كلية الهندسة
جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY

قسم الميكاترونيكس

عميد الكلية
د. إياد حاتم

مقدمة في نظم التحكم (الخطي و اللاخطي)

Introduction to Control systems (linear and Nonlinear)

مدرس المقرر

د.بلال شيحا

المحاضرة الثالثة

- *MIMO system*
- Models of Disturbances and Standard Test Signal
- Standard Test Signal
- Dynamic Response
- Characteristic Parameters of First- and Second-order Models

MIMO

$$G(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{b_0 s^m+b_1 s^{m-1}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+b_{m-1}s+b_m}{s^n+a_1 s^{n-1}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+a_{n-1}s+a_n};m\le n$$

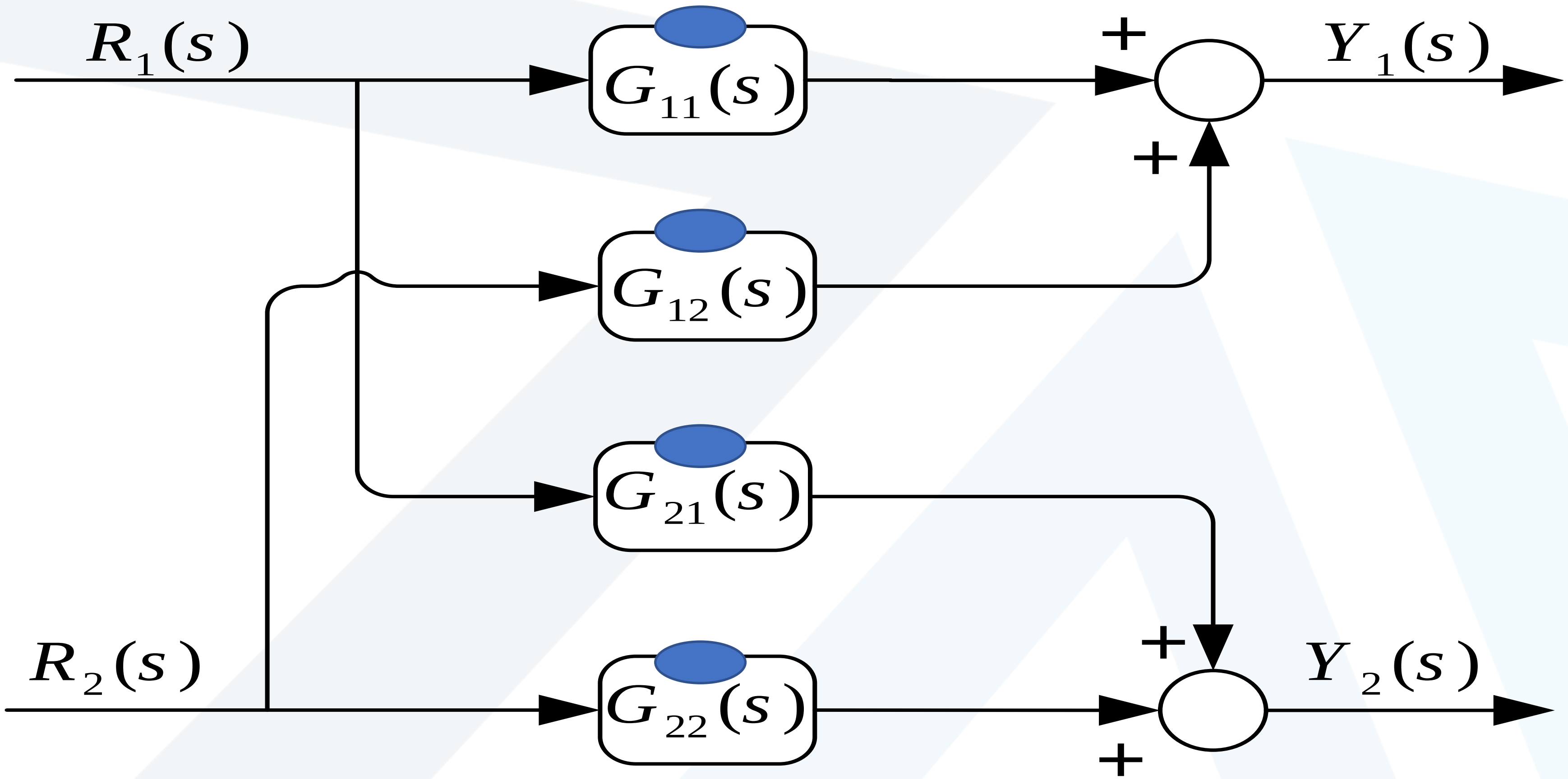
$$=\frac{N(s)}{\Delta(s)}$$

$$\Delta(s)=0 \qquad N(s)=0$$

$$G(s)=\frac{K(s+z_1)(s+z_2)\ldots\ldots\ldots\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots\ldots\ldots(s+p_n)}\quad;m\le n$$

$$G(s)=\frac{K(s+z_1)(s+z_2)\ldots\ldots\ldots\ldots(s+z_m)}{(s+p_1)^{\nu}(s+p_{\nu+1})\ldots\ldots\ldots(s+p_n)}\quad;m\le n$$

MIMO



$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_1(s) \\ R_2(s) \end{bmatrix}$$

$$G_{11}(s) = \left.\frac{Y_1(s)}{R_1(s)}\right|_{R_2(s)=0}$$

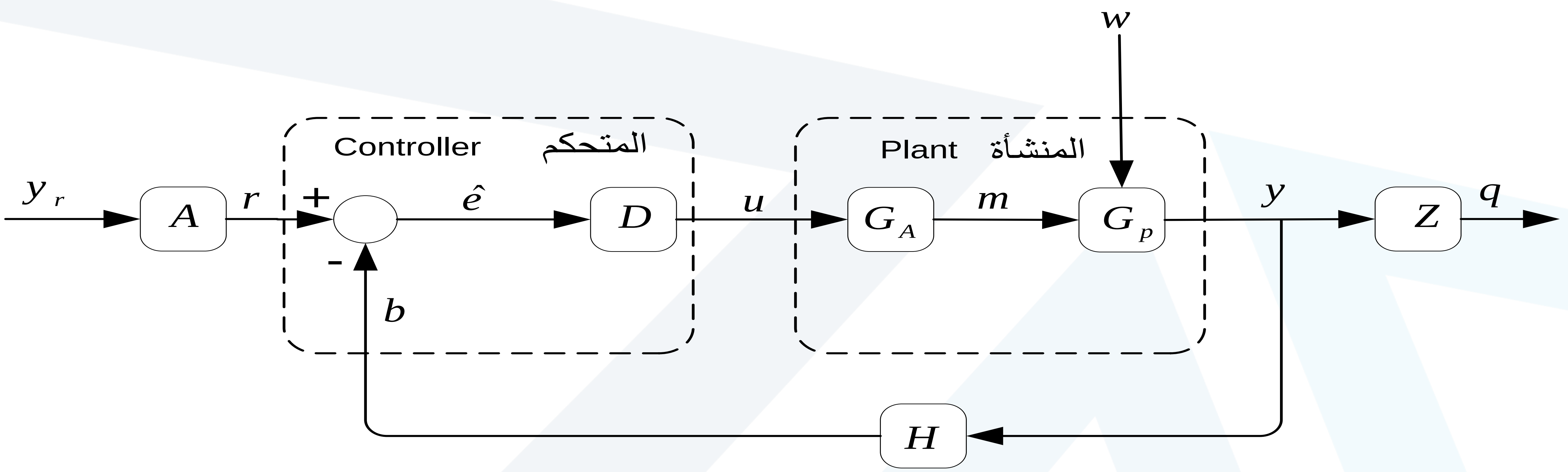
$$G_{12}(s) = \left. \frac{Y_1(s)}{R_2(s)} \right|_{R_1(s)=0}$$

$$G_{21}(s) = \left.\frac{Y_2(s)}{R_1(s)}\right|_{R_2(s)=0}$$

$$G_{22}(s) = \left.\frac{Y_2(s)}{R_2(s)}\right|_{R_1(s)=0}$$

نماذج إشارات التشويش وإشارات الاختبار القياسية

Models of Disturbances and Standard Test Signal



Simple Models of Disturbances

Pulse and Impulse Functions دوال النبضة المستطيلة والنبضة

Unit Impulse Function دالة النبضة الواحدية

Step Function دالة الخطوة

Ramp Function دالة السرعة

Parabolic Function دالة القطع المكافئ

Sinusoidal Function الدالة الجيبية

دوال النبضة المستطيلة والنبضة
Pulse and impulse functions

- النبضة المستطيلة والنبضة هي الحالة المثالية البسيطة لاضطراب مفاجئ لفترة زمنية قصيرة.

