جامعة المنارة
قسم هندسة الروبوت والأنظمة الذكية

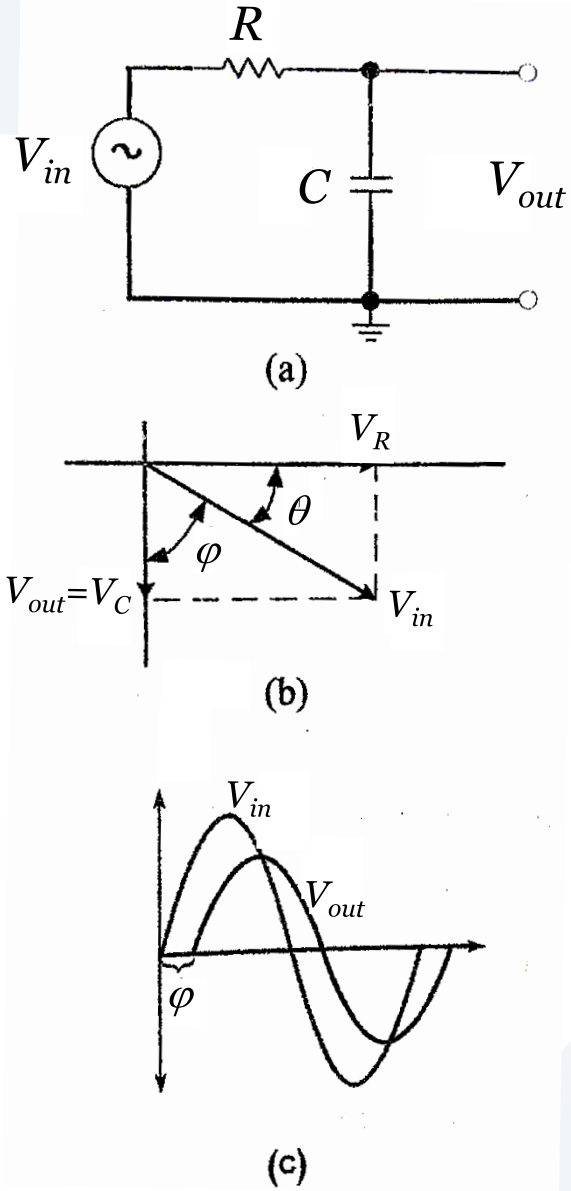
الدارات الكهربائية

الدكتور المهندس
علاء الدين أحمد حسام الدين

8

دارات إزاحة الطور

دارات RC لإزاحة الطور



يمكن أن تكون الإزاحة متقدمة أو متأخرة وفقاً لتصميم الدارة. تتصف الدارة ذات الإزاحة المتأخرة بجهد خرج متأخر عن جهد الدخل، بينما يكون جهد الخرج متقدم على جهد الدخل في الدارة ذات الإزاحة المتقدمة.

يبين الشكل مبدأ تصميم دارة ذات إزاحة متأخرة مع المخطط الشعاعي لجهدي الدخل والخرج.

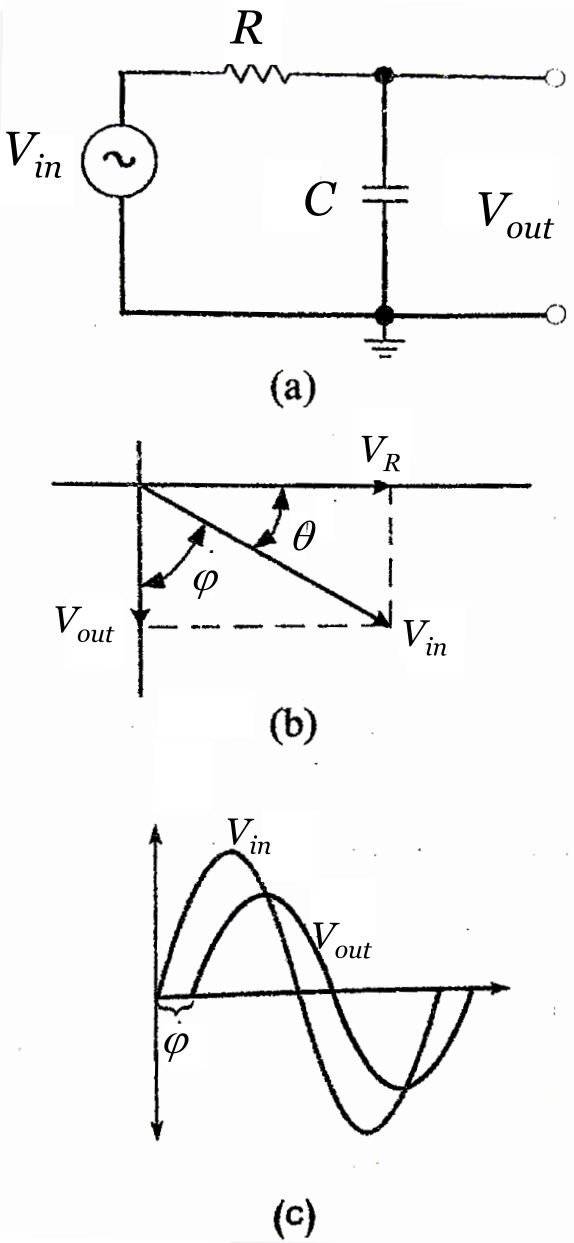
تم اعتماد التيار كمرجع في الدارة، وبما أن:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{X_C}{R}\right)$$

تكون زاوية التأخير:

$$\theta = 90^o - \arctan\left(\frac{X_C}{R}\right)$$

يتعلق مطال وزاوية إشارة الخرج بقيمتي **R** والمفاعلة السعوية X_C.



