

2 Stress

2.1 Stress Vector and Stress Tensor

2.2 Plane Stress

2.2.1 Coordinate Transformation

2.2.2 Principal Stresses

2.2.3 Mohr's Circle

2.2.4 The Thin-Walled Pressure Vessel

2.3 Equilibrium Conditions

2.4 Supplementary Examples

2.5 Summary

2 الإجهاد

2.1 شعاع الإجهاد وموترة الإجهاد

2.2 الإجهاد المستوي

2.2.1 تحويل الإحداثيات

2.2.2 الإجهادات الرئيسية

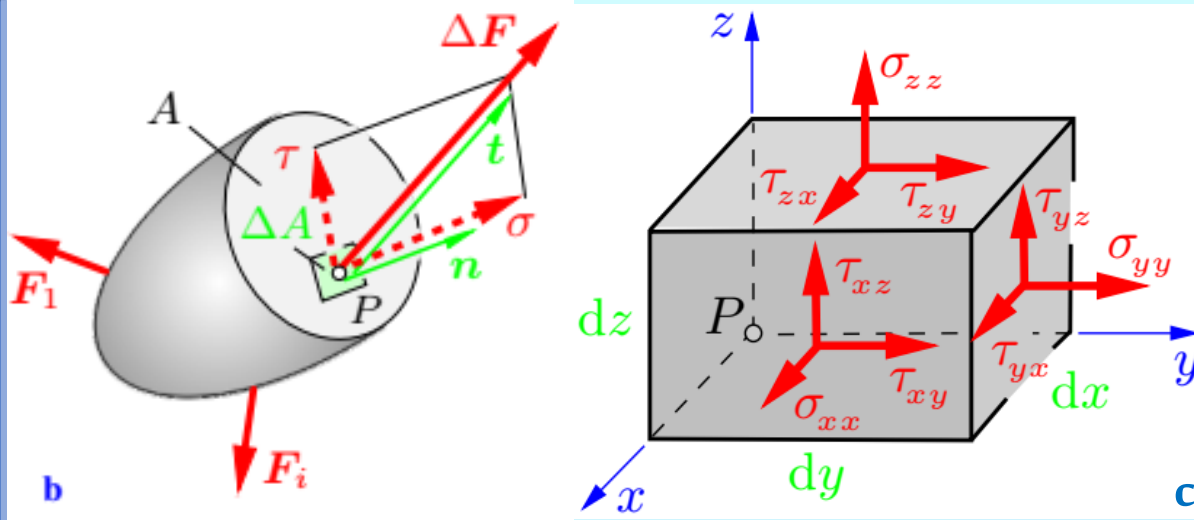
2.2.3 دائرة مور

2.2.4 أوعية الضغط رقيقة الجدران

2.3 شروط التوازن المحلية

2.4 أمثلة إضافية

2.5 ملخص البحث



$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

تحدد حالة الإجهاد في نقطة من جسم معرض لقوى خارجية، بمعرفة أشعة الإجهاد على ثلاثة مستويات (عادة موافقة لجملة الإحداثيات). لكل من هذه الأشعة ثلاث مركبات: واحدة ناظمية واثنان مماسيتان. وبالاعتماد على تناظر مركبات الإجهاد المماسية، يمكننا القول بأن حالة الإجهاد في هذه النقطة تحدد بمعرفة ست مركبات إجهاد (في الإحداثيات الديكارتية ثلاث مركبات إجهاد ناظمي: σ_x, σ_y & σ_z ، وثلاث مركبات إجهاد مماسي (قص): $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}$ & $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ المركبات الست في جملة الإحداثيات تعبر عن موتر الإجهاد وحالته المستقلة عن الإحداثيات الاختيارية.

أما تحديد حالة الإجهاد في الجسم لتقييم قدرته على تحمل القوى الخارجية بأمان، فيتطلب تعيين هذه المركبات الست في كافة نقاط الجسم: أي تحديد تغيراتها من نقطة إلى أخرى باعتبارها ستة توابع لثلاثة متحولات هي احداثيات نقطة من نقاط الجسم.

يسعى ميكانيك المواد لتبسيط هذه المسألة الرياضية. وقد رأينا في الحالة العامة للقضبان: مركبة إجهاد واحدة تابعة لمتحول وحيد. كما رأينا في حالة أوعية الضغط رقيقة الجدران مركبتي إجهاد ناظمي ثابتين. **والآن سوف ندرس حالة الإجهاد المستوية:** مركبتي إجهاد ناظمي ومركبة إجهاد مماسي، وهي متغيرة من نقطة إلى أخرى ومتغيرة مع اتجاه المقطع في النقطة الواحدة.

2.2 Plane Stress

2.2 الإجهاد المستوي

سنحصر اهتمامنا بحالة الإجهاد في العناصر الإنشائية المستوية المحملة في مستويها فقط. تمتاز هذه العناصر بشكلها المستوي فيحدها سطحان حران من الحمولات، متوازيان (أو متوازيان تقريباً) وشريط جانبي ضيق يعطيها سماكة ثابتة (أو متغيرة قليلاً) صغيرة جداً مقابل أبعاد السطحين الآخرين.

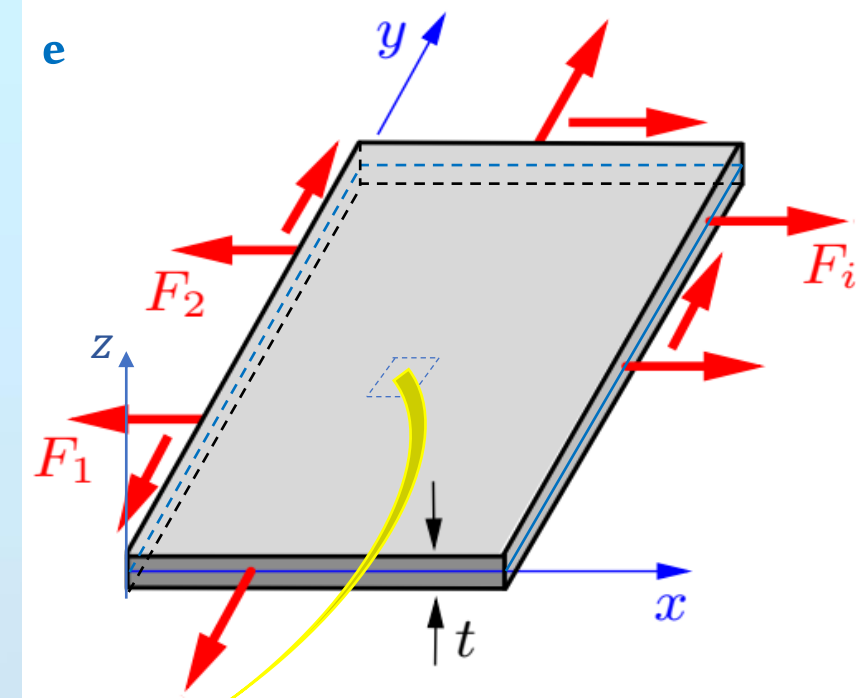
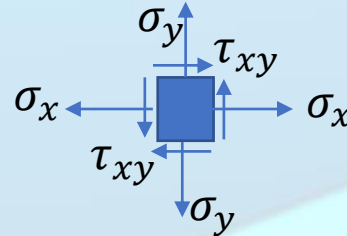
تُعرف هذه العناصر أحياناً بالألواح أو الشرائح أو الجدران الحاملة. تشكل دراستها حالة وسطية بين حالة الأجسام ثلاثية الأبعاد وبين حالة الإجهاد الناظمي في العناصر المحورية. وتمتلك دراستها معظم تفاصيل وجوانب الحالة ثلاثية الأبعاد وتبقى أبسط منها بكثير لذلك تفضل معظم المقررات التطرق إليها أولاً.

