب حقيقية مكررة للدالة $Y(s)$

- ويمكن أن نستنتج بسهولة من نظرية القيمة النهائية أنّ دالة الاستجابة

$$[1/(m-1)!]t^{m-1}e^{\alpha t}$$

تساوي الصفر عندما $t \to \infty$ إذا كانت $\alpha < 0$.

ومن أجل $\alpha \geq 0$ فإنّ دالة الاستجابة تزداد بدون حد.

أقطاب عقدية مكررة للدالة $Y(s)$

وبشكل مشابه يمكن استنتاج أنّه عندما تتضمن دوال الاستجابة زوجاً من الأقطاب المترافقة عقدياً $(\sigma \pm j\omega)$ بتكرار m ، فإنّ نهاية كل دالة استجابة عندما $t \to \infty$ تساوي الصفر إذا $\sigma < 0$ وإذا كانت $\sigma \geq 0$ فإنّها تزداد.

نتيجة

- مما تقدم نجد أنّ طبيعة مساهمة حدود الاستجابة عن طريق أقطاب النظام (أقطاب دالة الانتقال $G(s)$) تعطي طبيعة الاستجابة النبضية $g(t)=\ell^{-1}[G(s)]$ للنظام.

وأيضاً نستنتج أنّ الشرط اللازم والكافي لاستقرار *BIBO* لنظام ذي دالة انتقال $G(s)$ هو:

$$\int_0^{\infty}|g(\tau)|d\tau<\infty$$

معيار راوث للاستقرار Routh Stability Criterion

- إنّ معيار راوث للاستقرار هو إجرائية تحليلية لتحديد فيما إذا كانت كل جذور كثير الحدود تحوي أقسام حقيقية سالبة.

إنّ المعادلة المميزة للأنظمة الثابتة الخطية تكون من الشكل التالي :

$$\Delta(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{n-1} s^1 + a_n s^0 = 0$$

حيث المعاملات a_i هي أعداد حقيقية.

- لكي يتم تحديد استقرار نظام ما خطي ثابت زمنياً، فإنّه من الضروري تحديد فيما إذا كان أي من جذور المعادلة المميزة يقع في النصف الأيمن من المستوى_s.

Routh Stability Criterion معيار راوث للاستقرار

علاقة جذور المعادلة المميزة

$$s = r_1, r_2, \ldots\ldots\ldots, r_n$$

بمعاملاتها

$$a_n, a_{n-1}, \ldots\ldots\ldots\ldots, a_1, a_0$$

كثير الحدود من الدرجة الثانية.

كثير الحدود من الدرجة الثالثة.

كثير حدود من الدرجة n.

نتيجة

Routh Stability Criterion معيار راوث للاستقرار

كثير الحدود من الدرجة الثانية

$$
\begin{aligned}
a_0 s^2 + a_1 s + a_2 &= a_0 \left(s - r_1 \right)\left(s - r_2 \right) \\
&= a_0 \left(s^2 - \left(r_1 + r_2 \right) s + r_1 r_2 \right)
\end{aligned}
$$

كثير الحدود من الدرجة الثالثة

$$a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = a_0 (s - r_1)(s - r_2)(s - r_3)$$
$$= a_0 s^3 - a_0 (r_1 + r_2 + r_3) s^2 + a_0 (r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3) s - a_0 r_1 r_2 r_3$$

كثير حدود من الدرجة n

$$\Delta(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots\dots\dots\dots + a_{n-1} s + a_n$$

$$= a_0 s^n - a_0 \left(sum\ of\ \ all\ the\ roots \right) s^{n-1}$$

$$+ a_0 \left(sum\ of\ \ the\ \ products\ of\ \ the\ roots\ taken\ 2\, at\ a\, time \right) s^{n-2}$$

$$- a_0 \left(sum\ of\ \ the\ \ products\ of\ \ the\ roots\ taken\ 3\, at\ a\, time \right) s^{n-3}$$

$$+ \dots\dots\dots\dots\dots + a_0 \left(-1\right)^n \left(product\ of\ \ all\ the\ n\ roots \right).$$

نتيجة

- كل جذور كثير الحدود حقيقية وتقع في النصف الأيسر من المستوى_s . وبالتالي فإن كل معاملات كثير الحدود موجبة، فقط في حالة وجود معاملٍ ما سالب فإنه يوجد على الأقل جذرٌ واحدٌ في النصف الأيمن من المستوى_s.
- لاحظ أيضاً بأنه إذا كانت كل الجذور في النصف الأيسر من المستوي العقدي، فإنه لا يمكن أن يكون هناك معاملاً مساوياً الصفر.

$$
\begin{aligned}
a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 &= a_0 (s - r_1)(s - r_2)(s - r_3) \\
&= a_0 s^3 - a_0 (r_1 + r_2 + r_3) s^2 + a_0 (r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3) s - a_0 r_1 r_2 r_3
\end{aligned}
$$

نتيجة

إذا كان أي من جذور كثير الحدود المذكور أعلاه عقدية، فإنّها يجب أن تظهر كأزواج مترافقة عقدياً لأنّ معاملات كثير الحدود موجبة. عندئذٍ، أثناء تشكيل كثير الحدود من جداءات الجذور فإنّ كل الأجزاء التخيلية للجذور سوف تحذف.

لذلك إذا وقعت كل الجذور في النصف الأيسر فإن كل معاملات كثير الحدود العام سوف تكون موجبة. إنّ وجود معامل ما سالب يتضمن بأنه يوجد على الأقل جذر واحد في النصف الأيمن.

وإنّ وجود المعامل الصفري يشير إلى وجود جذور مترافقة عقدياً على المحور التخيلي $j\omega$ و/أو واحد أو أكثر من الجذور يقع في النصف الأيمن من المستوى_s.

نتيجة

- (i) إذا كان أيٌّ من المعاملات a_i مساوياً للصفر فهذا يعني أنّه ليست كل الجذور في النصف الأيسر من المستوى_s.
- (ii) إذا كان أيٌّ من المعاملات a_i سالباً، فإنّه يوجد على الأقل جذر واحد في النصف الأيمن من المستوى_s.

نتيجة

- وبذلك يمكن القول بأن غياب أو سلبية أحد معاملات كثير الحدود المميز يدل على أنّ النظام إما غير مستقر (أو على الأكثر مستقر بشكل هامشي). لذلك حتى يكون النظام مستقراً من الضروري أن تكون كل معاملات كثير الحدود المميز موجبة. وإذا كان أياً من المعاملات إما صفرٌ أو سالبٌ فإنّه يمكن القول مباشرة بأن النظام غير مستقر. والعكس ليس صحيحاً أي أنّه إذا كانت كل المعاملات موجبة فإنّ هذا لا يعني بالضرورة أن النظام مستقر ويمكن أن تكون هناك جذور تقع في النصف الأيمن و/أو على المحور التخيلي.