- تُعرف النبضة المستطيلة impulse function كما يلي:

$$P_T(t) = \begin{cases} 1 & for \quad 0 < t < T \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

- تحويل لابلاس لدالة النبضة المستطيلة هو:

$$\ell\left[P_T(t)\right] = \int_0^\infty P_T(t) e^{-st} dt = \int_0^T e^{-st} dt = \frac{1}{s}\left(1 - e^{-sT}\right)$$

دالة النبضة الواحدية

Unit Impulse Function

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & for \quad t \neq 0 \\ \infty & for \quad t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, f(t)\, dt = f(0)$$

$$\ell\left[\delta_{\Delta}(t)\right] = \frac{1}{s\Delta}\left(1 - e^{-s\Delta}\right)$$

دالة النبضة الواحدية

Unit Impulse Function

$$\delta_{\Delta}(t)=\frac{1}{\Delta}P_{\Delta}(t)$$

$$\ell\left[\delta(t)\right]=\lim_{\Delta\to 0}\frac{\frac{d}{d\Delta}\left(1-e^{-s\Delta}\right)}{\frac{d}{d\Delta}(s\Delta)}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{se^{-s\Delta}}{s}$$

$$\ell\left[\delta(t)\right]=1$$

دالة الخطوة

Step Function

إن إشارة الخطوة هي مظهر آخر للاضطراب وهي تستخدم بشكل نموذجي لتمثيل قفزة مفاجئة في المطال إلى اضطراب ثابت آخر (تغير بطيء).

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 & for \quad t > 0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$\ell\left[\mu(t)\right] = \frac{1}{s}$$

دالة السرعة

Ramp Function

$$f(t)=\begin{cases} t & \text{for} \quad t>0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f(t)=t\,\mu(t)$$

$$\ell\left[f(t)\right]=\frac{1}{s^{2}}$$

تستخدم دالة السرعة لتمثيل الاضطرابات التي تظهر بشكلٍ مفاجئٍ ومن ثم تنحرف مبتعدةً.

دالة القطع المكافئ

Parabolic Function

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{t^2}{2} & for \quad t>0\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$f(t)=\frac{t^2}{2}\mu(t)$$

$$\ell\left[f(t)\right]=\frac{1}{s^3}$$

الدالة الجيبية

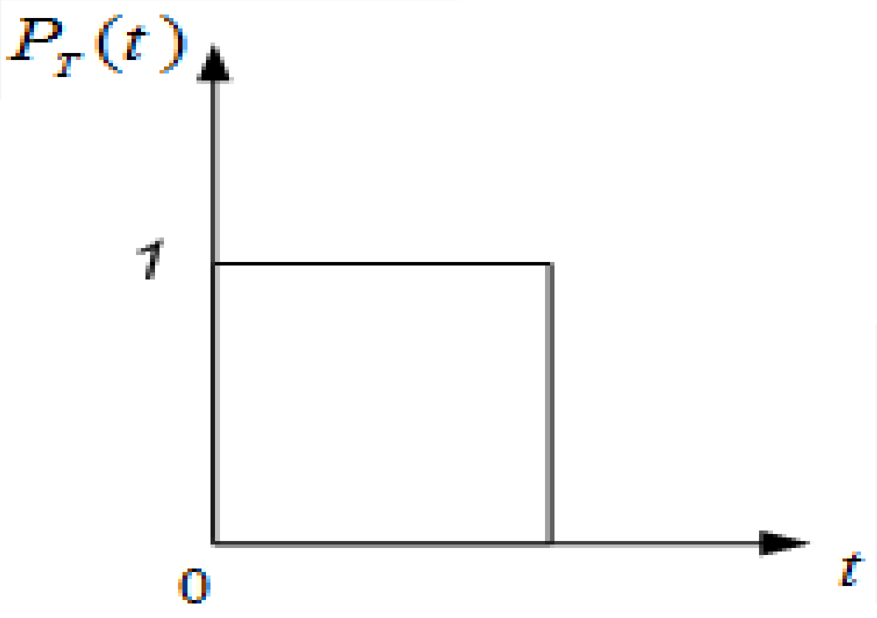
Sinusoidal Function

الموجة الجيبية هي مظهر للاضطراب الدوري. وكمثال عليها الأمواج في نظم التحكم بالسفن.
من أجل موجة جيبية بمطال واحدي وبتردد هذا يعني:

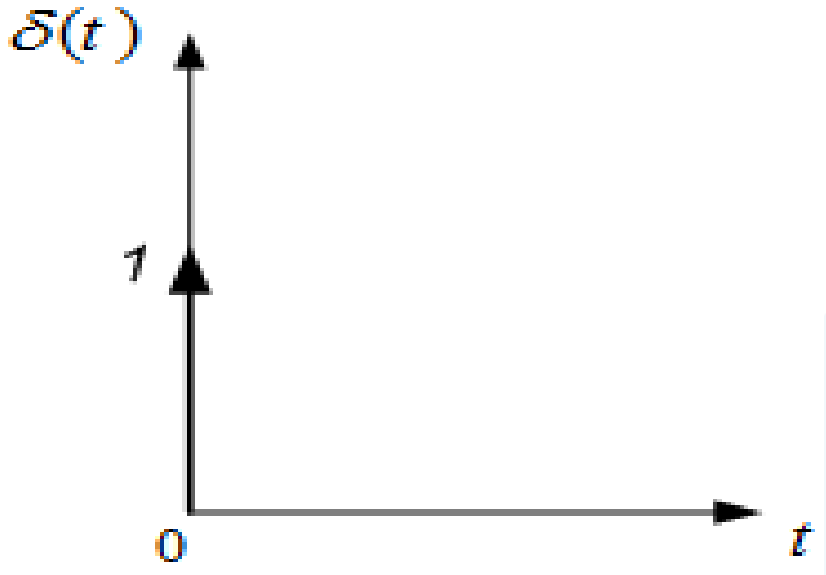
$$f(t) = \sin \omega t \, \mu(t)$$

$$\ell\left[f(t)\right] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

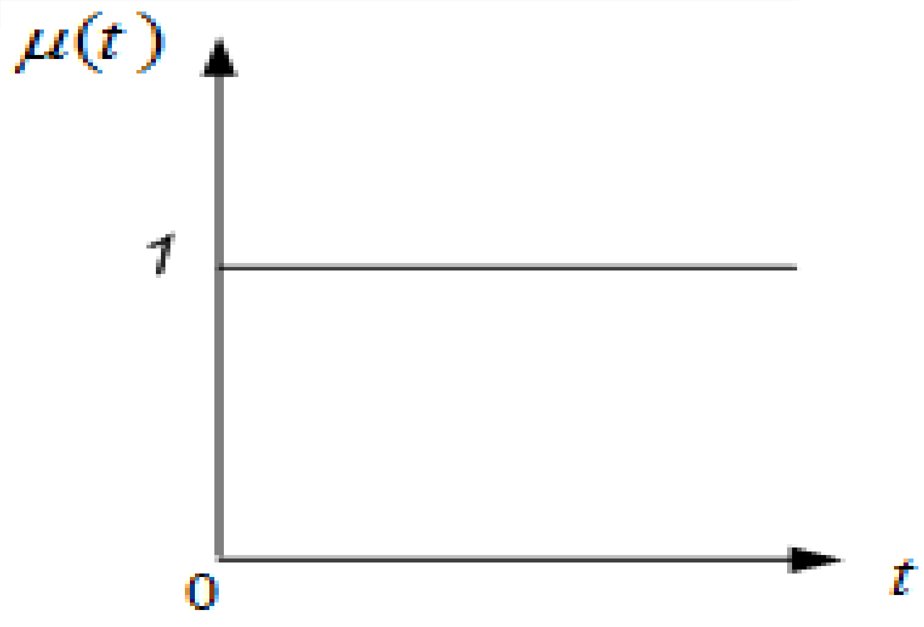
دوال النبضة المستطيلة والنبضة
Pulse and impulse functions