على الشكل e ، ننسب اللوح ذي السماكة t ، إلى جملة إحداثيات x, y و z ، يتوسط مستويها xy السماكات ويُسمى المستوي المتوسط. أما المحور z فيُدعى بالناظم لتعامده مع المستوي المتوسط. يُدعى المستويان $z = \pm \frac{t}{2}$ ، بالوجهين الموجب والسالب (وأحياناً العلوي والسفلي أو الأمامي والخلفي...). بما أن الوجهين الموجب والسالب غير محملين، سنفرض خلوها وكافة المستويات الموازية لهما من أي إجهاد أي أن:

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0.$$

ونظراً لصغر السماكة مقابل الأبعاد الأخرى، تبقى σ_x ، σ_y و $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ أي مركبات الإجهاد الثلاث الأخرى غير المعدومة، ثابتة على كافة نقاط أي من سماكاته. تُدعى هذه الحالة للإجهاد بالحالة المستوية وفي المصفوفة 3×3 التي تمثل الحالة العامة للإجهاد ينعدم السطر والعمود الأخيران، لتصبح مصفوفة حالة الإجهاد المستوية 2×2 ولتكتب بالشكل:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$



عموماً تتغير مركبات الإجهاد المستوية من نقطة إلى أخرى، فهي توابع للمتحولين x و y . وفي الحالة الخاصة التي تكون فيها ثابتة ندعو حالة الإجهاد بالمتجانسة (أوعية الضغط).

1.2.2. تحويل الإحداثيات

2.2.1 Coordinate Transformation

رأينا سابقاً كيف يمكن تحديد مركبات الإجهاد في أوعية الضغط وسنرى لاحقاً كيف يمكن تحديد مركبات الإجهاد المستوية كتوابع للمتحوّلين x & y .

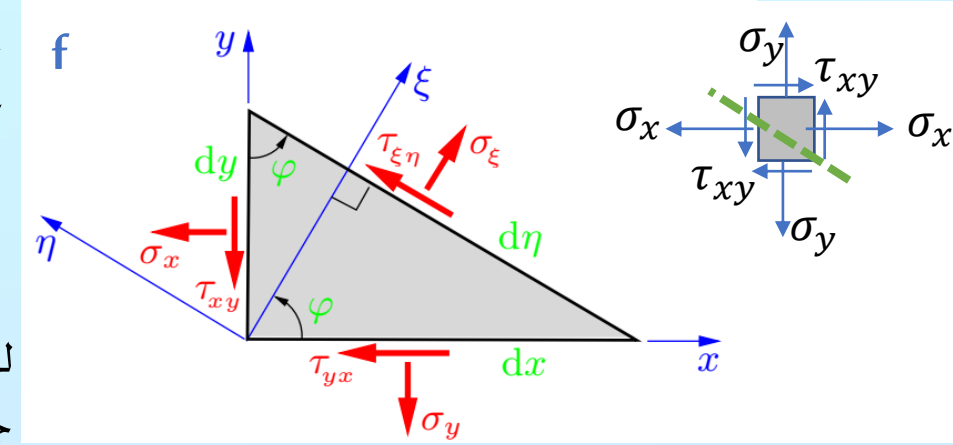
أما الآن فلنفرض معلوماً لدينا مركبات الإجهاد مؤثرة على مستويات الإحداثيات x & y ، في نقطة من اللوح، كما هو مبين على اليمين من الشكل f .

ولنتهم بالإجابة على السؤال الهام التالي: ما هي هذه المركبات في النقطة نفسها مؤثرة في مستويات مائلة على الإحداثيات المختارة؟

للإجابة عن هذا السؤال نأخذ مقطعاً في جوار النقطة المدروسة ويميل ناظمه عن المحور x ، بزاوية φ ، كما هو مبين بمقياس مكبر على يسار الشكل f .

يحدد هذا المقطع مع المقطعين x & y ، قطعة (عنصراً تفاضلياً) من اللوح على شكل مثلث قائم الزاوية تؤثر على كل من أضلاعه مركبة إجهاد ناظمي ومركبة إجهاد مماسي.

لنسمي المحور الناظم على المقطع الجديد ξ ، الذي يشكل مع المحور η الناتج عنه بدوران زاويته $\pi/2 +$ ، جملة إحداثيات جديدة $\xi\eta$ تدور بالزاوية φ (موجبة عكس عقارب الساعة) عن الإحداثيات القديمة xy .



على الشكل بينا مركبتي إجهاد موجبتين اصطلاحاً على الوجه ξ الموجب، المركبة الناظرية σ_{ξ} ، والمركبة المماسية $\tau_{\xi\eta}$. وعلى الوجه السالب x ، المركبتين الموجبتين اصطلاحاً σ_x & τ_{xy} ، وعلى الوجه السالب y ، المركبتين الموجبتين اصطلاحاً σ_y & τ_{yx} .

من الشكل نرى أنه إذا كانت مساحة المقطع المائل $dA = t d\eta$ ، فإن مساحة المقطع x السالب هي $dA \cos \varphi$ ، ومساحة المقطع y السالب هي $dA \sin \varphi$. الآن صار بإمكاننا كتابة معادلتى التوازن للعنصر المثلثي الموصوف أعلاه، باسقاط القوى المؤثرة فيه، على المحورين ξ & η ، كما يلي:

$$\nearrow: \sigma_{\xi} dA - (\sigma_x dA \cos \varphi) \cos \varphi - (\tau_{xy} dA \cos \varphi) \sin \varphi - (\sigma_y dA \sin \varphi) \sin \varphi - (\tau_{yx} dA \sin \varphi) \cos \varphi = 0$$

$$\searrow: \tau_{\xi\eta} dA + (\sigma_x dA \cos \varphi) \sin \varphi - (\tau_{xy} dA \cos \varphi) \cos \varphi - (\sigma_y dA \sin \varphi) \cos \varphi + (\tau_{yx} dA \sin \varphi) \sin \varphi = 0$$

للمتابعة ننقل هاتين المعادلتين مع الشكل f ، إلى الشريحة التالية.