نتيجة

- لكي يكون لكل الجذور قسم حقيقي سالب فإنّه من الضروري ولكن ليس كافياً أن تكون كل معاملات كثير الحدود المميّز موجبة.

$$\Delta(s) = (s+2)\left(s - \frac{1}{2} - j\,\frac{\sqrt{15}}{2}\right)\left(s - \frac{1}{2} + j\,\frac{\sqrt{15}}{2}\right) = s^3 + s^2 + 2s + 8 = 0$$

- غير مستقر رغم أن معاملات كثير الحدود المميّز موجبة.

نتيجة

- الخطوة الأولى في تحليل استقرار نظام ما هي فحص معادلته المميزة. فإذا كانت بعض معاملاتها تساوي الصفر أو سالبة يمكن أن نستنتج بأن النظام غير مستقر.
- ومن جهة أخرى، إذا كانت كل معاملات المعادلة المميزة موجبة فإنّه توجد إمكانية لاستقرار النظام ولكن يجب متابعة فحص الشروط الكافية للاستقرار.

Routh Stability Criterion معيار راوث للاستقرار

$$\Delta(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{n-1} s^1 + a_n = 0 \qquad , a_0 > 0$$

يتم ترتيبها على شكل جدول يدعى مصفوفة راوث.

الشرط اللازم والكافي للاستقرار هو أن تكون جميع عناصر العمود الأول لترتيب راوث موجبة. وإذا لم يتحقق هذا الشرط فإن النظام يكون غير مستقرٍ وعدد تغيرات الإشارة في عناصر العمود الأول لمصفوفة راوث يمثّل عدد جذور المعادلة المميزة الموجودة في النصف الأيمن من المستوى_s.

Routh Stability Criterion معيار راوث للاستقرار

$$\Delta(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots\dots\dots\dots + a_{n-1}s^1 + a_n = 0 \qquad , a_0 > 0$$

$$\begin{array}{ccc|cccccc}
row\ (n) & : & s^n & a_0 & a_2 & a_4 & . & . & . \\
row\ (n-1) & : & s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & . & . & . \\
row\ (n-2) & : & s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & . & . & . \\
row\ (n-3) & : & s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & . & . & . \\
\vdots & : & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \\
row\ (2) & : & s^2 & * & a_n & & & & \\
row\ (1) & : & s^1 & * & & & & & \\
row\ (0) & : & s^0 & a_n & & & & &
\end{array}$$

Routh Stability Criterion معيار راوث للاستقرار

$$b_1 = \frac{-\det\begin{bmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{bmatrix}}{a_1} = \frac{(a_1 a_2 - a_0 a_3)}{a_1}$$

$$b_2 = \frac{-\det\begin{bmatrix} a_0 & a_4 \\ a_1 & a_5 \end{bmatrix}}{a_1} = \frac{(a_1 a_4 - a_0 a_5)}{a_1}$$

$$\vdots$$

Routh Stability Criterion معيار راوث للاستقرار

$$c_1 = \frac{-\det\begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}}{b_1} = \frac{(b_1 a_3 - a_1 b_2)}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{-\det\begin{bmatrix} a_1 & a_5 \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix}}{b_1} = \frac{(b_1 a_5 - a_1 b_3)}{b_1}$$

$$\vdots$$

معيار راوث للاستقرار Routh Stability Criterion

يجب أن تكون عناصر العمود الأول من ترتيب راوث كلها موجبة إذا كانت كل جذور المعادلة المميزة تقع في النصف الأيسر من المستوى_s. وإذا عناصر العمود الأول ليست كلها موجبة، فإنّ عدد جذور المعادلة المميزة في النصف الأيمن من المستوى_s يساوي إلى عدد تغيرات الإشارة في العمود الأول. وكمثال توضيحي: + – + تمثل تغيرين في الإشارة، تغير من + إلى – وآخر من – إلى +.

ومن الملاحظ بأنّه في عملية إيجاد ترتيب راوث يتم التعبير عن الحدود غير الموجودة بصفر، وأيضاً يمكن تقسيم أو ضرب كل عناصر أي سطر بثابت موجب لتبسيط العمل الحسابي وهذا لا يُحدِث تغيراً في إشارات عناصر العمود الأول.

مثال1 مثال2 مثال3 حالات خاصة

مثال1

$$s^4 + 8s^3 + 18s^2 + 16s + 5 = 0$$

نلاحظ أنّ كل المعاملات موجودة وموجبة وهذا يعني أنّ الشرط اللازم للاستقرار محققٌ، والآن سيتم اختبار الشرط الكافي، عن طريق ترتيب راوث كما يلي:

مثال1

$$s^4 + 8s^3 + 18s^2 + 16s + 5 = 0$$

s^4	1	18	5
s^3	8	16	0
s^2	$16 = \dfrac{(8)(18)-(1)(16)}{8}$	$5 = \dfrac{(8)(5)-(1)(0)}{8}$	0
s^1	$\dfrac{27}{2} = \dfrac{(16)(16)-(8)(5)}{16}$	0	0
s^0	5	0	0

عناصر العمود الأول كلها موجبة وبالتالي يكون النظام مستقراً.

مثال2

$$3s^4 + 10s^3 + 5s^2 + 5s + 2 = 0$$

s^4	3	5	2	
s^3	$1\cancel{0}$	$\cancel{5}$	0	$divided$ $by \quad 5$
	2	1	0	
s^2	$\frac{7}{2} = \frac{(2)(5)-(3)(1)}{2}$	$2 = \frac{(2)(2)-(3)(0)}{2}$	0	
s^1	$-\frac{1}{7} = \frac{(7/2)(1)-(2)(2)}{7/2}$	0	0	
s^0	2	0	0	

مثال2

بفحص العمود الأول لترتيب راوث، نجد تغيرين في الإشارة أيّ

$$\frac{7}{2} \rightarrow \frac{-1}{7} \quad and \quad \frac{-1}{7} \rightarrow 2$$

لذلك بناءً على هذا يكون النظام غير مستقر ويحوي جذرين في النصف الأيمن من المستوى_s.

إنّ معيار راوث للاستقرار يعطي فقط عدد الجذور في النصف الأيمن من المستوى_s، ولا يعطي معلومات عن قيم الجذور ولا يميّز فيما إذا كانت الجذور حقيقية أم عقدية.

مثال3

$$s^6 + 4s^5 + 3s^4 + 2s^3 + s^2 + 4s + 4 = 0$$

كل المعاملات موجبة ولا يوجد أيٌ منها يساوي الصفر.