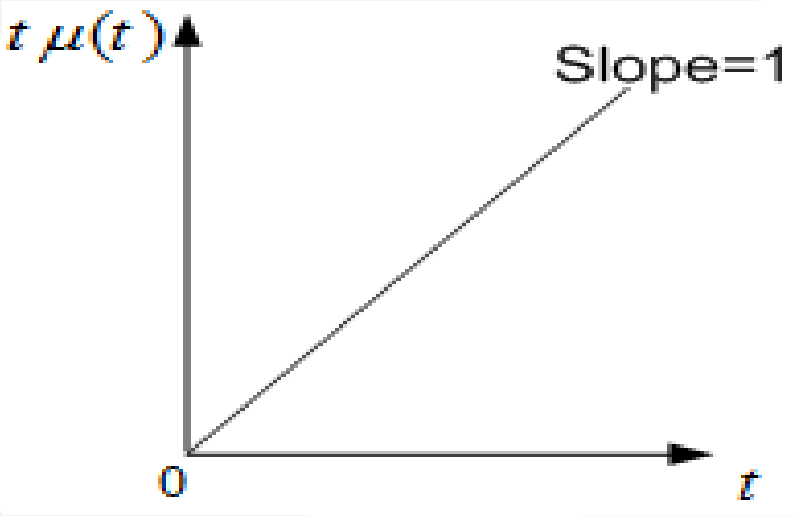
دالة النبضة الواحدية



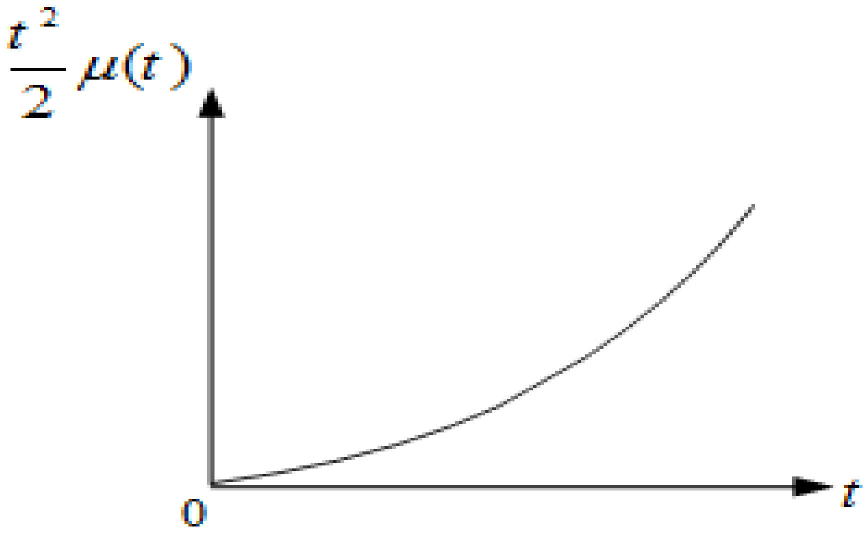
دالة الخطوة



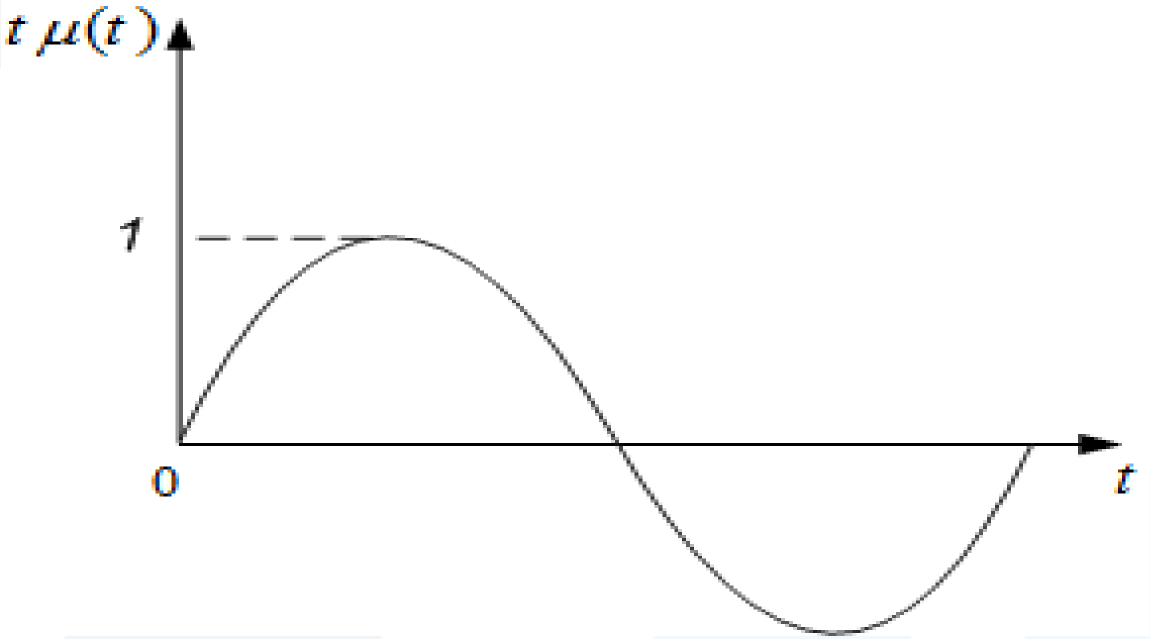
دالة السرعة



دالة القطع المكافئ



الدالة الجيبية



Standard Test Signal
إشارات الاختبار القياسية

- خواص الإشارات الفعلية التي يتعرض لها نظام التحكم هي:
- صدمة مفاجئة (يتم نمذجتها بواسطة دالة النبضة).
- تغير مفاجئ (يتم نمذجته بواسطة دالة الخطوة).
- تغير خطي مع الزمن (يتم نمذجته بواسطة دالة السرعة).
- تغير أسرع مع الزمن (دالة القطع المكافئ هي أسرع بمقدار درجة واحدة من دالة السرعة).
- يمكن بشكلٍ كافٍ التحكم ومقارنة السلوك الديناميكي للنظام عند تطبيق إشارات الاختبار القياسية: دخل نبضة ودخل خطوة ودخل سرعة ودخل قطع مكافئ.

الاستجابة الديناميكية
Dynamic Response

ويتعلق هذا المقطع بالاستجابة الديناميكية للنظم الخطية الثابتة مع الزمن وذلك لإشارات الاضطراب وإشارات الاختبار القياسية. وسوف ندرس استجابة النظام من نموذج دالة انتقاله؛ لذلك نفترض أن النظام بشكل أولي Relaxed. بشكل أساسي هناك أربع خطوات لحساب $y(t)$ من:

$$Y(s)=G(s)R(s)$$

1) إيجاد تحويل لابلاس للإشارة $r(t)$ باستخدام خواص تحويل لابلاس أو الجداول.
2) حساب أقطاب $G(s)R(s)$.
3) نشر $Y(s)$ إلى كسور جزئية.
4) الحصول على $y(t)$ عن طريق إيجاد تحويل لابلاس العكسي للدالة $Y(s)$ مستخدمين الجداول.

مثال 1

مثال 1

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$

$$r(t) = 5\mu(t)$$

$$R(s) = \frac{5}{s}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} R(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}\left(\frac{5}{s}\right)$$