2.2.1 Coordinate Transformation

1.2.2. تحويل الإحداثيات

$$\nearrow: \sigma_{\xi} dA - (\sigma_x dA \cos \varphi) \cos \varphi - (\tau_{xy} dA \cos \varphi) \sin \varphi - (\sigma_y dA \sin \varphi) \sin \varphi - (\tau_{yx} dA \sin \varphi) \cos \varphi = 0$$

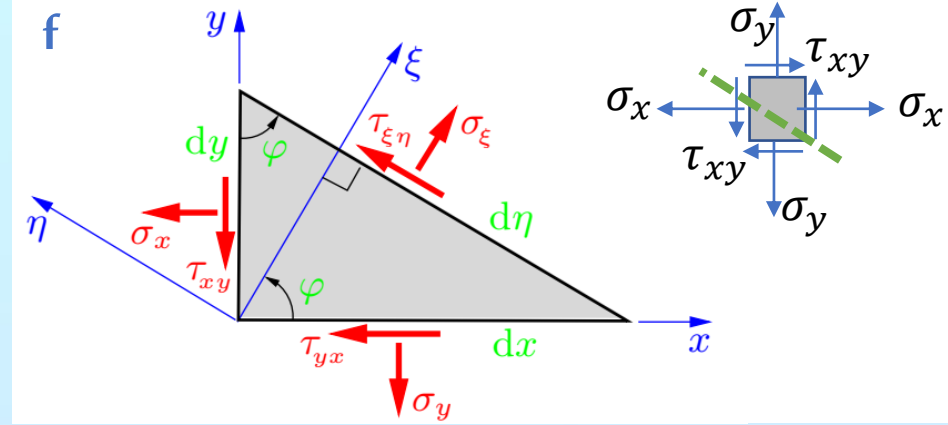
$$\nwarrow: \tau_{\xi\eta} dA + (\sigma_x dA \cos \varphi) \sin \varphi - (\tau_{xy} dA \cos \varphi) \cos \varphi - (\sigma_y dA \sin \varphi) \cos \varphi + (\tau_{yx} dA \sin \varphi) \sin \varphi = 0$$

وبما أن $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ وبالتقسيم على dA والتجميع نحصل على مركبتي الإجهاد على المقطع المائل

$$\sigma_{\xi} = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\tau_{\xi\eta} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$$

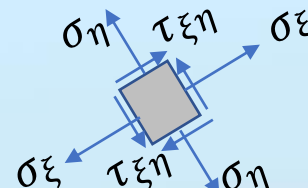
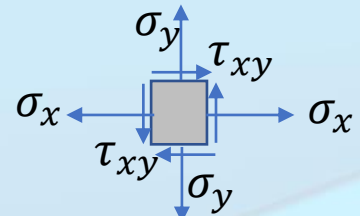
كي نتمم عملية تغيير مركبات الإجهاد مع تحويل الإحداثيات، علينا أن نحدد مركبة الإجهاد الناظمي σ_{η} المؤثرة على المقطع الموجب η . إن هذا المقطع يميل عن المحور، بزاوية قدرها $\varphi + \pi/2$.



ونحصل على المطلوب بتغيير الزاوية في علاقة σ_{ξ} ، من φ ، إلى $\varphi + \pi/2$. ومع تذكر أن: $\cos(\varphi + \pi/2) = -\sin \varphi$ ، وأن: $\sin(\varphi + \pi/2) = \cos \varphi$ ، نجد:

$$\sigma_{\eta} = \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi - 2\tau_{xy} \cos \varphi \sin \varphi$$

تُجيب هذه العلاقات الثلاث على السؤال الذي طرحناه بداية حول معرفة مركبات الإجهاد في مقاطع مائلة على جملة إحداثيات عُرفت فيها مركبات الإجهاد مسبقاً.

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{\xi} & \tau_{\xi\eta} \\ \tau_{\xi\eta} & \sigma_{\eta} \end{bmatrix}$$



$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

تحول هذه العلاقات مركبات الإجهاد من جملة الإحداثيات $x y$ إلى جملة الإحداثيات $\xi \eta$. وتكتب مصفوفياً بدلالة **مصفوفة التحويل ومنقولها** على النحو التالي:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\xi} & \tau_{\xi\eta} \\ \tau_{\xi\eta} & \sigma_{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

تُشكل أية أربع مركبات في الفضاء ثنائي البعد (تسع مركبات في الفضاء ثلاثي البعد) وتتحول من جملة إحداثيات إلى أخرى وفق العلاقات السابقة كائناً رياضياً يُعرف **بالموترة من المرتبة الثانية**. وكما هو الحال في مركبات شعاع ما فإنها رغم تحولها من جملة إحداثيات إلى أخرى، تحافظ على خصائص الشعاع المستقلة عن الإحداثيات، ويعد طول الشعاع أهم هذه الخصائص وهو بلا شك مستقل عن جملة الإحداثيات.

$$\sigma_{\xi} = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\sigma_{\eta} = \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi - 2\tau_{xy} \cos \varphi \sin \varphi$$

$$\tau_{\xi\eta} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)$$

فإذا عدنا إلى العلاقات الثلاث السابقة وكتبناها كما يلي:

نجد بسهولة أن جمع العلاقتين الأولى والثانية يعطينا: $\sigma_{\xi} + \sigma_{\eta} = \sigma_x + \sigma_y$
أي أن مجموع مركبتي الإجهاد الناظميتين صامد لا يتغير مع تحويل الإحداثيات.

وبسهولة أقل، إن لم يكن ببعض الصعوبة، نجد أن محدد مصفوفتي الإجهاد في جملتي الإحداثيات ثابت لا يتغير، أي أن:

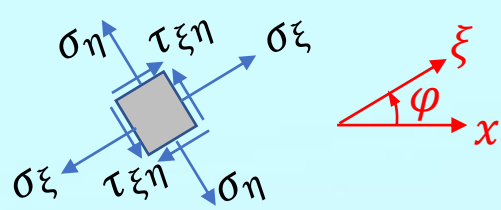
$$\sigma_{\xi} \sigma_{\eta} - \tau_{\xi\eta}^2 = \sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\xi} & \tau_{\xi\eta} \\ \tau_{\xi\eta} & \sigma_{\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

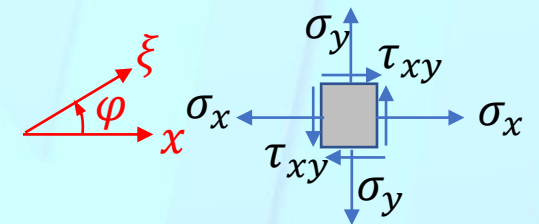
للاستفادة من علاقات تحويل مركبات الإجهاد الثلاث السابقة، دون استخدام خصائص الموترات أو المصفوفات، جرت العادة على كتابتها بدلالة ضعف الزاوية φ ، مستفيدين من العلاقات المثلثية التالية:

$$\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \cos 2\varphi, \quad \cos^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi), \quad \sin^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi), \quad 2\sin \varphi \cos \varphi = \sin 2\varphi$$

وعدئذٍ تأخذ علاقات تحويل مركبات الإجهاد من جملة إحداثيات إلى أخرى الشكل التالي:



$$\begin{aligned}\sigma_{\xi} &= \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi, \\ \sigma_{\eta} &= \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi - 2\tau_{xy} \cos \varphi \sin \varphi, \\ \tau_{\xi\eta} &= -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)\end{aligned}$$



$$\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \cos 2\varphi, \quad \cos^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi), \quad \sin^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi), \quad 2\sin \varphi \cos \varphi = \sin 2\varphi$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi} &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi, \\ \sigma_{\eta} &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi, \\ \tau_{\xi\eta} &= -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi.\end{aligned}$$

ونؤكد أخيراً على أن علاقات تحويل مركبات الإجهاد تبين أن أياً من مجموعات المركبات في الإحداثيات x, y أو في الإحداثيات ξ, η ، أو في غيرها من الإحداثيات تعبر عن حالة الإجهاد الفيزيائية ذاتها في النقطة المعنية من الجسم المدروس. بعبارة أخرى معرفة مركبات الإجهاد على مقطعين اثنين متعامدين تكفي لمعرفة حالة الإجهاد في النقطة أي معرفة مركبات الإجهاد على أي مقطع يمر بهذه النقطة.