مثال3

s^6	1	3	1	4	
s^5	$\cancel{4}$	$\cancel{2}$	$\cancel{4}$	$\cancel{0}$	*divide by 2*
	2	1	2	0	
s^4	$\frac{5}{2}$	0	4	0	
s^3	1	$-\frac{6}{5}$	0	0	
s^2	3	4	0	0	
s^1	$-\frac{38}{15}$	0	0	0	
s^0	4	0	0	0	

مثال3

يبدو أن لكثير الحدود جذوراً في النصف الأيمن من المستوى_ s وذلك لأنّ عناصر العمود الأول في ترتيب راوث ليست جميعها موجبة. وبالتالي يوجد جذرين في النصف الأيمن من المستوى_ s وذلك لوجود تغيرين في الإشارة.

حالات خاصة

وتخفق الإجرائية القياسية عند تشكيل ترتيب راوث إذا واجهتنا أيٌّ من الحالات التالية:

1- ظهور سطر كل عناصره أصفار.

2- العنصر الأول لسطر ما يساوي الصفر فقط.

من أجل هذه الحالات الخاصة نستخدم تقنيات خاصة لإتمام عملية تشكيل ترتيب راوث.

سطر كل عناصره أصفار

- وجود السطر الصفري يشير إلى وجود كثير حدود زوجي كعامل لكثير الحدود المميّز المعطى.
- كثير الحدود الزوجي هذا هو كثير حدود يكون فيه أس المتغير عدد صحيح زوجي أو صفر فقط.
- كثير الحدود الزوجي يدعى كثير الحدود المساعد.
- معاملات كثير الحدود المساعد سوف تكون دائماً عناصر السطر الذي يقع مباشرةً فوق السطر الصفري في الترتيب.
- أس أعلى قوة في كثير الحدود المساعد هو الأس الذي يدل على رقم السطر الذي يحتوي معاملاته.

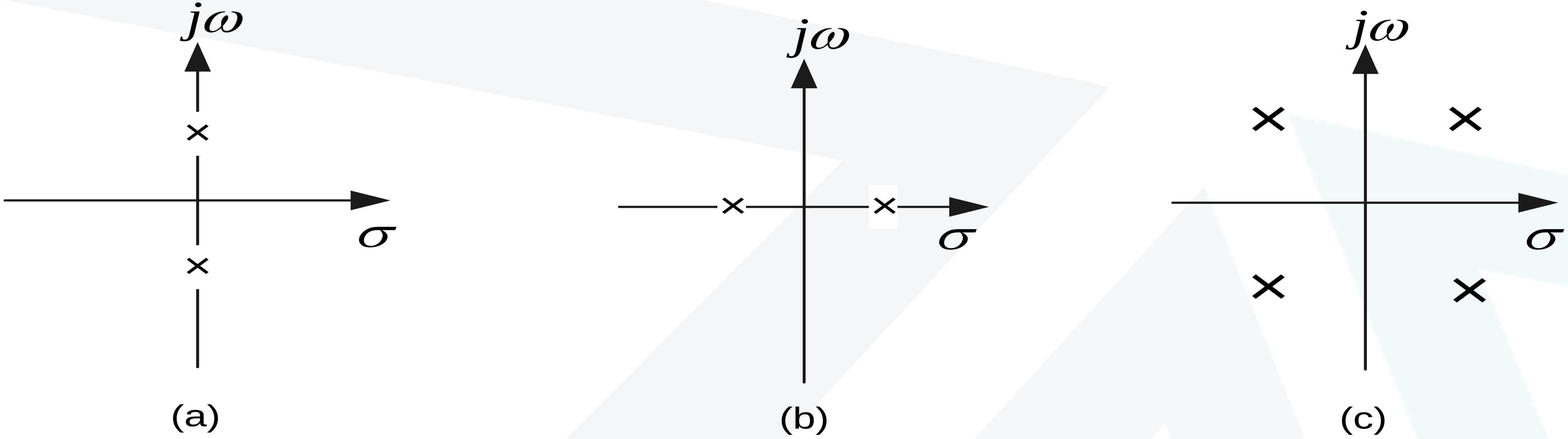
سطر كل عناصره أصفار

- تكون جذور كثير الحدود الزوجي على شكل أزواج متساوية بالمطال ومتعاكسة بالإشارة.

وعليه فإنّ هذه الجذور إما أن تكون تخيلية صرفة أو حقيقية صرفة أو عقدية .

- بما أنّ الجذور العقدية يجب أن تكون على شكل أزواج مترافقة، بالتالي فإنّ أي جذور عقدية لكثير الحدود الزوجي يجب أن تحدث على شكل مجموعة من أربع جذور ، وهذه الجذور لها تناظر رباعي، هذا يعني أنّ الجذور تكون متناظرة بالنسبة للمحور الحقيقي وأيضاً بالنسبة للمحور التخيلي.

سطر كل عناصره أصفار



سطر كل عناصره أصفار

كثير الحدود يمكن تحليله بإحدى الطريقتين التاليتين:

(i) عندما يتم إيجاد كثير الحدود المساعد $A(s)$ ، يتم كتابة المعادلة المميّزة على شكل عاملين أحدهما كثير الحدود المساعد ويتم تحليله جبرياً للحصول على جذوره (وهي جذور للمعادلة المميّزة)، والعامل الثاني يمكن تحليله عن طريق تطبيق معيار راوث للاستقرار.

(ii) عند إيجاد كثير الحدود المساعد $A(s)$ ، يتم اشتقاقه بالنسبة للمتغير S ويستبدل السطر الصفري بمعاملات $\frac{dA(s)}{ds}$ ، وبعد ذلك يتم متابعة إنشاء الترتيب بالأسلوب المعتاد.

وإن جذور كثير الحدود المساعد هي أيضاً جذور للمعادلة المميزة المعطاة.

مثال1 مثال2

مثال1

$$\Delta(s) = s^5 + s^4 + 4s^3 + 24s^2 + 3s + 63 = 0$$

s^5	1	4	3	
s^4	1	24	63	
s^3	$-2\cancel{0}$	$-6\cancel{0}$	$\cancel{0}$	*divide by* 20
	-1	-3	0	
s^2	$2\cancel{1}$	$6\cancel{3}$	$\cancel{0}$	*divide by* 21
	1	3	0	
s^1	0	0	0	

مثال1

$$from \quad row \quad s^2 \Rightarrow A(s) = s^2 + 3$$

$$A(s) = s^2 + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad s = \pm j\sqrt{3}$$

$$\frac{\Delta(s)}{A(s)} = s^3 + s^2 + s + 21$$

$$\Downarrow$$

s^3	1	1
s^2	1	21
s^1	-20	0
s^0	21	0

مثال1

يوجد تغيرين بالإشارة في العمود الأول وبالتالي يشير هذا إلى وجود جذرين في النصف الأيمن من المستوي_s والنظام غير مستقر.