مثال 1

$$Y(s)=\frac{5}{s(s+1)(s+2)}=\frac{A_1}{s}+\frac{A_2}{(s+1)}+\frac{A_3}{(s+2)}$$

$$A_1=\lim_{s\to 0}\left[(s)\frac{5}{s(s+1)(s+2)}\right]=\frac{5}{2}$$

$$A_2=\lim_{s\to -1}\left[(s+1)\frac{5}{s(s+1)(s+2)}\right]=-5$$

$$A_3=\lim_{s\to -2}\left[(s+2)\frac{5}{s(s+1)(s+2)}\right]=\frac{5}{2}$$

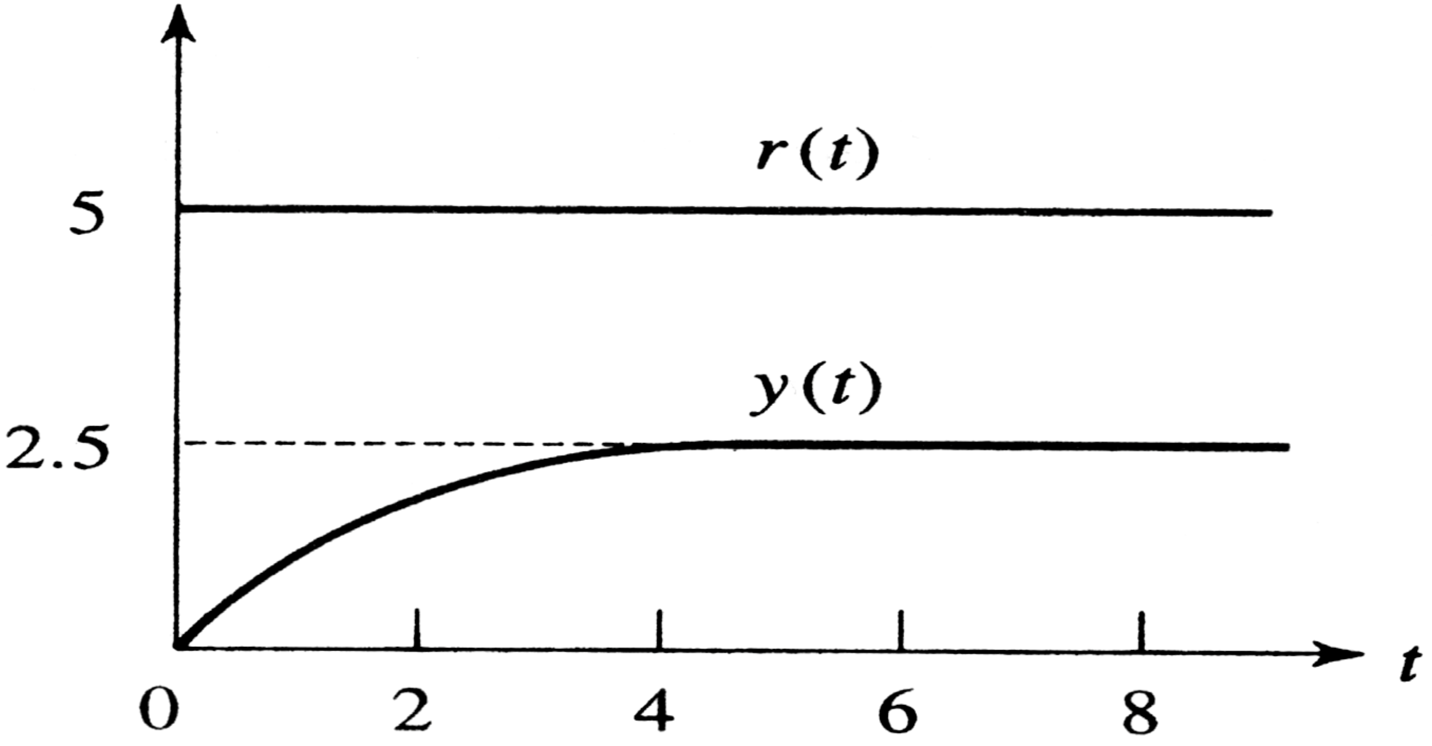
$$Y(s)=\underbrace{\frac{5/2}{s}}_{Excictation\quad pole}\underbrace{-\frac{5}{s+1}+\frac{5/2}{s+2}}_{System\quad pole}$$

مثال 1

$$y(t) = [\underbrace{\frac{5}{2}}_{Steady\quad state\quad response} - \underbrace{5e^{-t} + \frac{5}{2}e^{-2t}}_{Transient\quad response}]\,\mu(t)$$

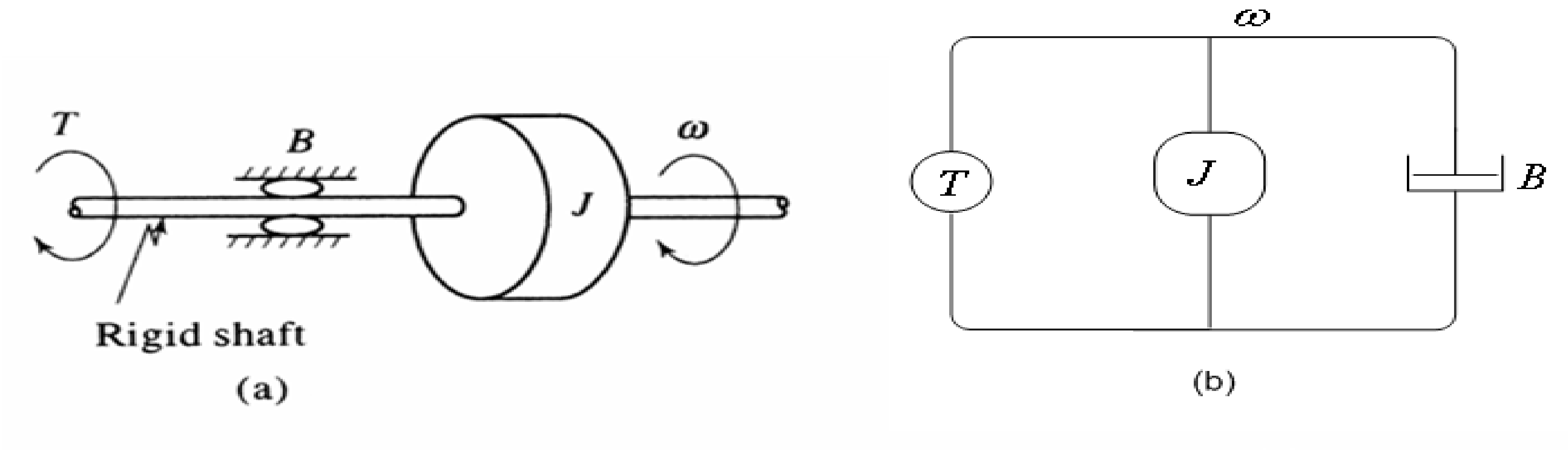
$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s)$$

مثال 1



البارامترات المميزة لنماذج الدرجة الأولى والثانية
Characteristic Parameters of First- and Second-order Models

- نماذج الدرجة الأولى First-Order Models
- نماذج الدرجة الثانية Second-Order Models



$$T(t) = J\frac{d\omega(t)}{dt} + B\omega(t)$$

نماذج الدرجة الأولى
First-Order Models

$$T(s) = Js\,\omega(s) + B\,\omega(s)$$

$$\omega(s) = \ell\left[\omega(t)\right]; \qquad T(s) = \ell\left[T(t)\right]$$

$$G(s) = \frac{\omega(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js + B} = \frac{1/J}{s + B/J}$$

$$s = -B/J \qquad\qquad 1/J$$

نماذج الدرجة الأولى
First-Order Models

$$G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

$$\tau = J/B, \qquad and \qquad K = 1/B$$

$$\frac{\omega(s)}{T(s)} = \frac{K}{\tau s + 1}$$

نماذج الدرجة الأولى
First-Order Models

$$T(t)=\mu(t)\Rightarrow T(s)=1/s$$

$$\omega(s)=\frac{K}{s(\tau s+1)}=K\left[\frac{1}{s}-\frac{\tau}{\tau s+1}\right]$$