قبل إنهاء هذه الفقرة لنرى تطبيق هذه العلاقات على حالتين خاصتين مرتا معكم الأولى في العناصر المحورية والثانية في الهيدروليك.

أولاً. في العنصر المحوري المحمل محورياً ووفق جملة الإحداثيات x, y ، وجدنا أن: $\sigma_x \neq 0, \sigma_y = 0 \& \tau_{xy} = 0$. وبالتعويض في علاقات التحويل نجد أن: $\sigma_{\xi} = \frac{1}{2}\sigma_x(1 + \cos 2\varphi), \sigma_{\eta} = \frac{1}{2}\sigma_x(1 - \cos 2\varphi), \tau_{\xi\eta} = -\frac{1}{2}\sigma_x \sin 2\varphi$. وهذا يوافق ما وجدناه سابقاً.

ثانياً. لنأخذ في جملة الإحداثيات x, y ، حالة مركبتين ناظمتين متساويتين ($\sigma_x = \sigma_y$) مع مركبة مماسية معدومة ($\tau_{xy} = 0$). ولنعوض

$$\sigma_{\xi} = \sigma_{\eta} = \sigma_x = \sigma_y, \& \tau_{\xi\eta} = 0$$

ذلك في علاقات التحويل السابقة لنجد:

ومن ذلك نستنتج أن المركبة الناظمية واحدة في جميع الاتجاهات والمركبة المماسية معدومة في جميع الاتجاهات. وهذه الحالة تعرف بحالة الإجهاد الهيدروستاتيكي وتتوافق مع مفهوم الضغط المتساوي في كافة الاتجاهات من السوائل الساكنة.

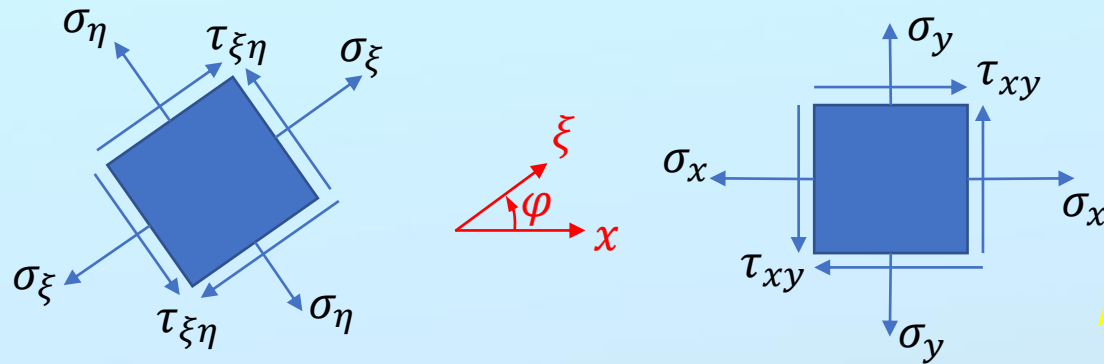
2.2.1 Coordinate Transformation (Summary & Caution)

تعرض نقاط اللوح للإجهاد نتيجة الحمولات الخارجية وتتغير مركبات الإجهاد من مقطع إلى آخر وترتبط ببعضها وفق علاقات التحويل التالية:

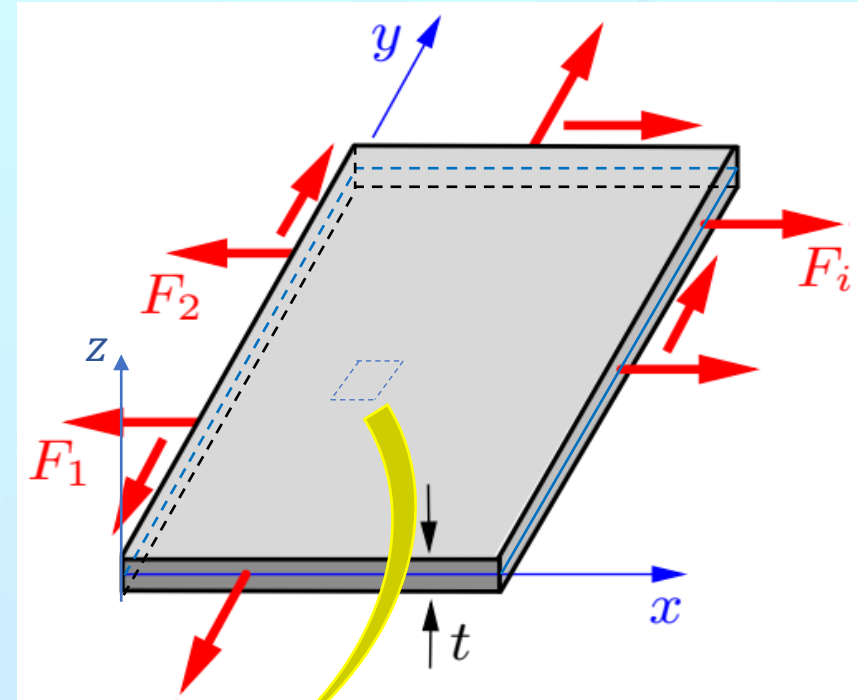
$$\sigma_{\xi} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi,$$

$$\sigma_{\eta} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi,$$

$$\tau_{\xi\eta} = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi.$$



1.2.2. تحويل الإحداثيات (ملخص وتنبيه)



Take $\varphi = 0$: $\sigma_{\xi} = \sigma_x$, $\sigma_{\eta} = \sigma_y$, $\tau_{\xi\eta} = \tau_{xy}$, but take $\varphi = \pi/2$: $\sigma_{\xi} = \sigma_y$, $\sigma_{\eta} = \sigma_x$, $\tau_{\xi\eta} = -\tau_{xy}$.

Take $\varphi = \pi$: $\sigma_{\xi} = \sigma_x$, $\sigma_{\eta} = \sigma_y$, $\tau_{\xi\eta} = \tau_{xy}$, but take $\varphi = 3\pi/2$: $\sigma_{\xi} = \sigma_y$, $\sigma_{\eta} = \sigma_x$, $\tau_{\xi\eta} = -\tau_{xy}$.

Take $\varphi = \pm \pi/4$: $\sigma_{\xi} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \tau_{xy}$, $\sigma_{\eta} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \mp \tau_{xy}$, $\tau_{\xi\eta} = \mp \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)$.

Take $\varphi = \pm 3\pi/4$: $\sigma_{\xi} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \mp \tau_{xy}$, $\sigma_{\eta} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \tau_{xy}$, $\tau_{\xi\eta} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)$.

والسؤال الهام الآن: هل توجد مقاطع تحددها الزاوية φ ، تبلغ فيها مركبات الإجهاد نهاية حدية (عظمى أو صغرى) تشكل بؤرة الخطر على اللوح؟

Example 2.1

The state of plane stress in a metal sheet is given by: $\sigma_x = -64$ MPa, $\sigma_y = 32$ MPa and $\tau_{xy} = -20$ MPa.

- Display these stresses acting on an $x - y$ system element. Then determine
- The stresses in a section which is defined by $\varphi = -30^\circ$,
- Display these stresses acting on the two directions defined by $\varphi = -30^\circ$.