مثال2

$$\Delta(s) = s^6 + 2s^5 + 8s^4 + 12s^3 + 20s^2 + 16s + 16 = 0$$

s^6	1	8	20	16	
s^5	$\cancel{2}$	$1\cancel{2}$	$1\cancel{6}$	$\cancel{0}$	$divide$ by 2
	1	6	8	0	
s^4	$\cancel{2}$	$1\cancel{2}$	$1\cancel{6}$	0	$divide$ by 2
	1	6	8	0	
s^3	0	0	0	0	

مثال2

$$A(s) = s^4 + 6s^2 + 8$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{dA(s)}{ds} = 4s^3 + 12s$$

وبذلك تستبدل أصفار السطر_ s^3 بالمعاملات 4 و 12. عندئذٍ يصبح ترتيب راوث:

مثال2

s^6	1	8	20	16	
s^5	$\cancel{2}$	$1\cancel{2}$	$1\cancel{6}$	$\cancel{0}$	$divide$ $by \quad 2$
	1	6	8	0	
s^4	$\cancel{2}$	$1\cancel{2}$	$1\cancel{6}$	0	$divide$ $by \quad 2$
	1	6	8	0	
s^3	0	0	0	0	
	$\cancel{4}$	$1\cancel{2}$	0	0	$\frac{dA(s)}{ds} = 4s^3 + 12s$
	1	3	0	0	$divide$ $by \quad 4$
s^2	3	8	0	0	
s^1	1/3	0	0	0	
s^0	8	0	0	0	

مثال2

لا يوجد تغيرات بالإشارة في العمود الأول من ترتيب راوث، وبالتالي لا يوجد لكثير الحدود $\Delta(s)$ أي جذر في النصف الأيمن من المستوي_s. بحل المعادلة المساعدة:

$$A(s) = s^4 + 6s^2 + 8$$

$$\Downarrow$$

$$s = \pm j\sqrt{2} \quad \& \quad s = \pm j2$$

والتي هي أيضاً جذور لكثير الحدود$\Delta(s)$. لذلك فالنظام في هذه الحالة يكون مستقراً بشكل هامشي، وترددات الاهتزاز:

$$\sqrt{2}\ rad/sec \quad \& \quad 2\,rad/sec$$

العنصر الأول لسطر ما يساوي الصفر فقط

وعندما تكون قيمة العنصر الأول في سطر ما صفراً فإنّ جميع عناصر السطر التالي تصبح لا نهائية وبالتالي لا يمكن متابعة تشكيل ترتيب راوث.

لعلاج هذه المشكلة نستبدل الصفر (الذي هو العنصر الأول في السطر) بعدد صغير اختياري ε ونتابع بناء الترتيب. وتؤخذ النهاية $(\varepsilon \rightarrow 0)$ لتحديد تغيرات الإشارة الجبرية لحدود العمود الأول، وهذا يعطي معلومات عن عدد الجذور الموجودة في النصف الأيمن من المستوي_s.

العنصر الأول لسطر ما يساوي الصفر فقط

دعنا نفحص علاقياً المبدأ. إذا كان لكثير الحدود المدروس معاملات تتغير بشكل طفيف فإنّه سيظهر عدد ما صغير لا يساوي الصفر في العنصر الأول من السطر. وطالما أنّه ليس لكثير الحدود جذور على المحور التخيلي فإنّ اضطرابات صغيرة كافية على المعاملات سوف لن تغير عدد الجذور المتواجدة في النصف الأيمن من المستوي_s. يتم إحداث الاضطراب الفعلي لمعاملات كثير الحدود عن طريق استبدال الحد الصفري بعدد صغير اختياري ε . لذلك إذا لم يكن لكثير الحدود جذور على المحور التخيلي فإنّ النهاية

$(\varepsilon \to 0)$ من الجهة الموجبة أو السالبة سوف تعطي نتائج مشابهة. يؤخذ بشكل عام موجباً ليكون ملائماً.

مثال3

العنصر الأول لسطر ما يساوي الصفر فقط

في حالة وجود جذور للمعادلة المميزة على المحور التخيلي، فإنّ استبدال عنصر العمود الأول الصفري بعدد صغير اختياري سوف يؤدي إلى إزاحة الجذور الواقعة على المحور التخيلي إما إلى داخل النصف الأيسر من المستوي_s أو إلى داخل النصف الأيمن منه. وفي هذه الحالة لا يمكن تحديد عدد جذور كثير الحدود المميز الواقعة في النصف الأيمن من المستوي_s بشكل دقيق. لذلك عند تطبيق مبدأ النهاية_ ε على كثير حدود مميّز له جذور تخيّلية يجب أولاً استخلاص هذه الجذور، وبعد ذلك تطبيق اختبار راوث على كثير الحدود المتبقي الذي يكون بدون جذور تخيّلية.

مثال4

$$\Delta(s) = s^5 + 3s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 6s + 9 = 0$$

s^5	1	2	6	
s^4	$\cancel{3}$	$\cancel{6}$	$\cancel{9}$	*divide by* 3
	1	2	3	
s^3	$\cancel{0}$	3	0	*replace* 0 *by* ε
	ε	3	0	
s^2	$\frac{2\varepsilon-3}{\varepsilon}$	3	0	
s^1	$3-\frac{2\varepsilon^2}{2\varepsilon-3}$	0	0	
s^0	3	0	0	

مثال3

الحد الأول في السطر s^2 هو $\dfrac{2\varepsilon-3}{\varepsilon}$ وإشارته سالبة عندما $(\varepsilon \to 0)$

(إنّ معيار راوث للاستقرار يهتم فقط بإشارة حدود العمود الأول وليس بقيمتها). للحد الأول في السطر_ s^1 الذي هو

$$3-\frac{2\varepsilon^2}{2\varepsilon-3}$$

قيمةٌ محدودةٌ هي 3+ عندما $\varepsilon \to 0$. بفحص حدود العمود الأول من ترتيب راوث نلاحظ وجود تغيرين في الإشارة، مما يدل على وجود جذرين لكثير الحدود في النصف الأيمن من المستوي_s.