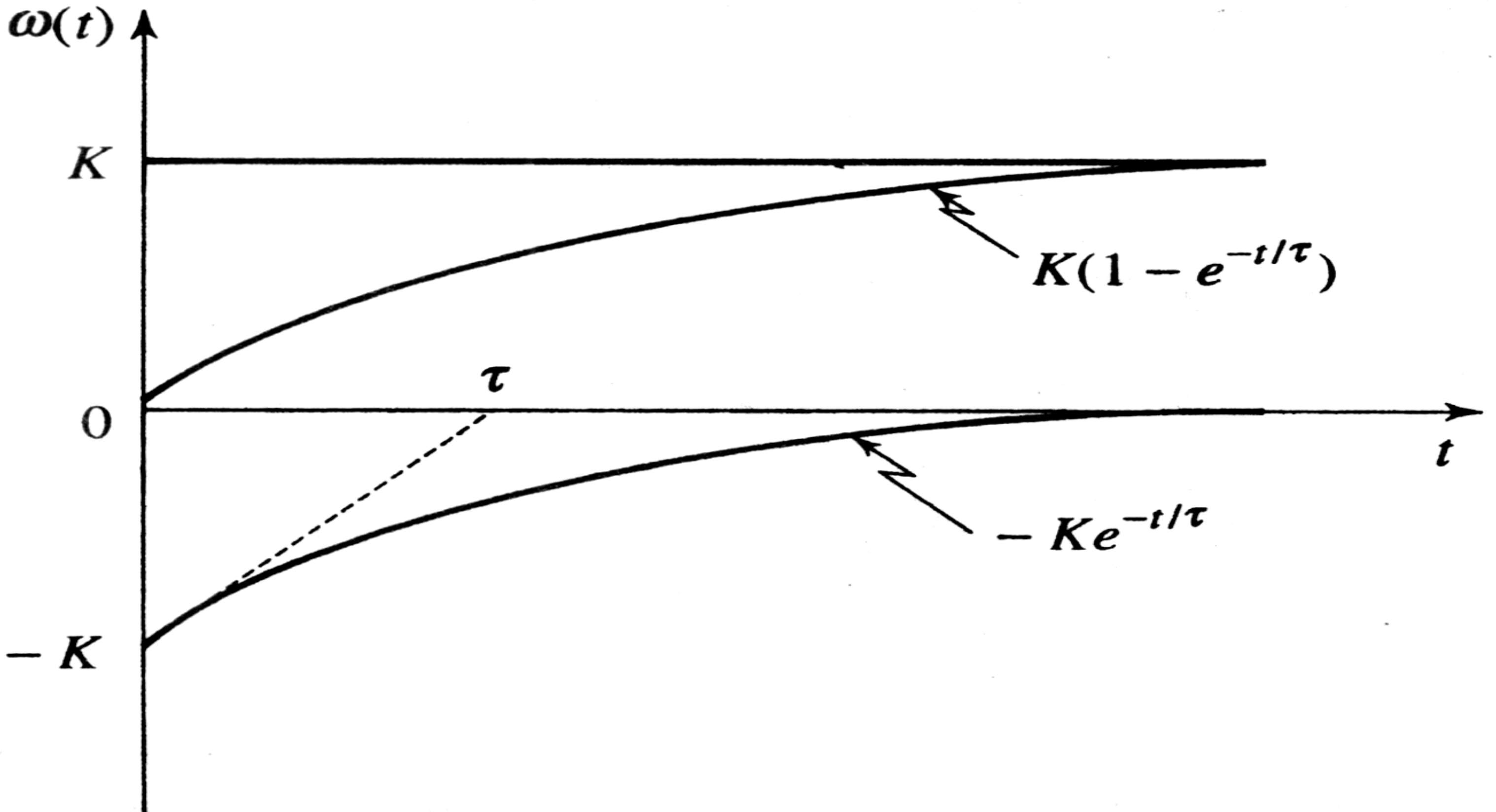
$$\omega(t)=K(1-e^{-t/\tau});\qquad t\geq 0$$

$$\frac{d}{dt}(-Ke^{-t/\tau})\Big|_{t=0}=\frac{K}{\tau}e^{-t/\tau}\Big|_{t=0}=\frac{K}{\tau}$$

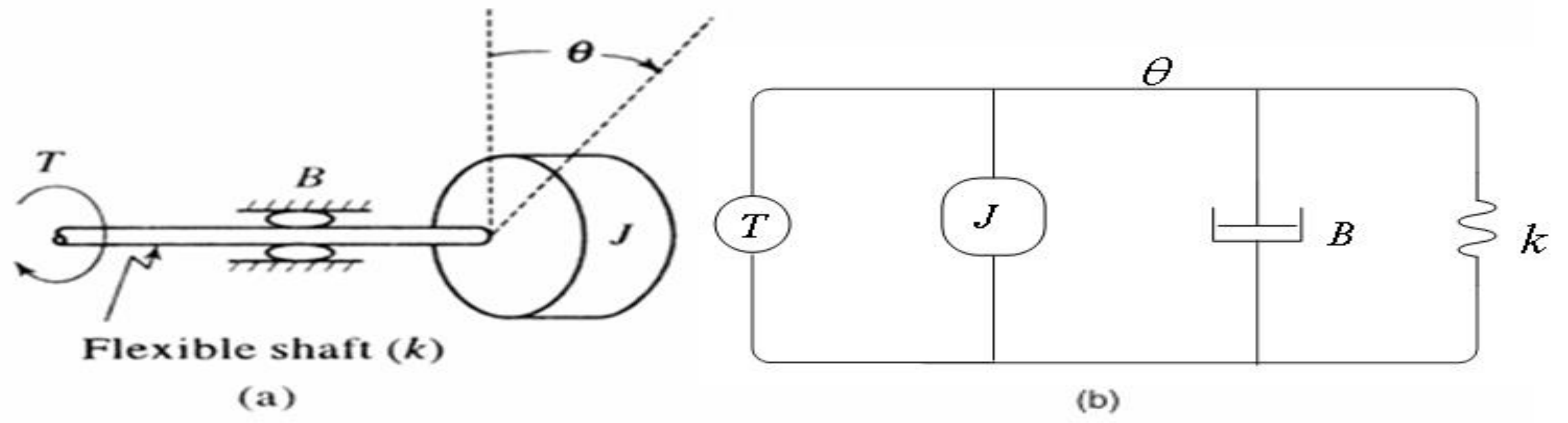
نماذج الدرجة الأولى
First-Order Models

$$\lim_{t \to \infty} \omega(t) = K$$

نماذج الدرجة الأولى
First-Order Models



نماذج الدرجة الثانية
Second-Order Models



نماذج الدرجة الثانية
Second-Order Models

$$T(t) = J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + B\frac{d\theta(t)}{dt} + k\,\theta(t)$$

$$T(s) = Js^2\theta(s) + Bs\,\theta(s) + k\,\theta(s)$$

$$\theta(s) = \ell\left[\theta(t)\right]; \qquad T(s) = \ell\left[T(t)\right]$$

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js^2 + Bs + k} = \frac{1/J}{s^2 + \frac{B}{J}s + \frac{k}{J}}$$

نماذج الدرجة الثانية
Second-Order Models

$$G(s)=\frac{K}{\frac{1}{\omega_n^2}s^2+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+1}\qquad G(s)=\frac{1/k}{\frac{J}{k}s^2+\frac{B}{k}s+1}$$

$$K=\frac{1}{k},\qquad \omega_n=\sqrt{\frac{k}{J}},\qquad \zeta=\frac{1}{2}\frac{B}{\sqrt{kJ}}$$

$$\frac{\theta(s)}{T(s)}=\frac{K\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}\qquad \frac{\theta(s)}{T(s)}=\frac{1/J}{s^2+\frac{B}{J}s+\frac{k}{J}}$$

سنجد فيما يلي الاستجابة الزمنية لإشارة قفزة (خطوة)، ومن خصائص الاستجابة الزمنية تتضح المعاني الفيزيائية للبارامترات K ، ω_n ، ζ .

تقود البارامترات الفيزيائية للنظام الميكانيكي k ، B ، J إلى أربع حالات كما يلي:

نماذج الدرجة الثانية
Second-Order Models

1- النظام غير المتخامد Undamped System ($\zeta = 0$).

2- النظام المتخامد Damped System ($0 < \zeta < 1$).

3- النظم المتخامدة بشكل حرج Critically Damped System ($\zeta = 1$).

4- نظم بتخامد زائد Overdamped System ($\zeta > 1$):

النظام غير المتخامد
Undamped System

$$B = 0 \Longrightarrow \zeta = 0$$

$$\frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{1/J}{s^2 + k/J} = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} \qquad T(t) = \mu(t) \Longrightarrow T(s) = 1/s$$

$$\theta(s) = \frac{K\omega_n^2}{s\left(s^2 + \omega_n^2\right)} = K\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_n^2}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\theta(t) = K(1 - \cos\omega_n t); \quad t \geq 0$$

$$\lim_{t\to\infty}\theta(t) = \lim_{s\to 0} s\,\theta(s) = K$$

النظام المتخامد
Damped System

$$\frac{k}{J} > \left(\frac{B}{2J}\right)^2$$

$$T(t) = \mu(t) \Rightarrow T(s) = 1/s$$

$$\theta(s) = \frac{K\omega_n^2}{s\left(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2\right)}$$

$$= K\left[\frac{1}{s} - \frac{s+\zeta\omega_n}{\left(s+\zeta\omega_n\right)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{\left(s+\zeta\omega_n\right)^2 + \omega_d^2}\right]$$

النظام المتخامد

Damped System

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\theta(t) = K\left[1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t\right)\right]$$

$$= K\left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_d t + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right]; \quad t \geq 0$$