تعطى قيمة جهد الخرج بالعلاقة:

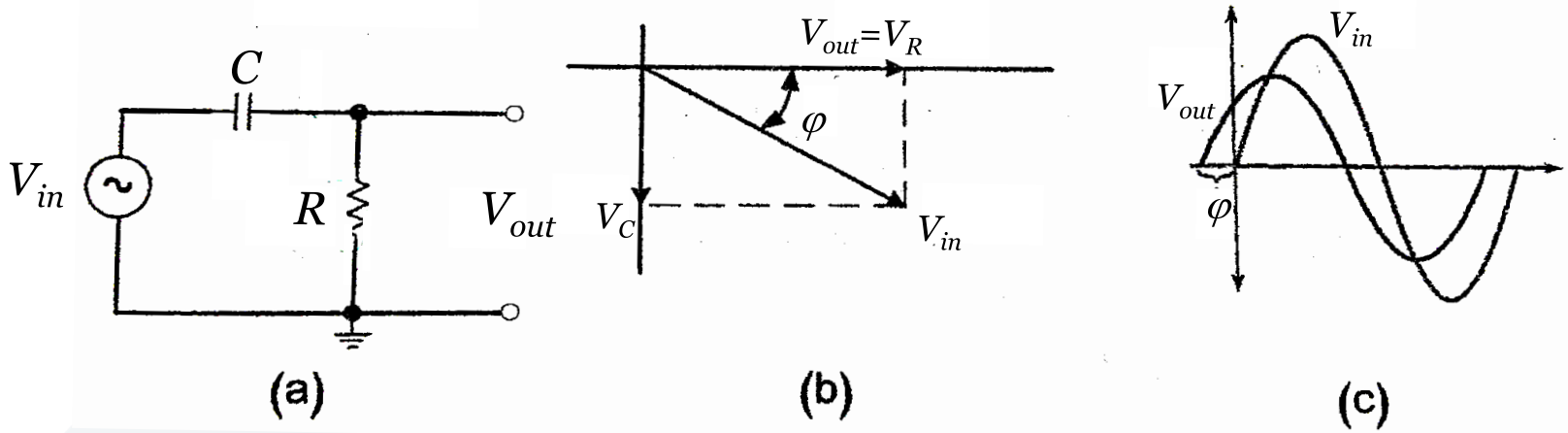
$$V_{out} = \frac{X_C}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} \cdot V_{in}$$

دارات RC لإزاحة الطور

ويبين الشكل مبدأ تصميم دارة RC ذات إزاحة متقدمة، حيث جهد الخرج يتقدم على جهد الدخل بزاوية مقدارها φ. تم اعتماد التيار كمرجع في الدارة، وتكون زاوية التأخير: $\varphi = \arctan(\frac{X_C}{R})$

يتعلق مطال وزاوية إشارة الخرج بقيمتي R والمفاعلة السعوية X_C، وتكون قيمة جهد الخرج هي:

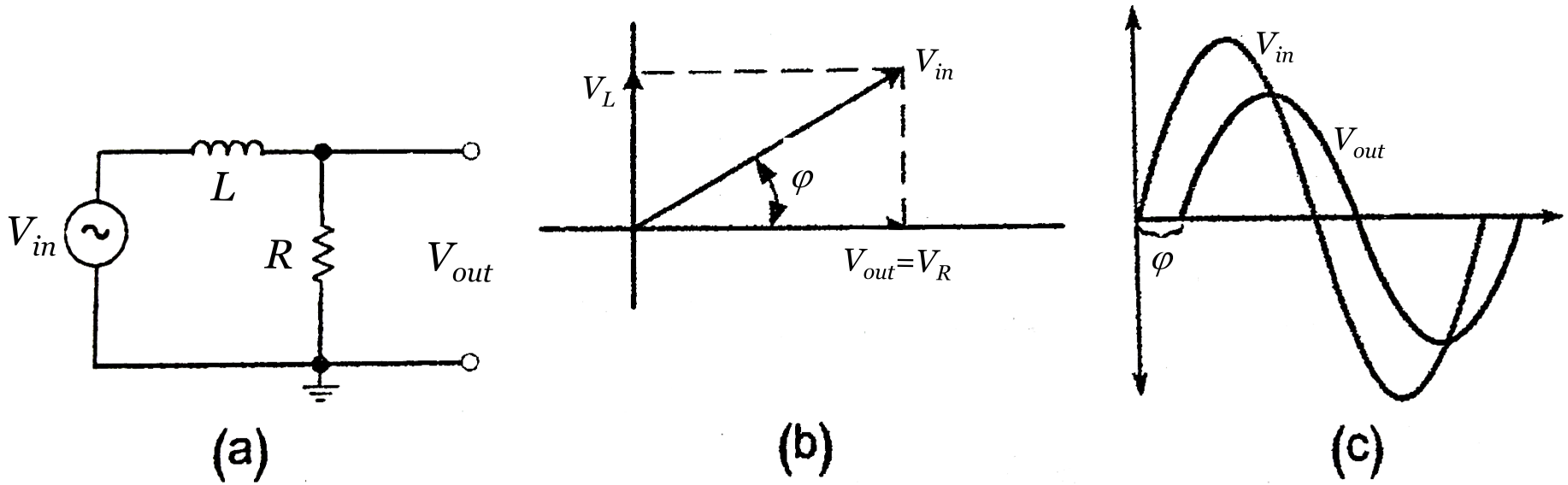
$$V_{out} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_C^2}} \cdot V_{in}$$



دارات RL لإزاحة الطور

يمكن أن تكون الإزاحة متقدمة أو متأخرة وفقاً لتصميم الدارة. تتصف الدارة ذات الإزاحة المتأخرة بجهد خرج متأخرعن جهد الدخل، بينما يكون جهد الخرج متقدم على جهد الدخل في الدارة ذات الإزاحة المتقدمة.

يبين الشكل مبدأ تصميم دارة متأخرة مع المخطط الشعاعي لجهدي الدخل والخرج.