مثال4

$$\Delta(s) = s^6 + s^5 + 3s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 25s + 1$$

s^6	1	3	3	1
s^5	1	3	2	
s^4	$\cancel{0}$	1	1	*replace* 0 *by* ε
	ε	1	1	
s^3	$\dfrac{3\varepsilon-1}{\varepsilon}$	$\dfrac{2\varepsilon-1}{\varepsilon}$		
s^2	$\dfrac{-2\varepsilon^2+4\varepsilon-1}{3\varepsilon-1}$	1		
s^1	$\dfrac{4\varepsilon^2-\varepsilon}{2\varepsilon^2-4\varepsilon+1}$			
s^0	1			

مثال4

- عندما تنتهي عناصر السطر_ s^1 إلى الصفر. وهذا يشير إلى إمكانية وجود جذور واقعة على المحور التخيلي في المستوي_s. لذلك نحتاج لفحص كثير الحدود المساعد. فإذا لم يكن هناك جذور على المحور التخيلي، نختار الإجرائية العادية والتي تكون باستبدال الصف الصفري بمعاملات مشتق كثير الحدود المساعد. وفي حال وجود جذور تخيلية، يقسّم كثير الحدود الأصلي على كثير الحدود المساعد ونجري الاختبار على كثير الحدود الناتج.

من أجل المثال الحالي، كثير الحدود المساعد يكون (عندما $\varepsilon \to 0$ في السطر_ s^2):

مثال4

$$A(s) = s^2 + 1 = 0$$

$$\frac{\Delta(s)}{A(s)} = s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 1 = 0$$

s^4	1	2	1	
s^3	1	2	0	
s^2	$\cancel{0}$	1		$replace$ 0 by ε
	ε	1		
s^1	$\frac{2\varepsilon - 1}{\varepsilon}$			
s^0	1			

مثال4

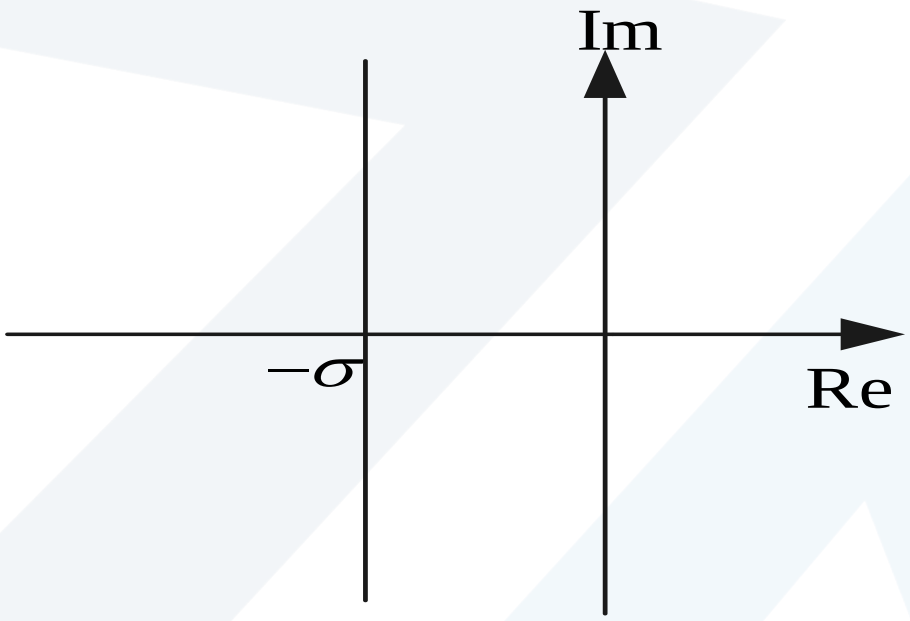
- يوجد تغيرين في إشارة العمود الأول من الترتيب. وهذا يدل على وجود جذرين في النصف الأيمن من المستوي_s. وبالتالي يكون لكثير الحدود الأصلي $\Delta(s)$ (من الدرجة الرابعة) جذرين في النصف الأيمن من المستوي_s وجذرين على المحور التخيلي.

الاستقرار النسبي (إزاحة المبدأ)

- يحدد معيار راوث للاستقرار الاستقرار المطلق لنظام ما، وذلك بتحديد فيما إذا كانت كل جذور المعادلة المميّزة تقع في النصف الأيسر من المستوي_s.
- عندما يكون نظام ما مستقراً بشكل مطلق (أي كل جذور المعادلة المميّزة تقع في النصف الأيسر من المستوي_s) فإنّه يكون من المرغوب تحديد استقراره النسبي الذي يتعلق بسلوك النظام العابر.
- يمكن أن يستخدم معيار راوث للاستقرار من أجل تحليل تمهيدي للاستقرار النسبي.

الاستقرار النسبي (إزاحة المبدأ)

- ويمكن الحصول على الثابت الزمني الأكبر لنظام ما عن طريق تحديد أصغر مسافة للجذور المميّزة عن المحور التخيلي.



$$s = \hat{s} - \sigma$$

الاستقرار النسبي (إزاحة المبدأ)

• ، ثم نطبق معيار راوث للاستقرار على كثير الحدود الجديد بدلالة $\hat{s}$. فإذا لم يكن هناك تغيرات في إشارة العمود الأول من ترتيب راوث لكثير الحدود الجديد بدلالة $\hat{s}$ ، فإنّه يمكن القول بأن كل جذور المعادلة المميزة الأصلية هي أكثر سلبية من $-\sigma$. بإزاحة المحور العمودي على قاعدة التجربة والخطأ، يمكن أن نجد المسافة الأصغرية للجذور عن المحور التخيلي، وبالتالي نستطيع إيجاد الثابت الزمني الأكبر للنظام.

مثال5

مثال5

$$s^3 + 7s^2 + 25s + 39 = 0$$

من معيار راوث للاستقرار يمكن أن نجد بأن كل جذوره في النصف الأيسر من المستوي_s. دعنا نفحص فيما إذا كان لمعادلته المميزة جذور بأجزاء حقيقية أكثر سلبية من 1-.

$$s = \hat{s} - 1 \Rightarrow f(\hat{s}) = \hat{s}^3 + 4\hat{s}^2 + 14\hat{s} + 20$$

بتشكيل ترتيب راوث نحصل على:

مثال5

$\hat{s}^3$	1	14	
$\hat{s}^2$	$\cancel{4}$	$2\cancel{0}$	$divide$ $by \quad 4$
	1	5	
$\hat{s}^1$	9		
$\hat{s}^0$	5		

- جميع إشارات العمود الأول في ترتيب راوث موجبة (أي لا يوجد تغير بالإشارة في العمود الأول)، وبالتالي كل جذور كثير الحدود المميّز الأصلي تكون أكثر سلبية من 1-.

مجال الاستقرار من أجل بارامتر ما
Stability Range for a Parameter

- القيمة الحقيقية لاختبار راوث تكون في تصميم نظم التحكم عن طريق تحديد مجالات بارامترات معينة لضمان عمل مستقر للنظام.