النظام المتخامد

Damped System

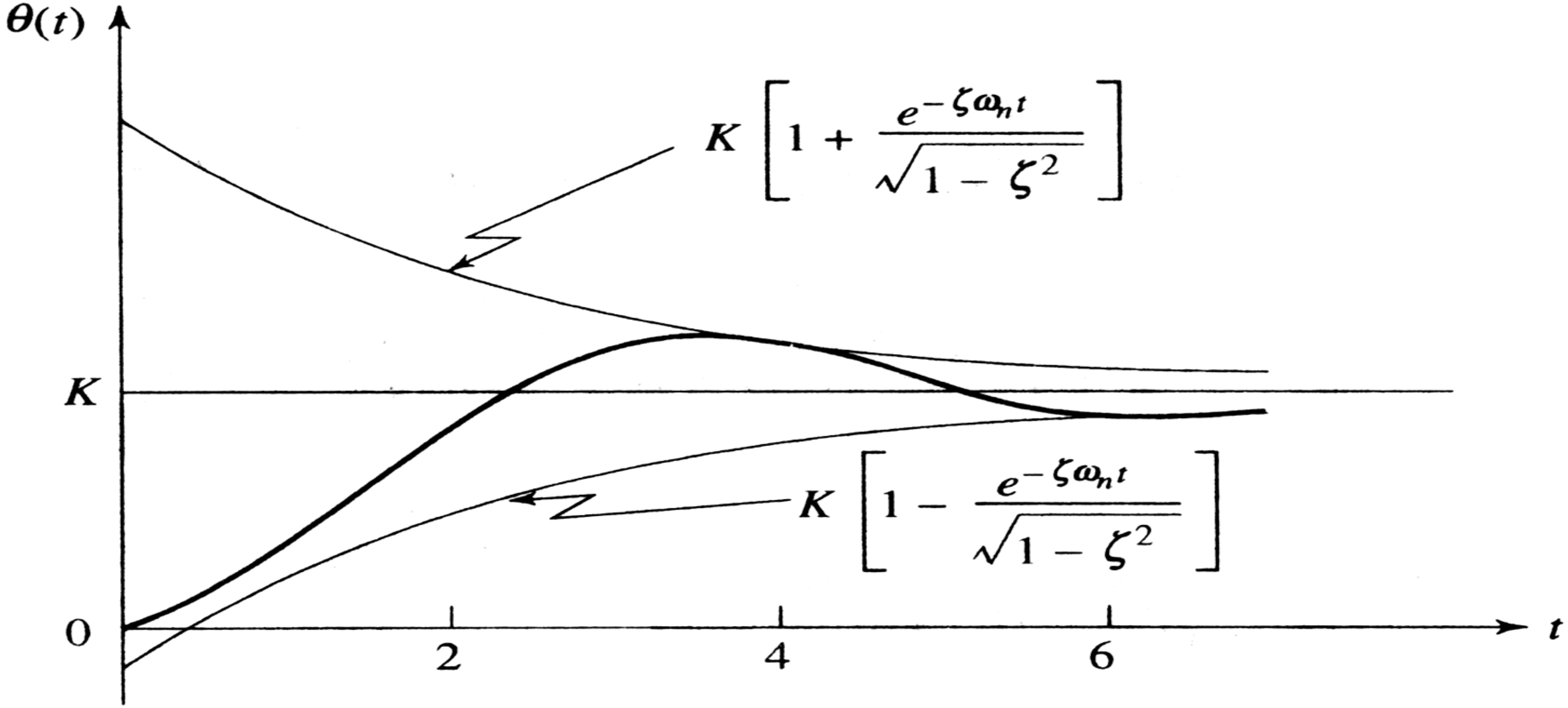
$$\theta(t) = K\left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\left(\omega_d t + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right]$$

$$K\left[1 \pm \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right] \qquad \tau = \frac{1}{\zeta\omega_n}$$

$$\lim_{t\to\infty}\theta(t) = \lim_{s\to 0} s\,\theta(s) = K$$

وإنّ قيمة الحالة الثابتة لاستجابة النظام لدخل خطوة واحدية هي K وهذا البارامتر هو ربح النظام system gain الذي يعطينا التغير في متغير الخرج عند الحالة الثابتة استجابةً لتغير واحدي في متغير الدخل.

$e^{-at}\sin\omega t$	$\dfrac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos\omega t$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
$\dfrac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t)$ $(0<\zeta<1)$	$\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$
$-\dfrac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t-\phi)$ $\phi=\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$ $(0<\zeta<1, 0<\phi<\pi/2)$	$\dfrac{s}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$
$1-\dfrac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t-\phi);$ $\phi=\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$ $(0<\zeta<1, 0<\phi<\pi/2)$	$\dfrac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}$



$\theta(t)$
$K\left[1+\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right]$
K
$K\left[1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right]$
0
2
4
6
t

النظم المتخامدة بشكل حرج
Critically Damped System

$$\frac{k}{J} = \left(\frac{B}{2J} \right)^2$$

$$T(t) = \mu(t) \Rightarrow T(s) = 1/s$$

$$\theta(s) = \frac{K\omega_n^2}{s\left(s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2\right)} = K\left[\frac{1}{s} - \frac{\omega_n}{\left(s + \omega_n\right)^2} - \frac{1}{s + \omega_n}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\theta(t) = K\left[1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t}\right]; \quad t \geq 0$$

$$\lim_{t \to \infty} \theta(t) = \lim_{s \to 0} s\theta(s) = K$$

النظم المتخامدة بشكل حرج
Critically Damped System

$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at}; \quad n=1,2,3,\cdots$	$\frac{1}{(s+a)^n}$

نظم بتخامد زائد
Overdamped System

$$\frac{k}{J} < \left(\frac{B}{2J}\right)^2$$

$$\theta(s) = \frac{K\,\omega_n^2}{s\left(s^2 + 2\omega_n s + \omega_n^2\right)}$$

$$= \frac{K\,\omega_n^2}{s\left(s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\left(s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}\right)}$$

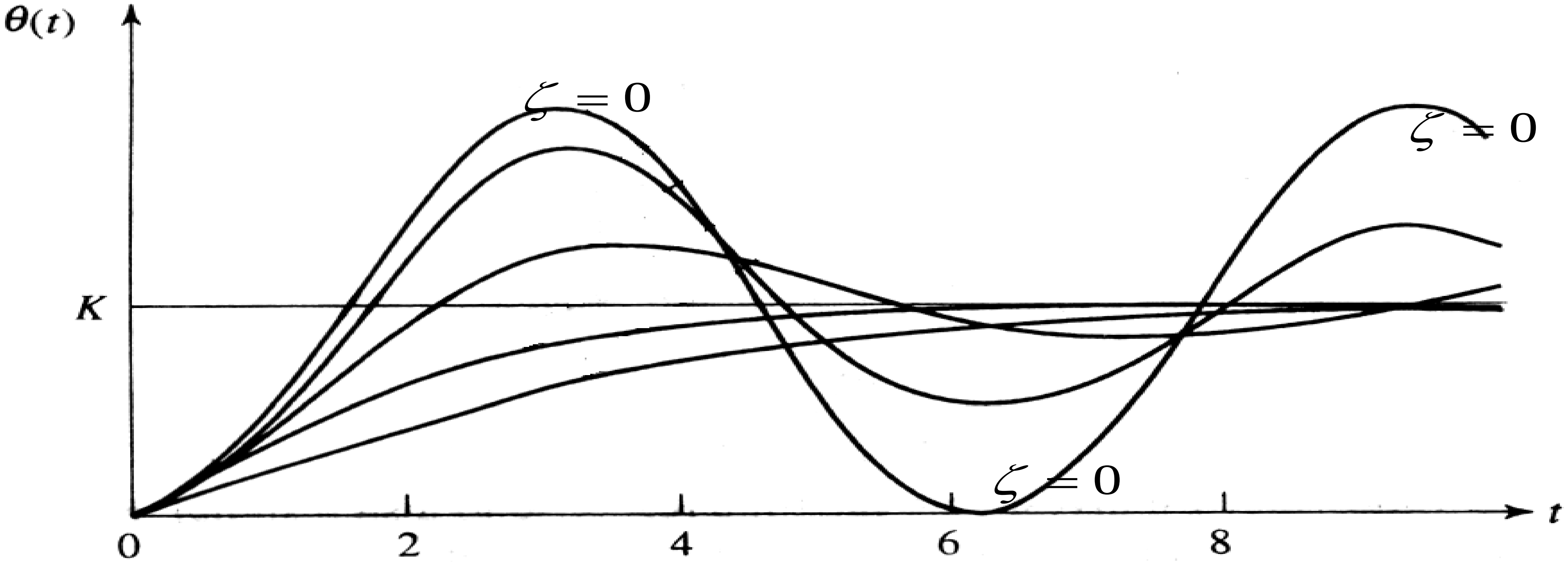
$$= K\left[\frac{1}{s} + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)}\left(\frac{1}{s + \zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}\right)\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)}\left(\frac{1}{s + \zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}}\right)\right]$$