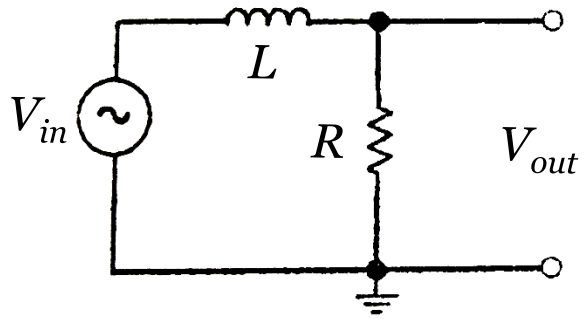
دارات RL لإزاحة الطور

تم اعتماد التيار كمرجع في الدارة، وتكون زاوية التأخير:

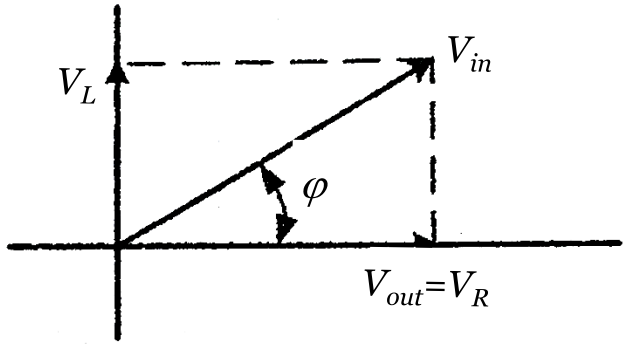
$$\varphi = \arctan\left(\frac{X_L}{R}\right)$$

وتكون قيمة جهد الخرج مساوية:

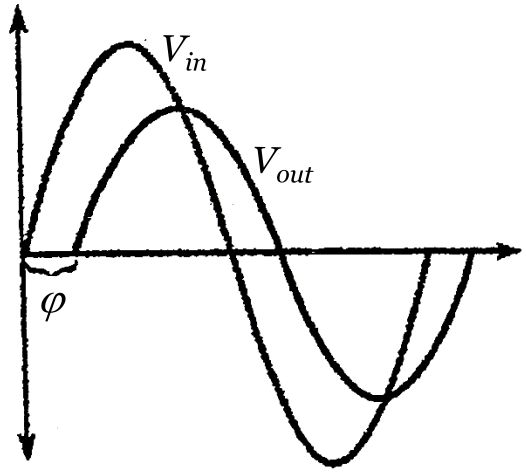
$$V_{out} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \cdot V_{in}$$



(a)



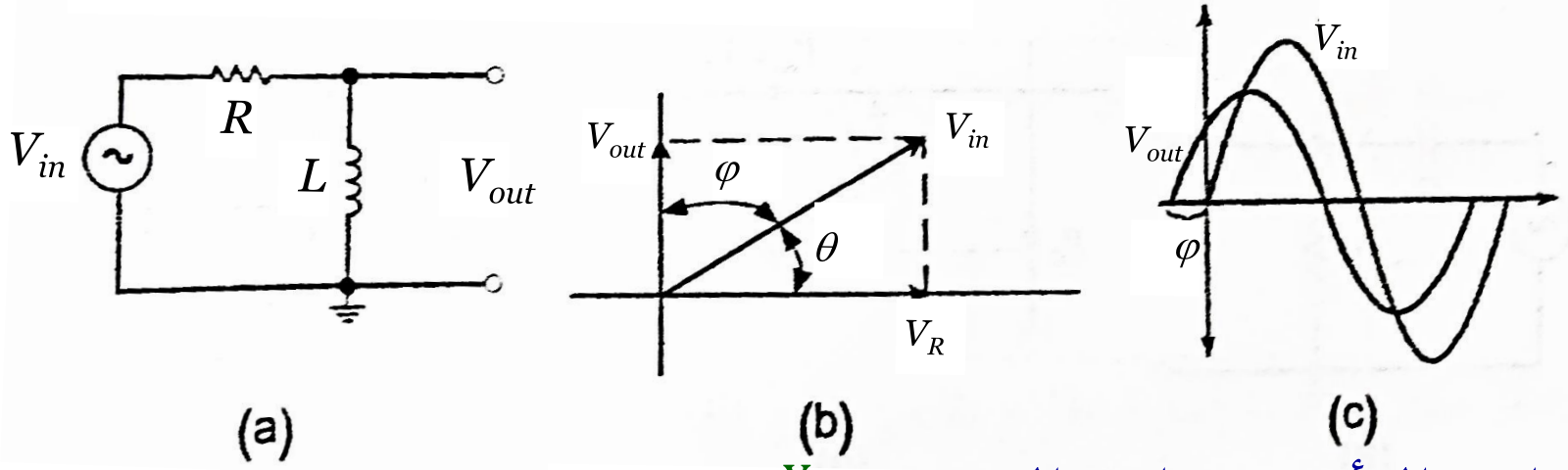
(b)



(c)

دارات RL لإزاحة الطور

ويبين الشكل مبدأ تصميم دارة RL ذات إزاحة متقدمة، حيث يتقدم جهد الخرج على جهد الدخل بزاوية مقدارها φ. مع المخطط الشعاعي لجهدي الدخل والخرج:



تكون زاوية التأخير مساوية إلى:

$$\varphi = 90^{o} - \arctan\left(\frac{X_L}{R}\right)$$

وتكون قيمة جهد الخرج هي:

$$V_{out} = \frac{X_L}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} \cdot V_{in}$$