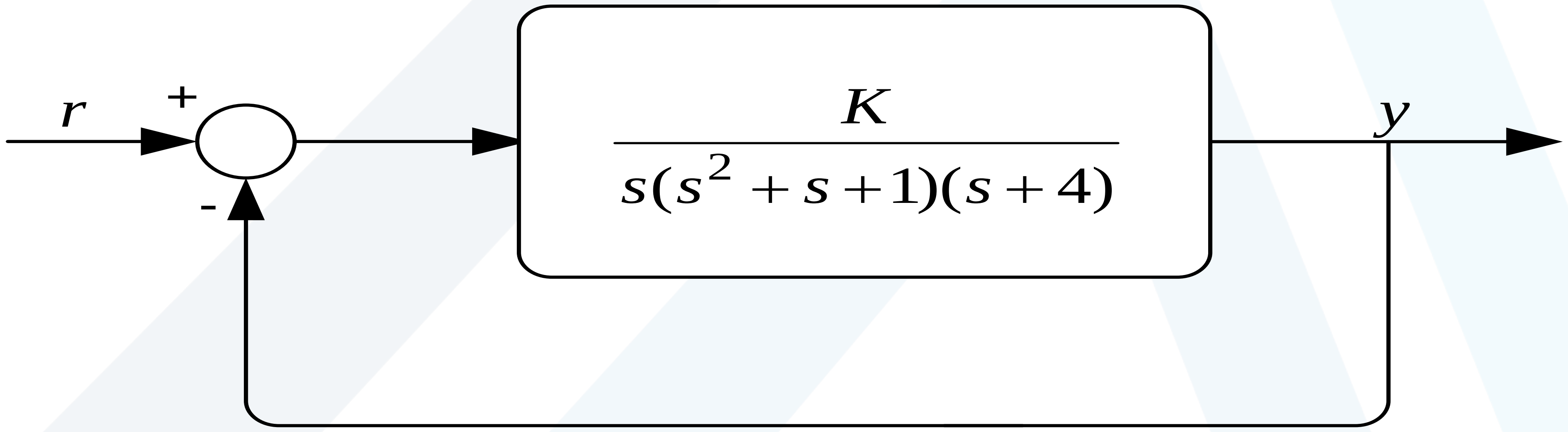
[مثال6]

[مثال7]

مثال6

- لنعتبر نظام الدارة المغلقة المبيّن. سوف نحدد مجال $\boldsymbol{K}$ الذي يجعل النظام مستقراً.
- دالة انتقال الحلقة المغلقة للنظام هي:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{s(s^2+s+1)(s+4)+K}$$



مثال6

$$s(s^2+s+1)(s+4)+K=s^4+5s^3+5s^2+4s+K=0$$

s^4	1	5	K
s^3	5	4	
s^2	$21/5$	K	
s^1	$(84/5-5K)/(21/5)$		
s^0	K		

- ومن أجل نظام مستقر يجب أن تكون إشارات العمود الأول لترتيب راوث كلها موجبة

مثال6

$$K > 0$$

$$(84/5 - 5K) > 0$$

$$\Downarrow$$

$$84/25 > K > 0$$

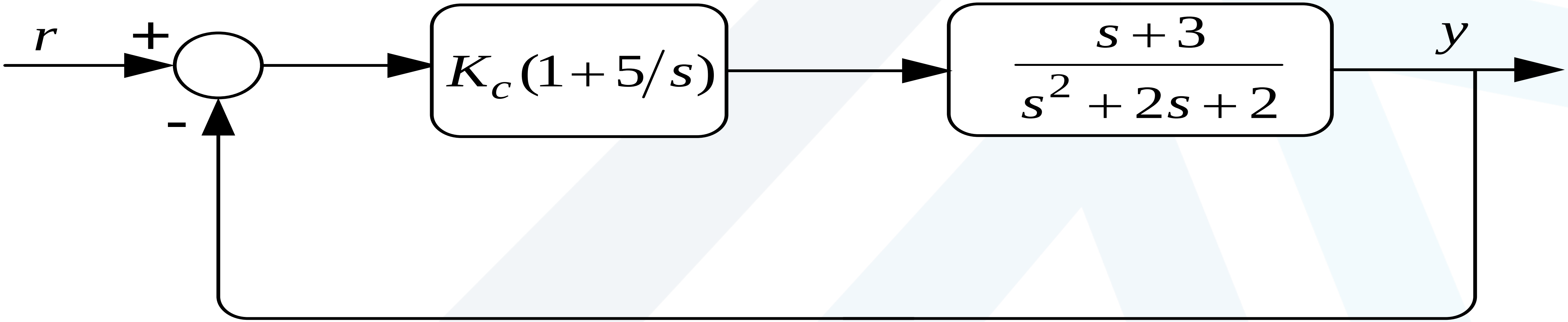
- إذا كانت $K = 84/25$ تصبح جميع عناصر السطر_ s^1 في ترتيب راوث أصفاراً. وبالتالي تكون المعادلة المساعدة:

$$\frac{21}{5}s^2 + \frac{84}{25} = 0 \Rightarrow s = \pm j\sqrt{4/5} = \pm j\omega_0$$

$$K = \frac{84}{25} \Rightarrow \left(\omega_0 = \sqrt{4/5} \quad rad/sec\right)$$

مثال7

- باعتبار نظام الحلقة المغلقة المبيّن. بحيث أنّ المنظم من النوع PI يتحكم بنظام من الدرجة الثانية. دعنا نحدد مجال K_c الذي يمكّن أقطاب الحلقة المغلقة من تحقيق $Re(s) < -2$.



مثال7

- المعادلة المميّزة للنظام هي:

$$s^2 + 2s + 2 + K_c(1 + \frac{5}{s})(s + 3) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$s^3 + (2 + K_c)s^2 + (2 + 8K_c)s + 15K_c = 0$$

$$s = \hat{s} - 2 \Downarrow$$

$$(\hat{s} - 2)^3 + (2 + K_c)(\hat{s} - 2)^2 + (2 + 8K_c)(\hat{s} - 2) + 15K_c = 0$$

$$\hat{s}^3 + (K_c - 4)\hat{s}^2 + (4K_c + 6)\hat{s} + (3K_c - 4) = 0$$

مثال7

- بتطبيق اختبار راوث نحصل على الترتيب التالي:

$$
\begin{array}{c|cc}
\hat{s}^3 & 1 & 4K_c+6 \\
\hline
\hat{s}^2 & K_c-4 & 3K_c-4 \\
\hline
\hat{s}^1 & \dfrac{4K_c^2-13K_c-20}{K_c-4} & \\
\hline
\hat{s}^0 & 3K_c-4 &
\end{array}
$$

- إذا لم يكن هنالك تغير في إشارات العمود الأول من ترتيب راوث، عندئذٍ كل الجذور تحقق $Re(\hat{s}) < -2$. وهذا يعني أنّ جذور المعادلة المميزة الأصلية تحقق $Re(s) < -2$.