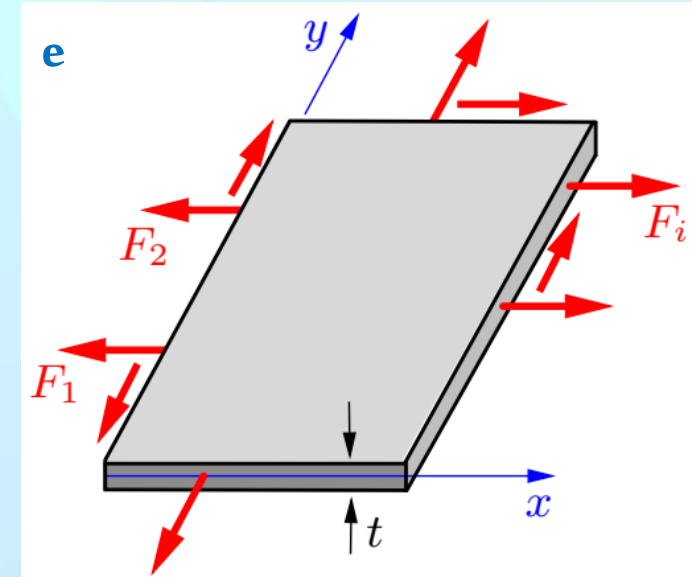
$$\begin{aligned}\sigma_\xi &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi, \\ \sigma_\eta &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi, \\ \tau_{\xi\eta} &= -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi.\end{aligned}$$

2.2 Plane Stress

We will now examine the state of stress in a *disk*. This plane structural element has a thickness t much smaller than its inplane dimensions and it is loaded solely *in* its plane by in-plane forces (Fig.e).

The upper and the lower face of the disk are load-free. Since no external forces in the z -direction exist, we can assume with sufficient accuracy that also no stresses will appear in this direction: $\tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0$.

Because of the small thickness we furthermore can assume that the stresses σ_x , σ_y and $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ are constant across the thickness of the disk. Such a stress distribution is called a *state of plane stress*.



In this case, the third row and the third column of the stress matrix vanish and we get

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

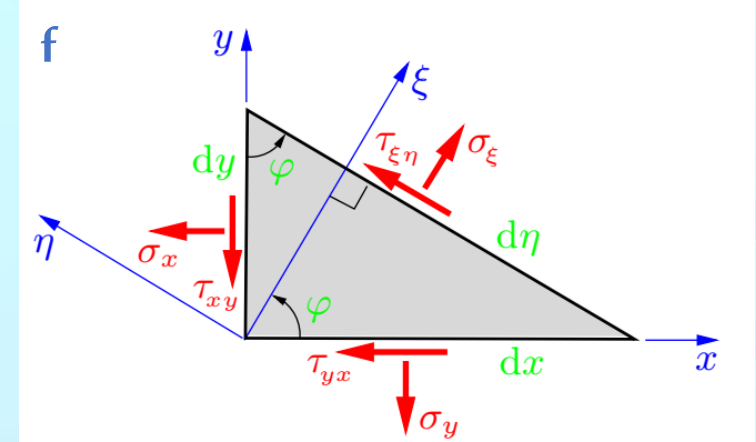
In general, the stresses depend on the location, i.e. on the coordinates x and y .

In the special case when the stresses are independent of the location, the stress state is called *homogeneous*.

2.2.1 Coordinate Transformation

Up to now only stresses in sections parallel to the coordinate axes have been considered. Now we will show how from these stresses, the stresses in an arbitrary section perpendicular to the disk can be determined.

For this purpose we consider an infinitesimal wedge-shaped element of thickness t cut out from the disk (Fig. f).



The directions of the sections are characterized by the x , y - coordinate system and the angle φ .

We introduce a ξ , η -system which is rotated with respect to the x, y -system by the angle φ and whose ξ - axis is normal to the inclined section. Here φ is counted positive *counterclockwise*.

According to the coordinate directions, the stresses in the inclined section are denoted as σ_{ξ} and $\tau_{\xi\eta}$. The corresponding cross section is given by $dA = d\eta t$. The other two cross sections perpendicular to the y - and x - axis, respectively, are $dA \sin \varphi$ and $dA \cos \varphi$. The equilibrium conditions for the forces in ξ - and in η -direction are

$$\nearrow: \sigma_{\xi} dA - (\sigma_x dA \cos \varphi) \cos \varphi - (\tau_{xy} dA \cos \varphi) \sin \varphi - (\sigma_y dA \sin \varphi) \sin \varphi - (\tau_{yx} dA \sin \varphi) \cos \varphi = 0$$

$$\searrow: \tau_{\xi\eta} dA + (\sigma_x dA \cos \varphi) \sin \varphi - (\tau_{xy} dA \cos \varphi) \cos \varphi - (\sigma_y dA \sin \varphi) \cos \varphi + (\tau_{yx} dA \sin \varphi) \sin \varphi = 0$$

Taking into account $\tau_{yx} = \tau_{xy}$, we get

$$\begin{cases} \sigma_{\xi} = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi + 2\tau_{xy} \sin \varphi \cos \varphi \\ \tau_{\xi\eta} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \varphi \cos \varphi + \tau_{xy} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \end{cases}$$

Additionally, we will now determine the normal stress σ_η which acts in a section with normal pointing in η -direction.

The cutting angle of this section is given by $\varphi + \pi/2$. Therefore, σ_η is obtained by replacing in the equation of σ_η , the angle φ by $\varphi + \pi/2$. Recalling that $\cos(\varphi + \pi/2) = -\sin \varphi$ and $\sin(\varphi + \pi/2) = \cos \varphi$,

We obtain:
$$\sigma_\eta = \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi - 2\tau_{xy} \cos \varphi \sin \varphi$$

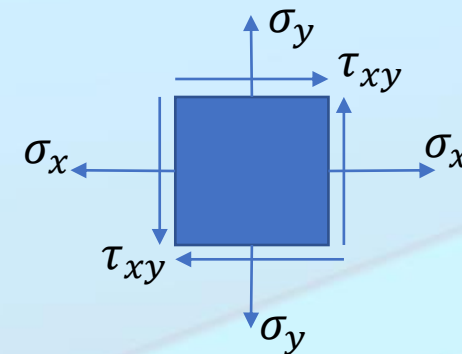
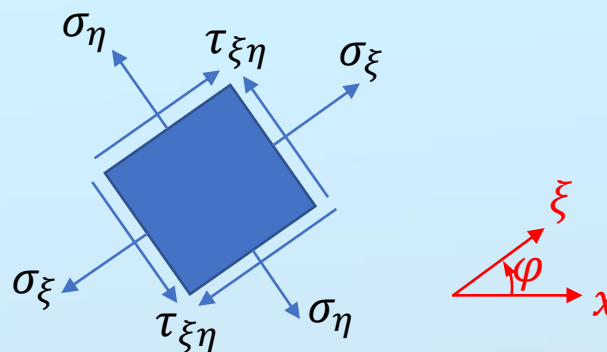
Usually the last three equations are written in a different form. Using the standard trigonometric relations:

$\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \cos 2\varphi$, $\cos^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)$, $\sin^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi)$, $2\sin \varphi \cos \varphi = \sin 2\varphi$ We get:

$$\sigma_\xi = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi,$$

$$\sigma_\eta = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi,$$

$$\tau_{\xi\eta} = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi.$$



Take $\varphi = 0$: $\sigma_\xi = \sigma_x, \sigma_\eta = \sigma_y, \tau_{\xi\eta} = \tau_{xy}$, **but take $\varphi = \pi/2$: $\sigma_\xi = \sigma_y, \sigma_\eta = \sigma_x, \tau_{\xi\eta} = -\tau_{xy}$.**

Take $\varphi = \pi$: $\sigma_\xi = \sigma_x, \sigma_\eta = \sigma_y, \tau_{\xi\eta} = \tau_{xy}$, **but take $\varphi = 3\pi/2$: $\sigma_\xi = \sigma_y, \sigma_\eta = \sigma_x, \tau_{\xi\eta} = -\tau_{xy}$.**

These are called transformation relations for components of stress from the system x, y to the system ξ, η .