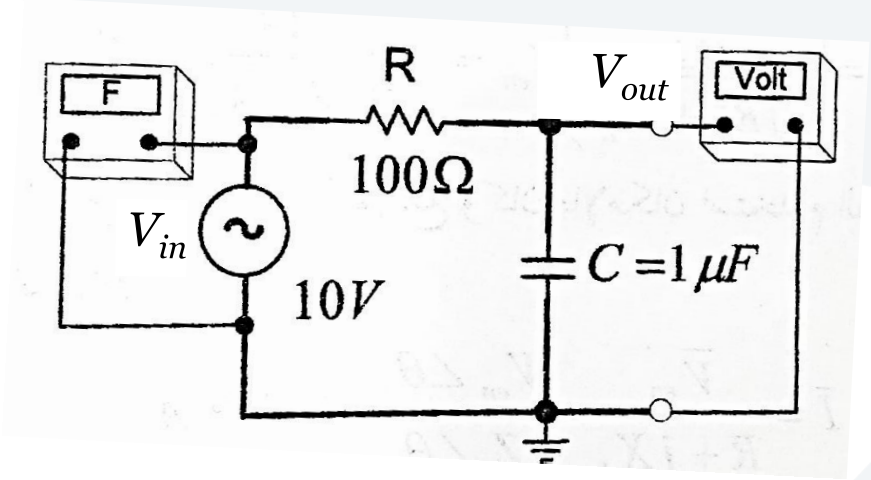
دارات ترشيح RC

توجد بعض الدارات التي تتميز بصفة انتقائية الترددات، أي تسمح بمرور بعض ترددات الدخل، وتمنع مرور البقية.

تملك دارات RC التسلسلية ميزة الانتقائية للتردد. وحسب طريقة الوصل يكون لدينا نوعان من هذه الدارات: النوع الأول يسمى مرشح حزمة التمرير المنخفضة Low Pass Filter والذي نأخذ فيه جهد الخرج على طرفي المكثف (دارة إزاحة متأخرة)، بينما نأخذ الجهد على طرفي المقاومة (دارة إزاحة متقدمة) للنوع الثاني الذي يسمى مرشح حزمة التمرير العالية High Pass Filter.

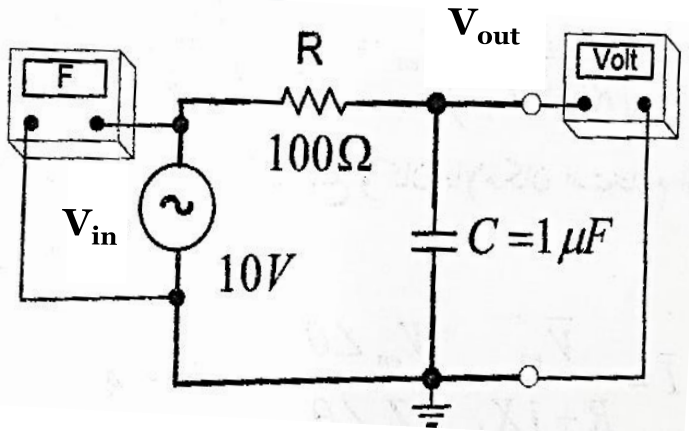
عادة تستخدم دارات RC مع مضخم عملياتي لتصميم مرشحات فعالة Active Filter التي تكون أكثر كفاءة.

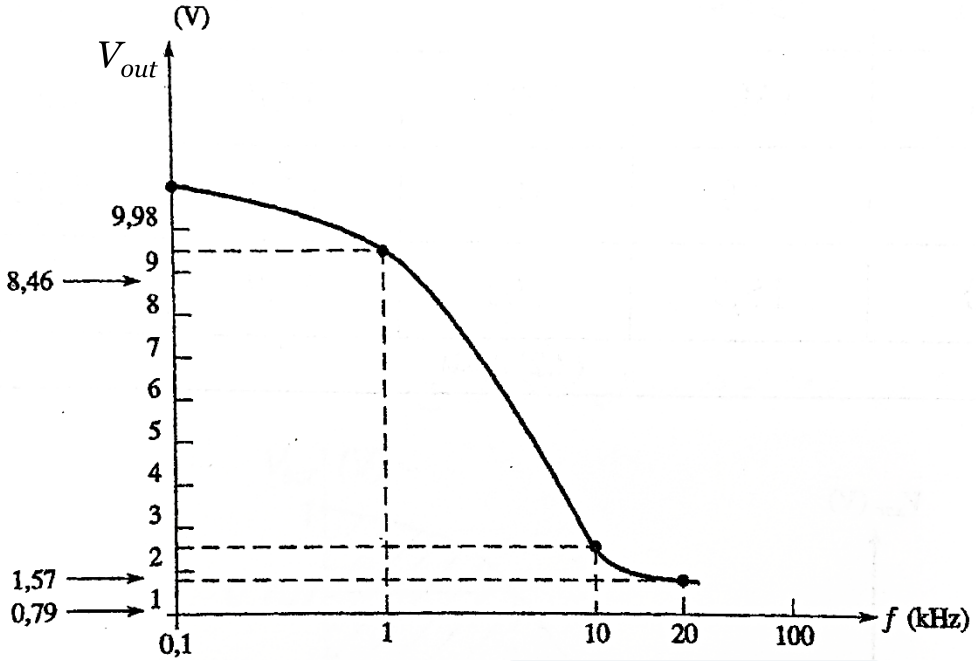
مرشح حزمة التمرير المنخفضة



لتكن لدينا الدارة المبينة بالشكل التي تتيح لنا دراسة هذا المرشح، حيث نقيس جهد الخرج بتغير تردد منبع الجهد المطبق.