مثال7

- وبالتالي نحتاج أن تحقق K_c كل الشروط التالية:

$$K_c > 4 \quad ; \quad K_c > 4.3892$$

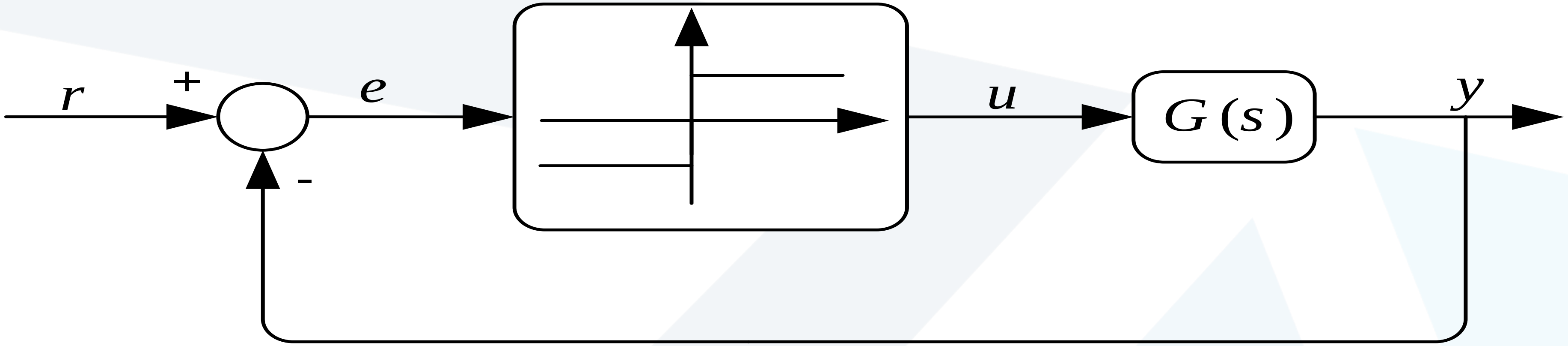
$$K_c < -1.1392 \qquad ; K_c > \frac{4}{3}$$

- لا تؤخذ $K_c < -1.1392$ بعين الاعتبار وذلك لأنّ K_c لا يمكن أن تكون سالبة. وبالتالي فإنّه يتحقق $Re(s) < -2$ من أجل جميع أقطاب الحلقة المغلقة عند $K_c > 4.3892$.

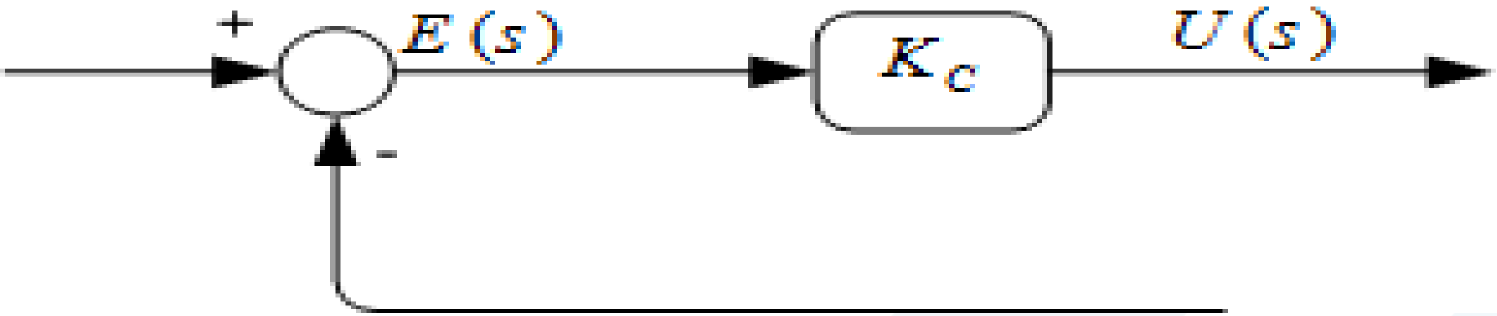
أنماط التحكم الأساسية

- التحكم فتح/إغلاق On-off.
- التحكم التناسبي Proportional.
- التحكم التكاملي Integral.
- التحكم التفاضلي Derivative.
- التحكم التناسبي-التكاملي-التفاضلي PID

التحكم فتح/إغلاق   On-off.



التحكم التناسبي Proportional.



(a)تحكم تناسبي

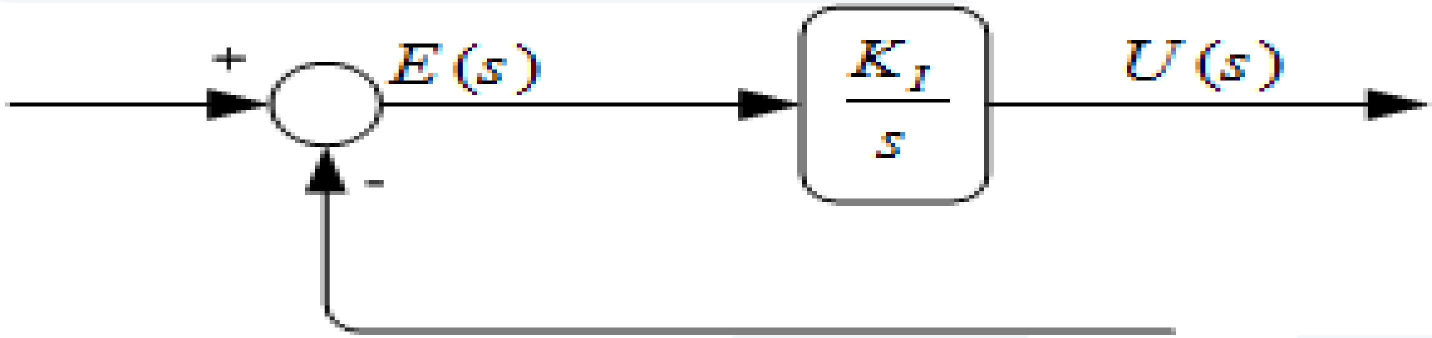
$$u(t) = K_C e(t)$$

$$U(s) = K_C E(s)$$

- حيث K_C هو ربح المتحكم.