It is important to emphasize that either groups of the stress components represent the same state of stress at the studied point.

Additionally, we will now determine the normal stress σ_η which acts in a section with normal pointing in η -direction.

The cutting angle of this section is given by $\varphi + \pi/2$. Therefore, σ_η is obtained by replacing in the equation of σ_η , the angle φ by $\varphi + \pi/2$. Recalling that $\cos(\varphi + \pi/2) = -\sin \varphi$ and $\sin(\varphi + \pi/2) = \cos \varphi$,

We obtain:
$$\sigma_\eta = \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi - 2\tau_{xy} \cos \varphi \sin \varphi$$

Usually the last three equations are written in a different form. Using the standard trigonometric relations:

$$\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = \cos 2\varphi, \quad \cos^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi), \quad \sin^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi), \quad 2\sin \varphi \cos \varphi = \sin 2\varphi \quad \text{We get:}$$

$$\sigma_\xi = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi,$$

$$\sigma_\eta = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi,$$

$$\tau_{\xi\eta} = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi.$$

These are called transformation relations for components of stress from the system x, y to the system ξ, η .

It is important to emphasize that either groups of the stress components represent the same state of stress at the studied point of the disk.

A quantity whose components have two subscripts and which are transformed from one coordinate system to a rotated coordinate system, by similar rules to the here seen, is called a second rank tensor.

Adding the first two equations of these equations, we obtain

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = \sigma_x + \sigma_y$$

Thus the sum of the normal stresses has the same value in each coordinate system. For this reason this sum is called an invariant of the stress tensor.

It can also be verified that the determinant $\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2$ of the matrix of the stress tensor is further invariant, that is

$$\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 = \sigma_\xi \sigma_\eta - \tau_{\xi\eta}^2$$

We finally consider the special case of equal normal stresses ($\sigma_x = \sigma_y$) and vanishing shear stress ($\tau_{xy} = 0$) in the x, y system. The equations

$$\begin{aligned}\sigma_\xi &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi, \\ \sigma_\eta &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi, \\ \tau_{\xi\eta} &= -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi.\end{aligned}$$

Show that:

$$\sigma_\xi = \sigma_\eta = \sigma_x = \sigma_y, \text{ and } \tau_{\xi\eta} = 0$$

Accordingly, the normal stress for all directions of the sections are the same (independent of φ) whereas the shear stresses always vanish. Such a state is called Hydrostatic because it corresponds to the pressure in a fluid at rest where the normal stress is the same in all directions.

We finally consider the special case of equal normal stresses ($\sigma_x = \sigma_y$) and vanishing shear stress ($\tau_{xy} = 0$) in the x, y system. The equations

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\xi &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi, \\ \sigma_\eta &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi, \\ \tau_{\xi\eta} &= -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi. \end{aligned} \right\}$$

Show that: $\sigma_\xi = \sigma_\eta = \sigma_x = \sigma_y$, and $\tau_{\xi\eta} = 0$

Accordingly, the normal stress for all directions of the sections are the same (independent of φ) whereas the shear stresses always vanish. Such a state is called Hydrostatic because it corresponds to the pressure in a fluid at rest.

A quantity whose components have two subscripts and which are transformed from one coordinate system to a rotated coordinate system, by similar rules to the here seen, is called a second rank tensor.

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

Adding the first two equations of these equations, we obtain

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = \sigma_x + \sigma_y$$

Thus the sum of the normal stresses has the same value in each coordinate system. For this reason this sum is called an invariant of the stress tensor.

It can also be verified that the determinant $\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2$ of the stress tensor is further invariant, that is

$$\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2 = \sigma_\xi \sigma_\eta - \tau_{\xi\eta}^2$$

2.2.2 Principal Directions and Principal Stresses

2.2.2. الاتجاهات والإجهادات الرئيسية

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\xi} &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi, \\ \sigma_{\eta} &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi, \\ \tau_{\xi\eta} &= -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi. \end{aligned} \right\}$$

تبين علاقات التحويل هذه أن مركبات الإجهاد σ_{ξ} , σ_{η} & $\tau_{\xi\eta}$ هي توابع للزاوية φ التي تحدد اتجاه القطع في النقطة المدروسة.

لنبحث الآن عن قيم هذه الزاوية التي تجعل مركبات الإجهاد هذه، في نهايات حدية كبرى أو صغرى ولنسعى لحساب هذه النهايات.

1. تبلغ مركبتا الإجهاد الناظمي σ_{ξ} & σ_{η} نهاية حدية عندما يتحقق على الترتيب: $\frac{d\sigma_{\xi}}{d\varphi} = 0$ & $\frac{d\sigma_{\eta}}{d\varphi} = 0$. باشتقاق العلاقتين الأولى والثانية نجد أن

الشرطين السابقين يفضيان إلى العبارة ذاتها: $-(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi + 2\tau_{xy} \cos 2\varphi = 0$. وبمقارنتها مع العلاقة الثالثة نجد أنها تكافئ: $\tau_{\xi\eta} = 0$. مما سبق نستنتج أن الزاوية $\varphi = \varphi^*$ التي تحدد القيمة الحدية الكبرى أو الصغرى للمركبتين الناظمتين تُحسب من: $\tan 2\varphi^* = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$

ولما كان π هو دور التابع "tan" فإن: $\tan 2\varphi^* = \tan(2\varphi^* + \pi)$ ، لذلك توجد قيمتان φ^* & $\varphi^* + \pi/2$ ، توافقان اتجاهين متعامدين تبلغ عليهما مركبتا الإجهاد الناظمي نهاية كبرى أو صغرى وتنعدم عندهما مركبة الإجهاد المماسي. وبما أننا وجدنا أن المجموع $\sigma_{\xi} + \sigma_{\eta}$ ثابت، نستطيع القول بأنه عندما تبلغ إحدى المركبتين الناظمتين نهاية كبرى تكون الأخرى في نهاية صغرى.