تبين التجربة أن المفاعلة السعوية تتناقص بزيادة التردد مما يؤدي إلى نقصان الجهد على طرفي المكثف. النتائج المخبرية تم تسجيلها في الجدول التالي الذي يوضح تغيرات بارامترات الدارة تبعاً للتردد:

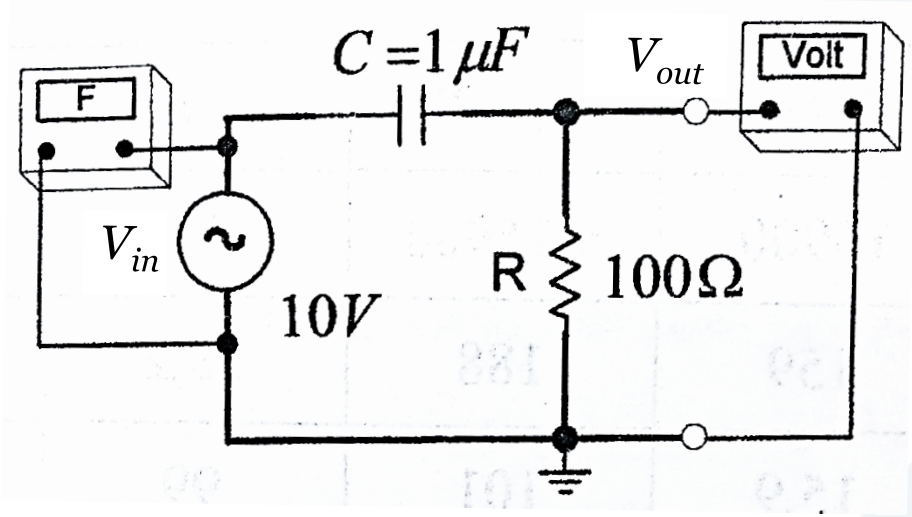




f [KHz]	X_C [Ω]	Z [Ω]	I [mA]	V_{out} [V]
0.1	15900	≅15900	≅0.63	9.98
1	159	188	53.2	8.46
10	15.9	101	99	1.57
20	7.96	≅100	≅100	0.79

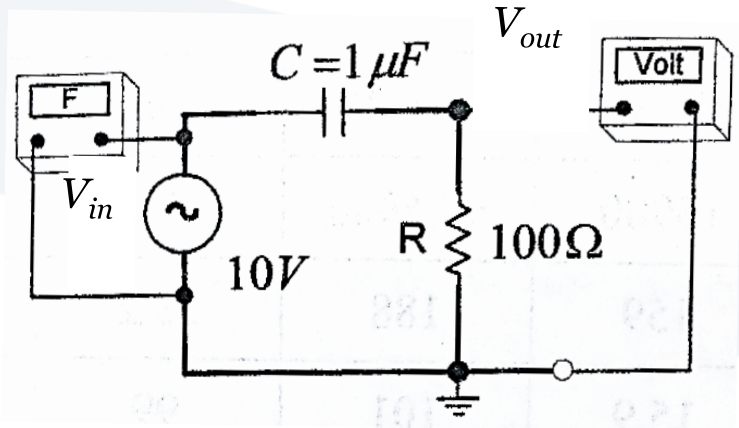
يبين الشكل استجابة الدارة بدلالة التردد، حيث يظهر من المنحني أن الجهود تكون عالية في الترددات المنخفضة، وتتناقص بزيادة التردد.

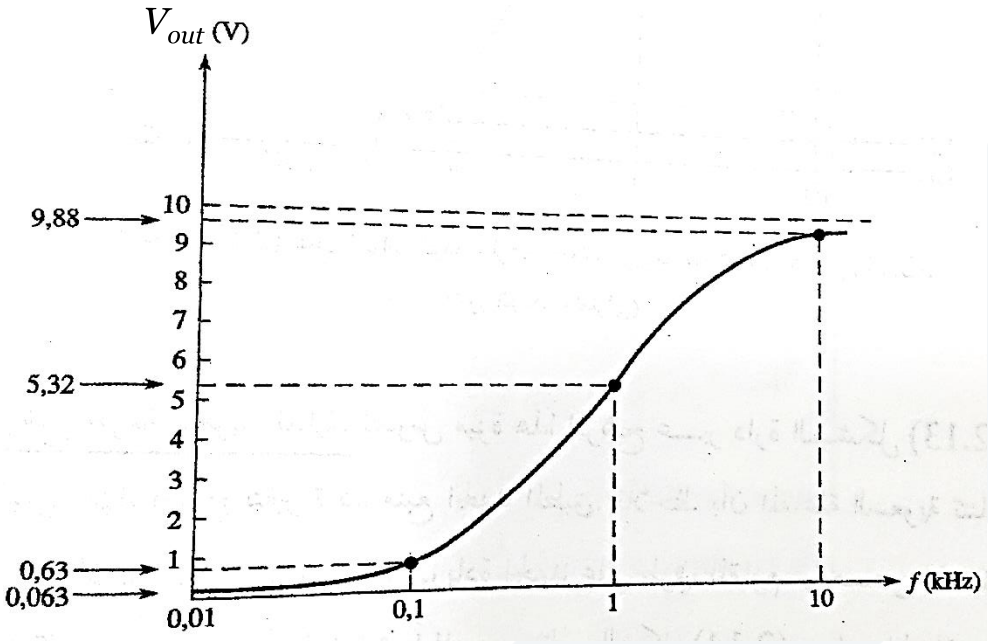
مرشح حزمة التمرير العالية



لتكن لدينا الدارة المبينة بالشكل التي تتيح لنا دراسة هذا المرشح، حيث نقيس جهد الخرج بتغير تردد منبع الجهد المطبق.