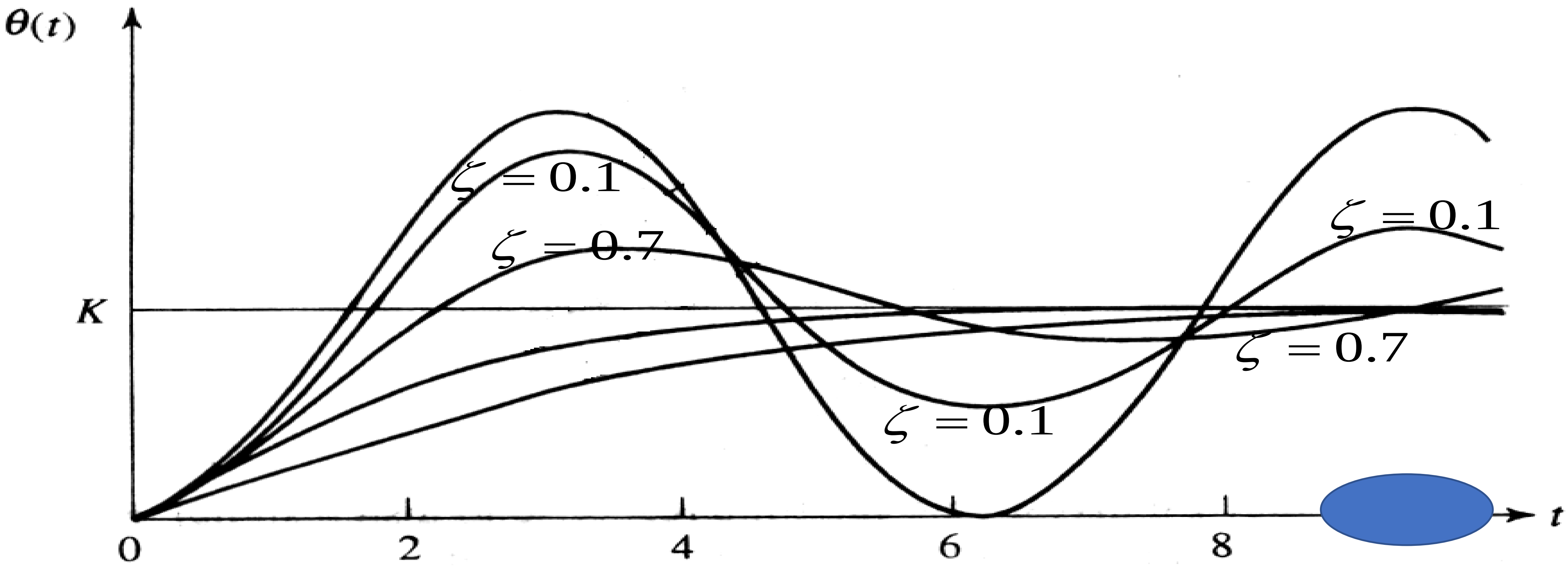
نظم بتخامد زائد
Overdamped System

$$\theta(t) = K\left[1 + \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)} e^{-\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n t} - \frac{1}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)} e^{-\left(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)\omega_n t}\right]; \quad t \geq 0$$

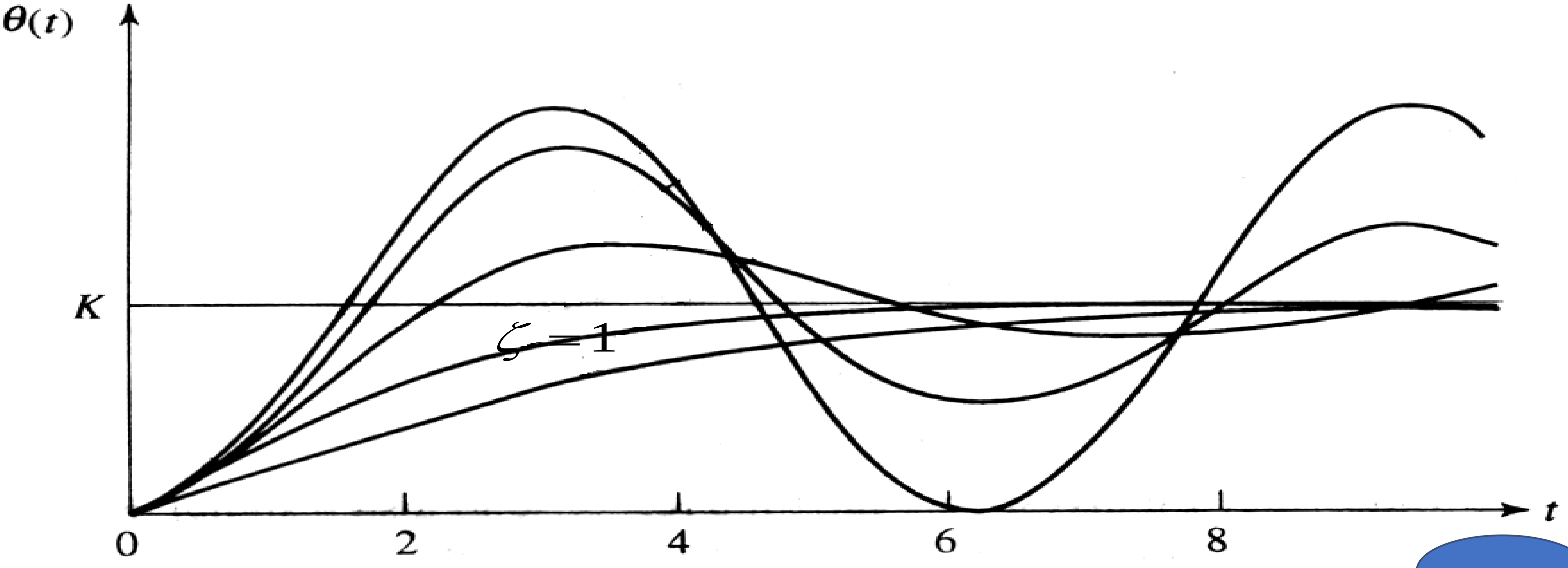
$$\lim_{t \to \infty} \theta(\mathrm{t}) = \lim_{s \to 0} \mathrm{s}\,\theta(\mathrm{s}) = \mathrm{K}$$



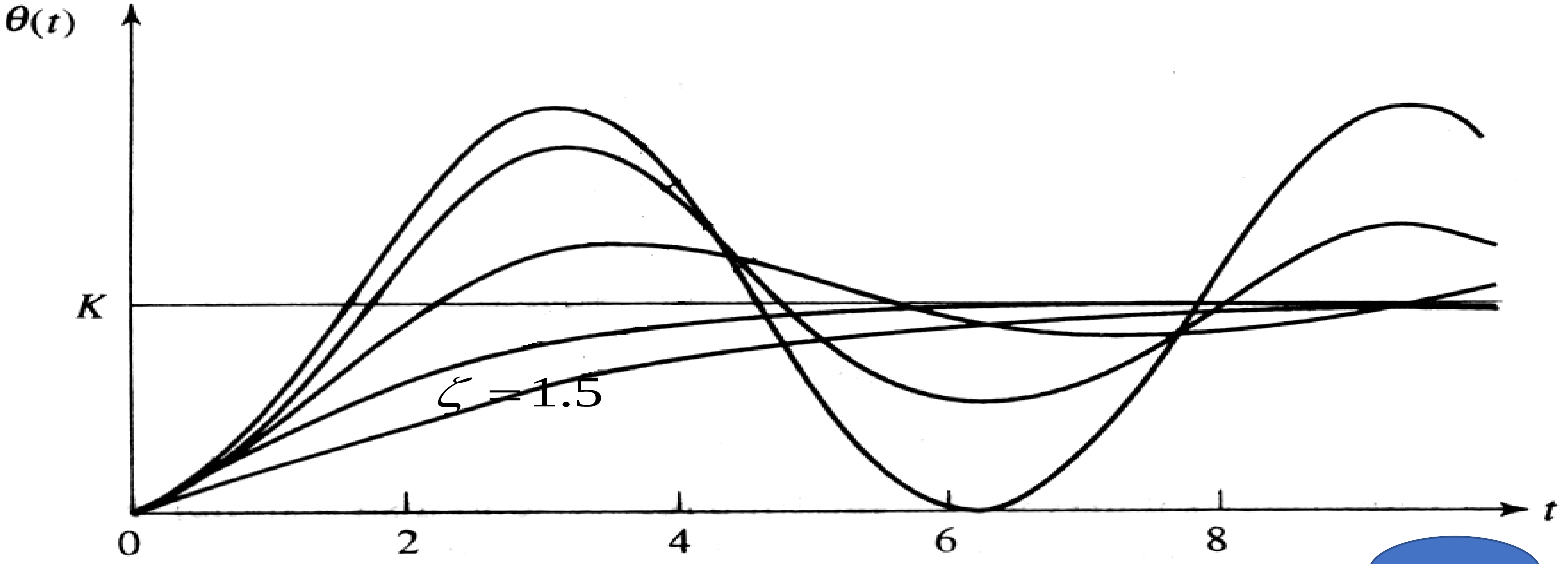
$\theta(t)$
$\zeta = 0$
$\zeta = 0$
$\zeta = 0$
K
0
2
4
6
8
t