2. تبلغ مركبة الإجهاد المماسي $\tau_{\xi\eta}$ نهاية حدية عندما يتحقق: $\frac{d\tau_{\xi\eta}}{d\varphi} = 0$. باشتقاق العلاقة الأخيرة نجد أن: $-(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi - 2\tau_{xy} \sin 2\varphi = 0$ ومنها نستنتج أن الزاوية $\varphi = \varphi^{**}$ التي تحدد القيمة الحدية الكبرى أو الصغرى للمركبة المماسية، تُحسب من: $\tan 2\varphi^{**} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$

بمقارنة $\tan 2\varphi^*$ مع $\tan 2\varphi^{**}$ ، نجد أن: $\tan 2\varphi^{**} = -1/\tan 2\varphi^*$. ومنه نستنتج أن $2\varphi^{**} = 2\varphi^* \pm \pi/2$ أي: $\varphi^{**} = \varphi^* \pm \pi/4$. يثير هذا الأسلوب الشائع لتحديد الاتجاهات ومن ثم الإجهادات الرئيسية اشكالية تتعلق بالتحديد الأحادي للزاويتين بالاعتماد على نسبة مثلثية واحدة، بينما يحتاج التحديد التام لأي اتجاه إلى نسبتين مثلثيتين. لذلك نعيد الصياغة الجبرية للعلاقات السابقة لتصبح أكثر دقة.

$$f_1(\alpha) = a \cos \alpha \mp b \sin \alpha = c \cos(\alpha \pm \beta)$$

Where: $\cos \beta = \frac{a}{c}, \sin \beta = \frac{b}{c}, c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$f_2(\alpha) = a \sin \alpha \pm b \cos \alpha = c \sin(\alpha \pm \beta)$$

Where: $\cos \beta = \frac{a}{c}, \sin \beta = \frac{b}{c}, c = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{\xi} - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \left(\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \right), \\ \sigma_{\eta} - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = -\left(\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi \right), \\ -\tau_{\xi\eta} = \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi - \tau_{xy} \cos 2\varphi. \end{array} \right.$$

$$\sigma_{\xi} - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \left(\frac{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \right) = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \cos(2\varphi - 2\varphi^*)$$

$$\tau_{\xi\eta} = -\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi - \tau_{xy} \cos 2\varphi\right) = -\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \left(\frac{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi - \tau_{xy} \cos 2\varphi}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \right) = -\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \sin(2\varphi - 2\varphi^*)$$

$$\cos 2\varphi^* = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)/2}{\tau_{max}} \quad \& \quad \sin 2\varphi^* = \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} = \frac{\tau_{xy}}{\tau_{max}} \quad \text{Where: } \tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{\xi} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \tau_{max} \cos(2\varphi - 2\varphi^*),$$

$$\sigma_{\eta} - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = -\tau_{max} \cos(2\varphi - 2\varphi^*),$$

$$-\tau_{\xi\eta} = \tau_{max} \sin(2\varphi - 2\varphi^*)$$

2.2.2 Principal Directions and Principal Stresses

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\xi} &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi, \\ \sigma_{\eta} &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi, \\ \tau_{\xi\eta} &= -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi. \end{aligned} \right\}$$

Then the stresses σ_{ξ} , σ_{η} & $\tau_{\xi\eta}$ depend on φ (direction of the section).

We now determine the angle for which these stresses have maximum and minimum values and we calculate these extreme values.

1. Normal stresses reach extreme values when $d\sigma_{\xi}/d\varphi = 0$ or $d\sigma_{\eta}/d\varphi = 0$, respectively. Both conditions lead to:
 $-(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi + 2\tau_{xy} \cos 2\varphi = 0$. Hence, the angle $\varphi = \varphi^*$ that leads to a maximum or a minimum is given by

$$\tan 2\varphi^* = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

The tangent function is π -periodic: $\tan 2\varphi^* = \tan(2\varphi^* + \pi)$. Therefore, there exist two directions of the sections, φ^* & $\varphi^* + \pi/2$, perpendicular to each other, for which the normal stresses are maximum or minimum.

These directions of the sections are called **principal directions**. and the two normal stresses corresponding to these directions acting on these sections are called **principal stresses**.

To distinguish normal principal stresses corresponding to principal directions φ^* & $\varphi^* + \pi/2$, they are labeled: σ_1 & σ_2 . Using this notation and the above equations they can be determined as follows:

2.2.2 Principal Directions and Principal Stresses (Cont.)

$$\tan 2\varphi^* = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\xi &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi, \\ \sigma_\eta &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi, \\ \tau_{\xi\eta} &= -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi. \end{aligned}$$

Using the following trigonometric relations

$$\begin{aligned} \cos 2\varphi^* &= \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 2\varphi^*}} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}, \\ \sin 2\varphi^* &= \frac{2 \tan 2\varphi^*}{\sqrt{1+\tan^2 2\varphi^*}} = \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}, \end{aligned}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)^2}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \pm \frac{2\tau_{xy}^2}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

Simplifying the two fractions to get:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \sigma_1 > \sigma_2$$

If the angles φ^* & $\varphi^* + \pi/2$, respectively, are introduced into the third equation of $\tau_{\xi\eta}$ we find $\tau_{\xi\eta} = 0$.

Thus, the shear stresses vanish in sections where the normal stresses take on their extreme (principal) values.

Inversely, when the shear stress in a section is zero, the normal stress in this section is a principal stress.

A coordinate system with its axes pointing in the principal directions is called *principal coordinate system*.

Its two axes are denoted by 1^* & 2^* , they are corresponding respectively to σ_1 & σ_2 (first & second principal stress: $\sigma_1 > \sigma_2$).

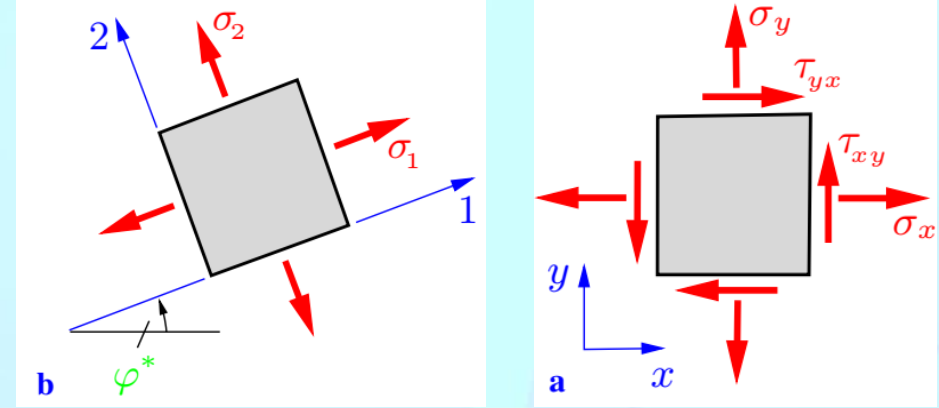
In next figures the stresses at an element in the x, y - system

and in the principal coordinate system 1 & 2 are displayed.

After determining the extreme values of the normal stresses & the

associated directions, the extreme values of the shear stresses:

$\tau_{\xi\eta} = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi$, will be investigated



2. Shear stresses reach extreme values when $d\tau_{\xi\eta}/d\varphi = 0 \Rightarrow -(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi - 2\tau_{xy} \sin 2\varphi = 0$

Hence the angle $\varphi = \varphi^{**}$ for an extreme value of the shear stresses, is obtained: $\tan 2\varphi^{**} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$

Again this defines two perpendicular angles φ^{**} & $\varphi^{**} + \pi/2$ where the shear stress reaches maximum or minimum.