تبين التجربة أن المفاعلة السعوية تتناقص بزيادة التردد مما يؤدي إلى زيادة الجهد على طرفي المقاومة. النتائج المخبرية تم تسجيلها في الجدول التالي الذي يوضح تغيرات بارامترات الدارة تبعاً للتردد:





f [KHz]	X_C [Ω]	Z [Ω]	I [mA]	V_{out} [V]
0.01	15900	≅15900	≅0.63	0.063
0.1	1590	1593	6.28	0.63
1	159	188	53.2	5.32
10	15.9	101	98.8	9.88

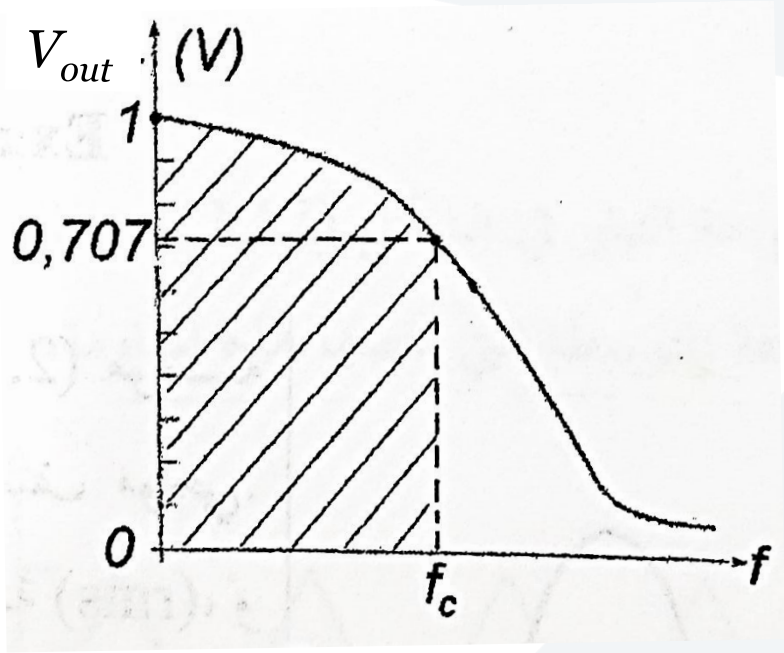
يبين الشكل استجابة الدارة بدلالة التردد، حيث يظهر من المنحني أن الجهود تكون عالية في الترددات العالية، وتتزايد بزيادة التردد.

تردد القطع وعرض الحزمة

يسمى التردد الذي يجعل المفاعلة السعوية مساوية للمقاومة في مرشحات حزمة التمرير المنخفضة أو العالية بتردد القطع f_c.

$$R = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2\pi \cdot f_C \cdot C} \Rightarrow f_C = \frac{1}{2\pi \cdot R \cdot C}$$

عند قيمة تردد القطع يكون جهد الخرج مساوياً إلى 70.7% من قيمته الأعظمية. يعد تردد القطع هو حد الكفاءة للمرشح من الناحية العملية. مثلاً في مرشح حزمة التمرير العالية، كل الترددات الأكبر من تردد القطع تجتاز مدخل المرشح، بينما الترددات الأقل من تردد القطع تكون مرفوضة، أي لا تجتاز المرشح.



يبين الشكل استجابة الدارة بدلالة التردد لمرشح حزمة التمرير المنخفضة، حيث يظهر تردد القطع وعرض حزمة الترددات التي تجتاز المرشح.

جَامعة المَنارة
MANARA UNIVERSITY

الطنين التسلسلي والتفرعي

Series and Parallel Resonances

Resonance is a condition in an RLC circuit in which the capacitive and inductive reactances are equal in magnitude, thereby resulting in a purely resistive impedance.

Resonant circuits (series or parallel) are useful for constructing filters, as their transfer functions can be highly frequency selective. They are used in many applications such as selecting the desired stations in radio and TV receivers.

تكون الدارة الكهربائية في حالة طنين (رنين) إذا كان الجهد المطبّق متوافق بالطور مع التيار المار في الدارة. في هذه الحالة تتكون الممانعة الكلية المكافئة للدارة من المقاومة R فقط. أي أن شرط الطنين هو مساواة القسم التخيلي لممانعة الدارة للصفر. وهناك نوعان من الطنين الكهربائي: طنين التوترات الذي يحدث في الدارات التسلسلية، وطنين التيارات الذي يحدث في الدارات التفرعية.

يؤدي حدوث الطنين الكهربائي إلى زيادة الجهد المطبّق على عناصر التجهيزات الكهربائية أو زيادة التيار المار فيها، ويمكن أن يسبب خطراً على عازلية عناصر الدارات الكهربائية وتلفها. لذلك يكون من الضروري التعرّف إلى خواص دارات الطنين لتأمين العمل الطبيعي للتجهيزات الكهربائية.

شروط حدوث الطنين :

يمكن أن نكافئ الشبكة الكهربائية المغذاة من منبع واحد للقدرة بممانعة مكونة من مقاومة أومية R ومفاعلة X، أي:

$$Z = R + jX \Rightarrow \begin{cases} |Z| = \sqrt{R^2 + X^2} \\ tg\varphi = \dfrac{X}{R} \end{cases}$$

الشرط الأول لحدوث الطنين: القسم التخيلي للممانعة يساوي الصفر: $X = 0$

الشرط الثاني لحدوث الطنين: عامل الاستطاعة يساوي الواحد:

$$tg\varphi = \frac{X}{R} = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow Cos\varphi = 1$$

الشرطان السابقان يوضّحان من الناحية الرياضية انعدام المفاعلة الردية التابعة لعناصر الدارة (R , L , C) من جهة، وللسرعة الزاويّة للدارة ω من جهة ثانية، أي: $X = f(R, L, C, \omega) = 0$

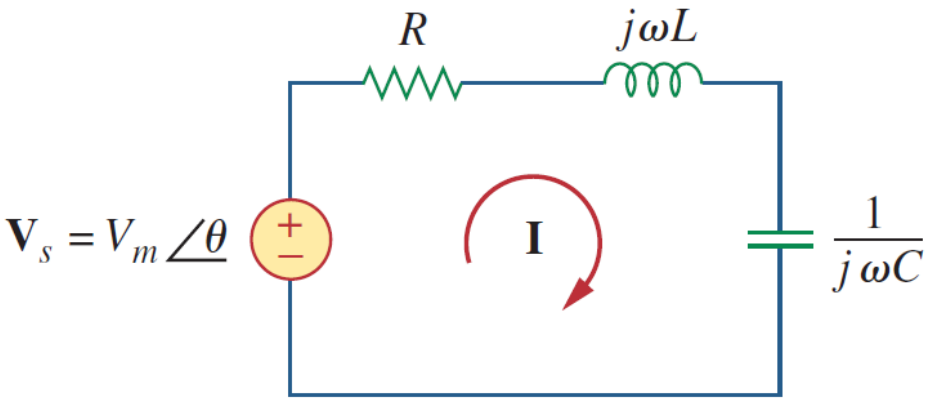
وبالتالي يمكن حدوث الطنين عند تغير قيم عناصر الدارة (R , L , C) بثبات السرعة الزاويّة ω، أو عند تغير السرعة الزاويّة ω بثبات قيم عناصر الدارة (R , L , C).