$\theta(t)$
K
$\zeta = 0.1$
$\zeta = 0.7$
$\zeta = 0.1$
$\zeta = 0.7$
$\zeta = 0.1$
0
2
4
6
8
t

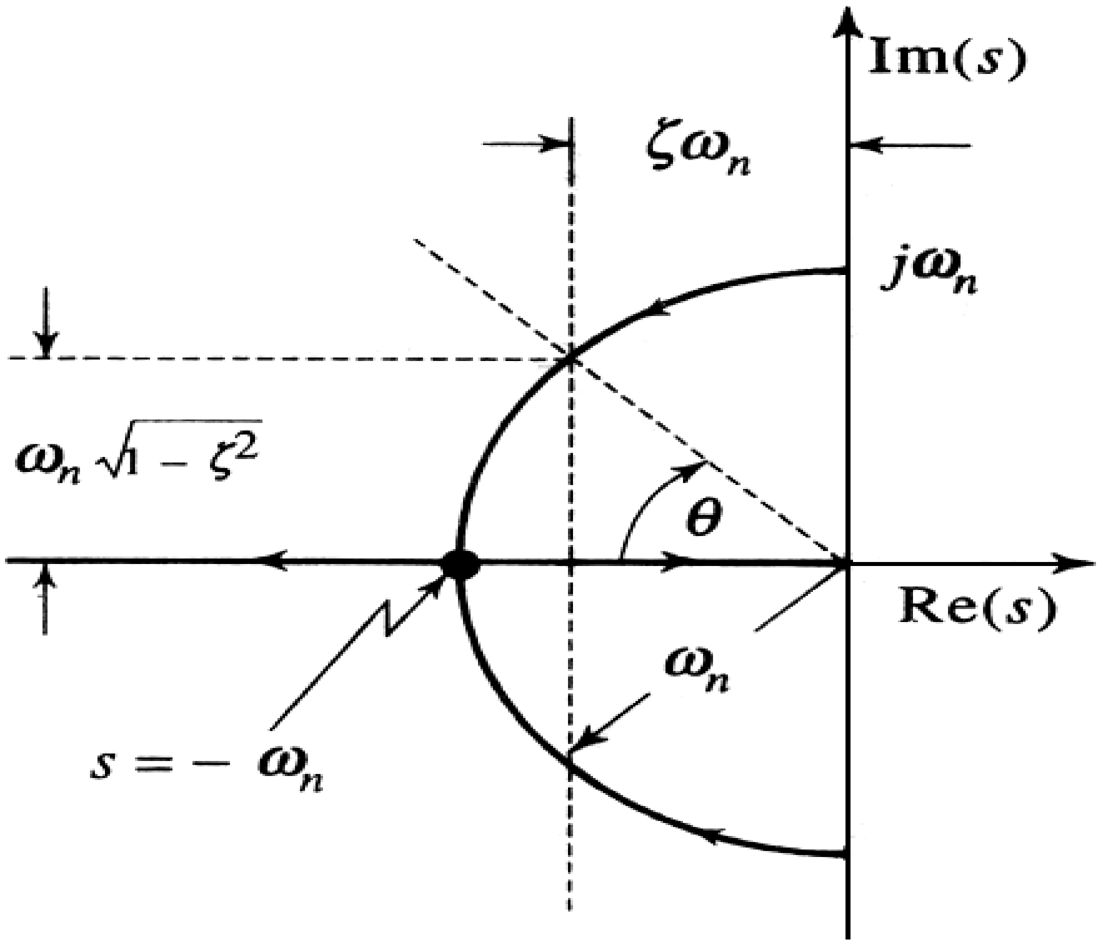


$\theta(t)$
K
$\zeta = 1$
0
2
4
6
8
t

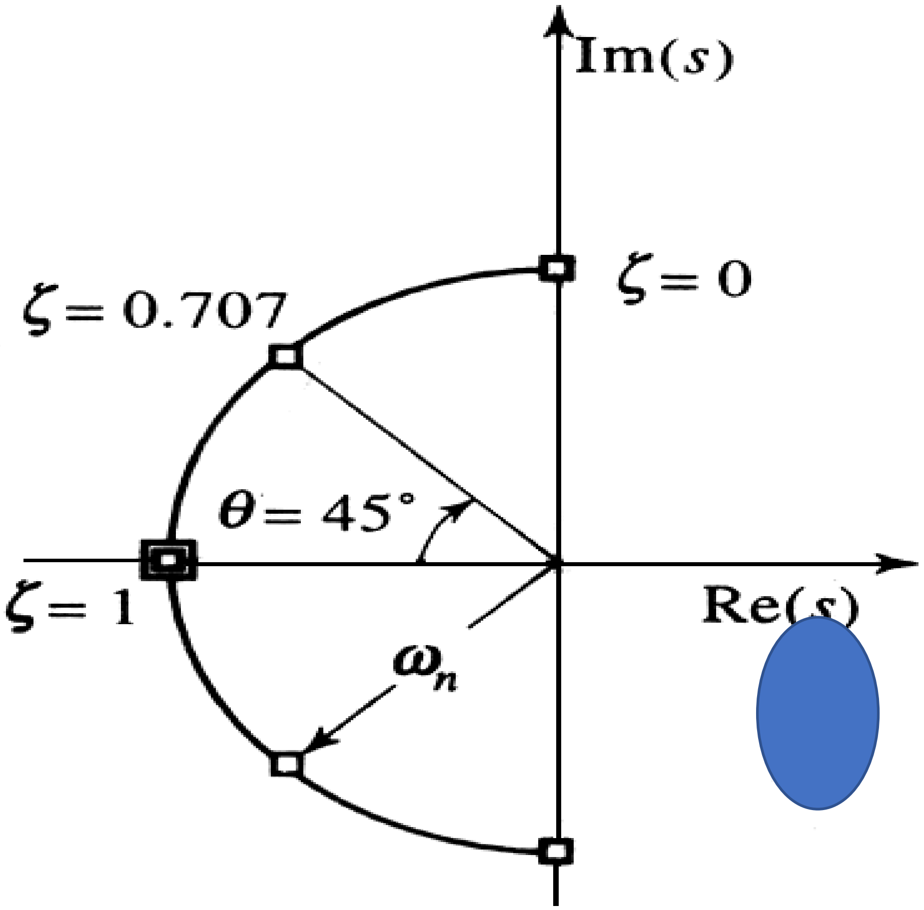


$\theta(t)$
K
$\zeta = 1.5$
0
2
4
6
8
t

$$s_{1,2} = -\zeta\,\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$



(a)



(b)

$$\frac{K\omega_n^2}{(s+a)(s+b)} = \frac{K\omega_n^2}{\left(s+\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}\right)\left(s+\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}\right)}$$

$$= \left[\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}\left(\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)}\left(\frac{1}{s+\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\sqrt{\zeta^2-1}\left(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)}\left(\frac{1}{s+\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1}}\right)\right]$$

$$= A\frac{1}{s+a} + B\frac{1}{s+b}$$