By comparing: $\tan 2\varphi^*$ with $\tan 2\varphi^{**}$, we find that: $\tan 2\varphi^{**} = -1/\tan 2\varphi^* \Rightarrow 2\varphi^{**} = 2\varphi^* + \pi/2 \Rightarrow \varphi^{**} = \varphi^* + \pi/4$

SO, the direction of the extreme shear stress is rotated by 45° with respect to the direction of the extreme normal stress.

The extreme shear stresses are obtained by introducing $\tan 2\varphi^{**}$, into $\tau_{\xi\eta}$ and using the same trigonometric relations:

$$\tau_{max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Since they differ only in the sign (i.e. in the sense of direction) both stresses are commonly called *maximum shear stresses*.

Summarizing the results giving the principal directions and principal values and of

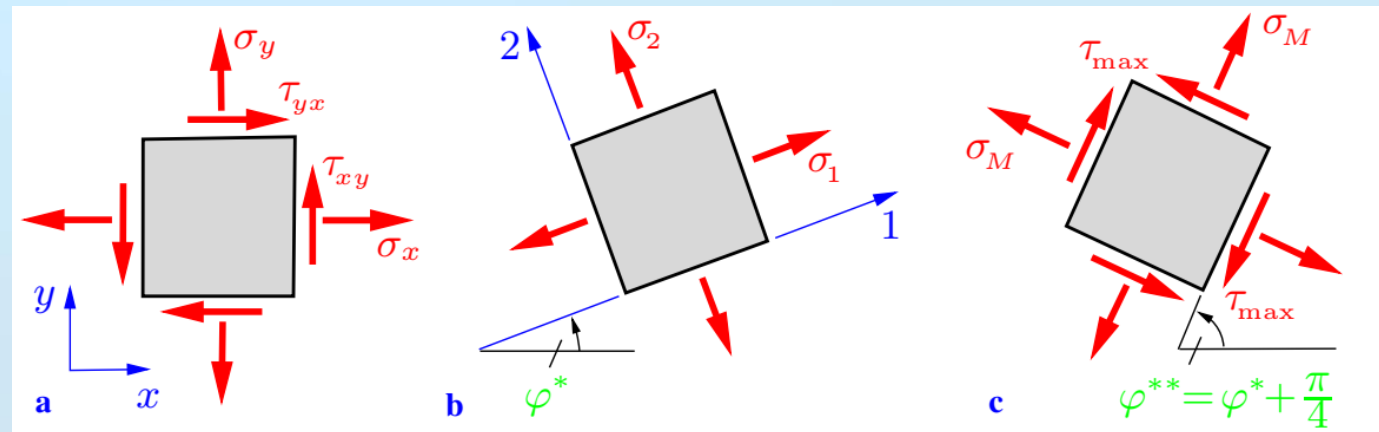
normal stresses: $\tan 2\varphi^* = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$ $\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

Shear stresses: $\tan 2\varphi^{**} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$ $\tau_{max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$

Introducing φ^{**} into the equations giving σ_ξ & σ_η , leads to a normal stress in the sections where the shear stress is maximum. We denote this stress as σ_M ; it is given by

$$\sigma_M = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$$

Therefore, the normal stresses generally do not vanish in the sections with extreme shear stresses. Next figure shows stresses in the x, y - system, 1,2 system and principal shear directions.



Example 2.1

The state of plane stress in a metal sheet is given by: $\sigma_x = -64$ MPa, $\sigma_y = 32$ MPa and $\tau_{xy} = -20$ MPa.

- Display these stresses acting on an x - y system element. Then determine
- The stresses in a section which is defined by $\varphi = -30^\circ$,
- The principal stresses and principal directions,
- The maximum shear stress and the associated directions.

Display the stresses at an element for each case.

$$\begin{aligned}\sigma_\xi &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi, \\ \sigma_\eta &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi, \\ \tau_{\xi\eta} &= -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi.\end{aligned}$$

Example 2.1

The state of plane stress in a metal sheet is given by: $\sigma_x = -64$ MPa, $\sigma_y = 32$ MPa and $\tau_{xy} = -20$ MPa.

a) Display these stresses acting on an x - y system element. Then determine

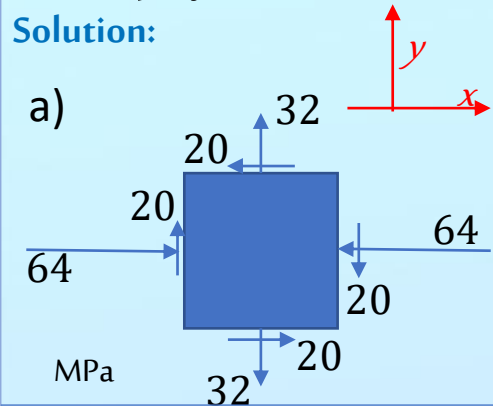
b) The stresses in a section which is defined by $\varphi = -30^\circ$,

c) The principal stresses and principal directions,

d) The maximum shear stress and the associated directions.

Display the stresses at an element for each case.

Solution:



b)

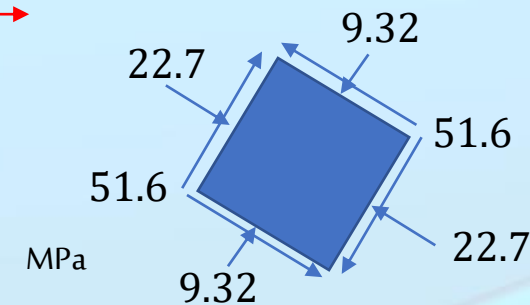
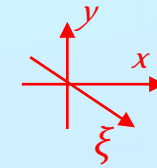
$$\sigma_\xi = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos(2\varphi) + \tau_{xy}\sin(2\varphi)$$

$$= \frac{1}{2}(-64 + 32) + \frac{1}{2}(-64 - 32)\cos(-60^\circ) + (-20)\sin(-60^\circ)$$

$$= -22.7 \text{ MPa}$$

$$\sigma_\eta = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos(2\varphi) - \tau_{xy}\sin(2\varphi) = -9.32 \text{ MPa}$$

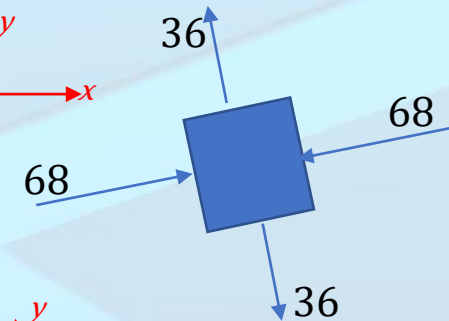
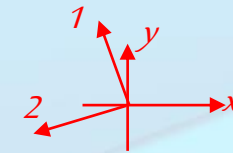
$$\tau_{\xi\eta} = -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin(2\varphi) + \tau_{xy}\cos(2\varphi) = -51.6 \text{ MPa}$$



c)

$$\tan 2\varphi^* = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \Rightarrow \text{Principal directions at } \varphi^* = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2(-20)}{-64 - 32}\right) = 11.3^\circ \text{ \& } 101.3^\circ$$

$$\text{with } \sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = -16 \pm 52 \Rightarrow \sigma_1 = 36 \text{ MPa} \text{ \& } \sigma_2 = -68 \text{ MPa}$$



d) maximum shear at $\varphi^{**} = \varphi^* + 45^\circ$ with $\tau_{max} = \pm 52$ MPa & $\sigma_M = -16$ MPa