تسمّى السرعة الزاويّة عند حدوث الطنين بالسرعة النبضية للطنين، ويرمز لها بالرمز ω_0، حيث:

$$\omega_0 = 2\pi \cdot f_0$$

ويسمى التردد f_0 بتردد الطنين وهو التردد الناتج عند إلغاء أثر المفاعلات في الدارة، حيث تصبح الممانعة مجرد مقاومة فقط.

دارة RLC تسلسلية



الطنين الكهربائي في الدارة التسلسلية (طنين الجهد)

Series (Voltage) Resonance:

لتكن لدينا دارة كهربائية مؤلفة من مقاومة أومية R وملف تحريضه الذاتي L ومكثّف سعته C بوصل تسلسلي، كما في الشكل.

المانعة الكلية المكافئة للدارة:

$$Z = H(\omega) = \frac{V_S}{I} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R + jX$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} \angle \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

عندما تكون الدارة في حالة طنين فإن القسم التخيلي للممانعة يكون معدوماً:

$$\mathrm{Im}(Z) = X = 0 \Rightarrow \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \Rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C}$$

$$\Rightarrow \omega^2 \cdot L \cdot C = 1 \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{L \cdot C} \Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

وفقاً لذلك يمكن بمعرفة قيمتي كميتين من الكميات الثلاث الداخلة في العلاقة السابقة يمكن تحديد قيمة الكمية الثالثة، حيث نضيف إلى هذه الكميات الدليل (0) في حالة الطنين، أي:

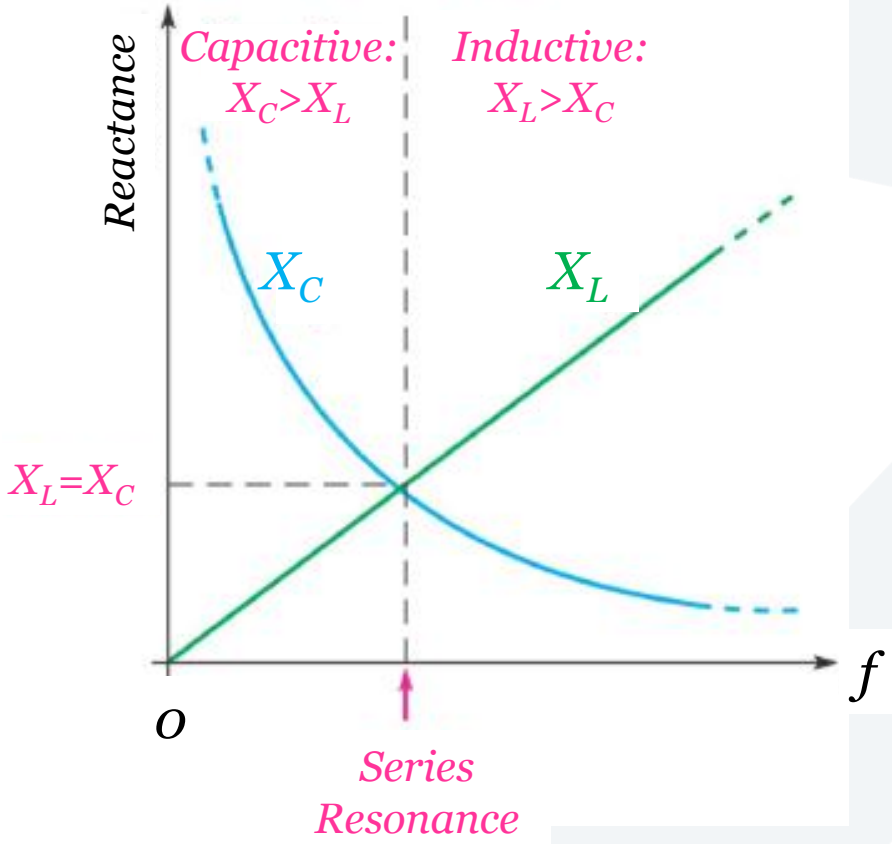
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_0 \cdot C_0}}, L_0 = \frac{1}{\omega_0^2 \cdot C_0}, C_0 = \frac{1}{\omega_0^2 \cdot L_0}$$

بما أن $\omega = 2\pi \cdot f$ فإن تردد الطنين يعطى بالعلاقة:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = 2\pi \cdot f_0 \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} [Hz]$$

ملاحظات:

1. عند حدوث الطنين تكون الممانعة $Z=R$ أومية بحتة، وبعبارة أخرى فإن الملف والمكثف الموصولان بشكل تسلسلي يعملان كدارة قصر، وكامل جهد المنبع يطبق على المقاومة R فقط.
2. جهد المنبع V_s والتيار I متوافقين بالطور ($\varphi=0$)، وبالتالي عامل الاستطاعة $\cos\varphi=1$.



عند تردد الطنين تكون الممانعة $Z=R$ و $\varphi=0$.

عند ترددات أقل من ω_0 يسود أثر المفاعلة السعوية، وتزداد الممانعة بسرعة كلما قل التردد وتقترب الزاوية من -90^o.