التحكم التكاملي Integral

- نمط التحكم التكاملي(reset control)



(b)تحكم تكاملي

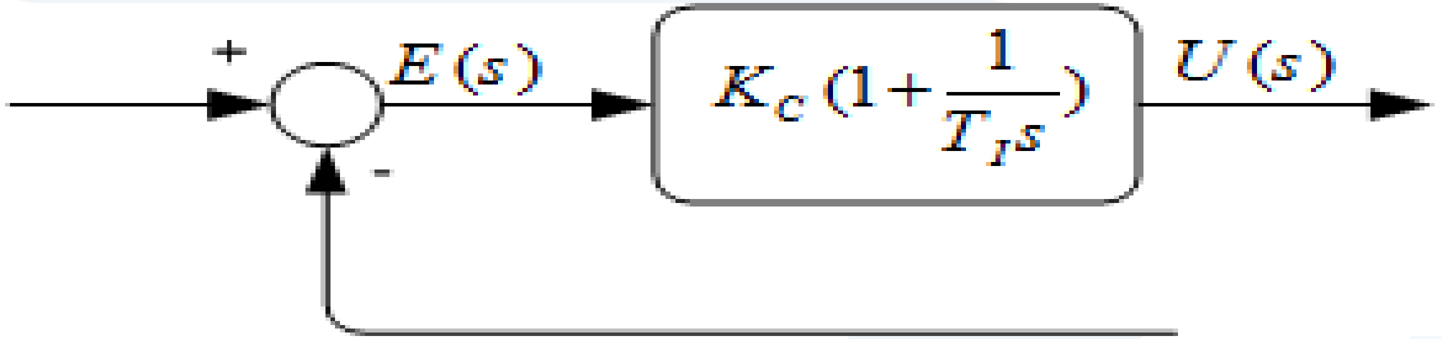
$$u(t) = K_I \int_0^t e(t)dt$$

$$U(s) = \frac{K_I}{s} E(s)$$

- حيث K_I هو ربح التكامل.

التحكم التناسبي-التكاملي PI

- اتحاد النمط التناسبي مع النمط التكاملي PI



(c) تحكم PI

$$U(s) = K_C E(s) + \frac{K_I}{s} E(s)$$

$$= K_C (1 + \frac{1}{T_I s}) E(s)$$

$$u(t) = K_C [e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(t) dt]$$

التحكم التفاضلي Derivative

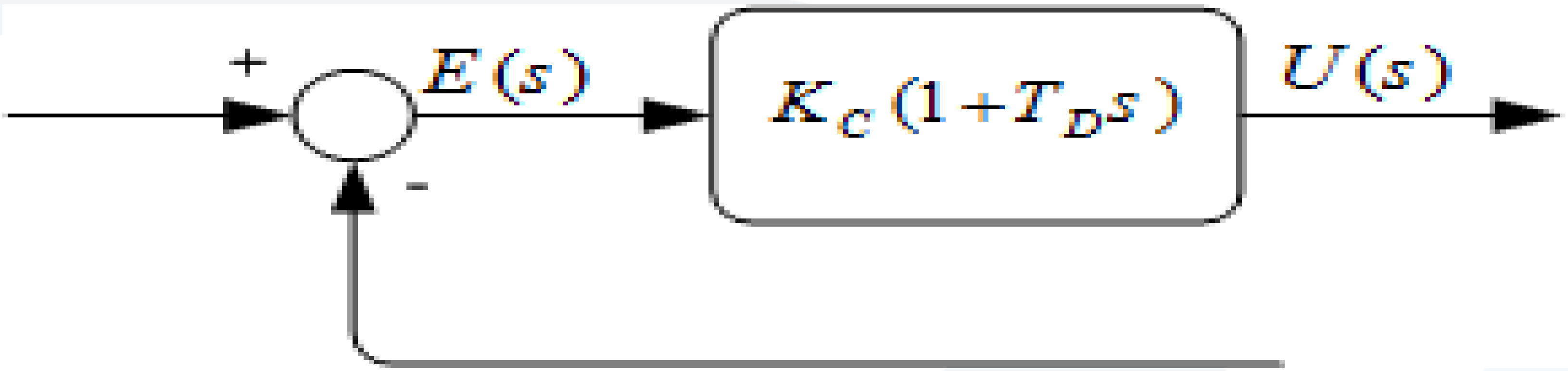
- التحكم التفاضلي(rate control)

$$u(t) = K_D \frac{d}{dt} e(t)$$

$$U(s) = K_D s E(s)$$

- حيث K_D هو الربح التفاضلي.
- ولا يُستخدم نمط التحكم التفاضلي عادةً لوحده وذلك لأنّ التحكم في هذا النمط لا يولّد جهداً تصحيحياً لأي خطأ ثابت.
- ويشكّل PD:

التحكم التناسبي-التفاضلي PD



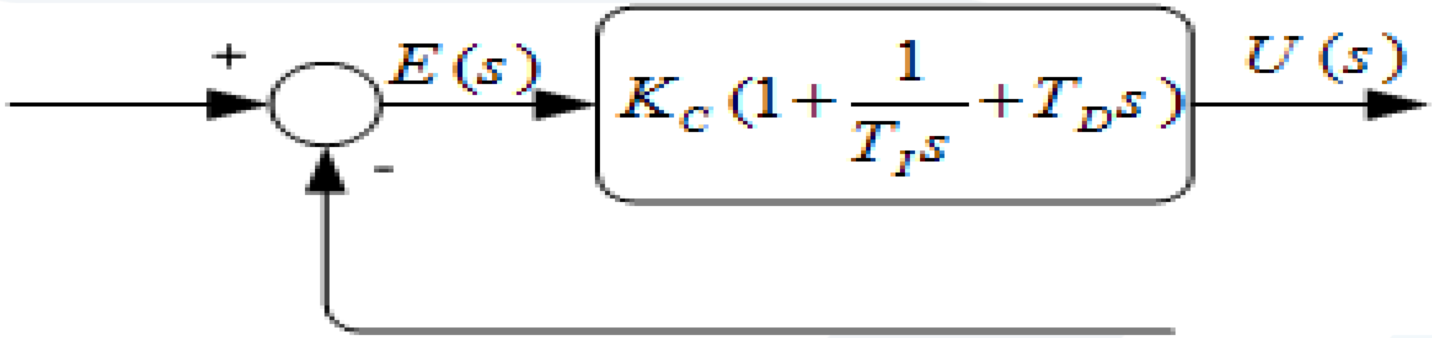
(d) تحكم PD

$$U(s) = K_C E(s) + K_D sE(s)$$
$$= K_C(1+T_D s)E(s)$$

$$u(t) = K_C[e(t) + T_D \frac{d}{dt} e(t)]$$

حيث T_D هو زمن التفاضل أو زمن المعدِّل.

التحكم التناسبي-التكاملي-التفاضلي PID



(e) تحكم PID

$$U(s) = K_C\left(1+\frac{1}{T_I s}+T_D s\right)E(s)$$

$$u(t) = K_C\left[e(t)+\frac{1}{T_I}\int_0^t e(t)dt + T_D\frac{d}{dt}e(t)\right]$$