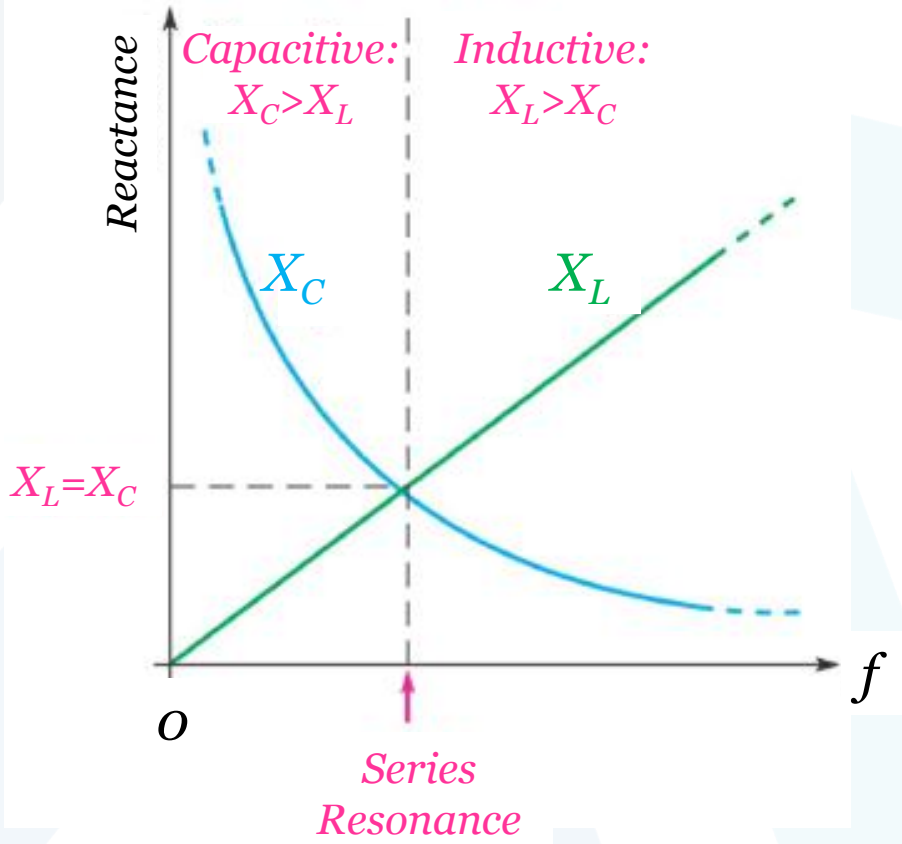
عند ترددات أكبر من ω_0 يسود أثر المفاعلة التحريضية، وتزداد الممانعة بسرعة كلما زاد التردد وتقترب الزاوية من $+90^o$.

Analysis of Series RLC Circuits

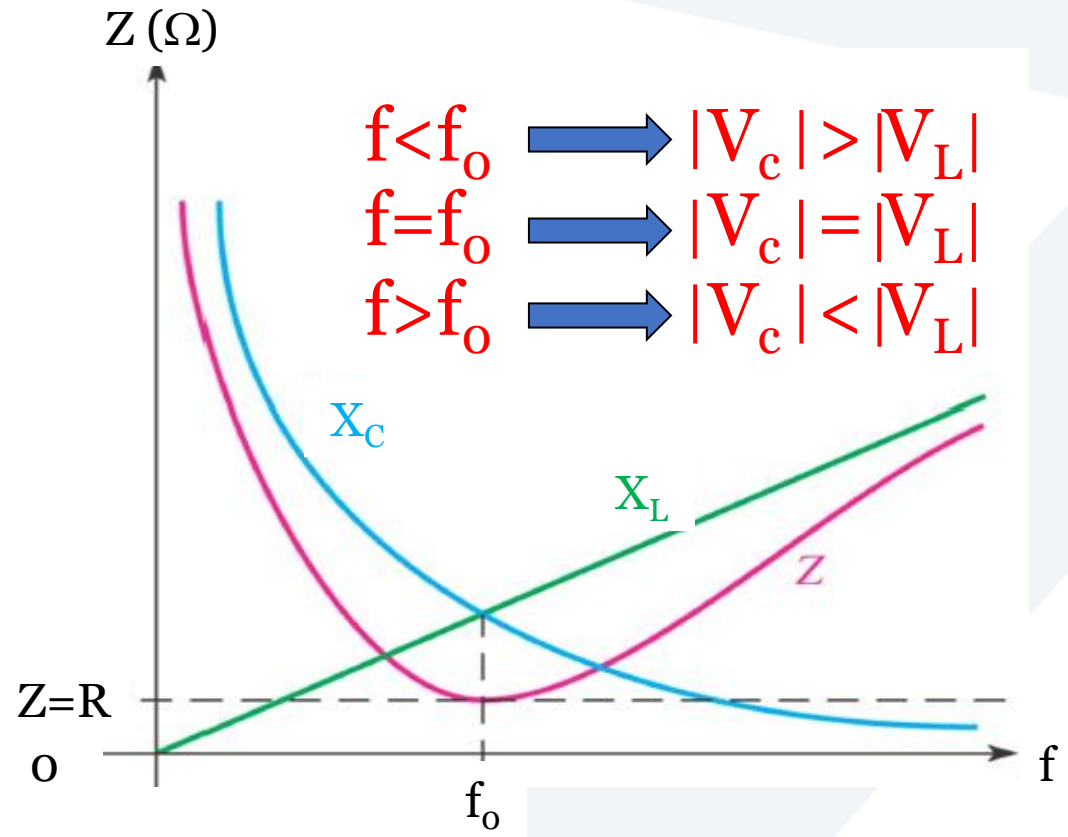
- A series RLC circuit is:
- Capacitive when $X_C > X_L$
- Inductive when $X_L > X_C$
- Resonant when $X_C = X_L$
- At resonance $Z_{tot} = R$
- X_L is a straight line

  $y = mx + b$
- X_C is a hyperbola

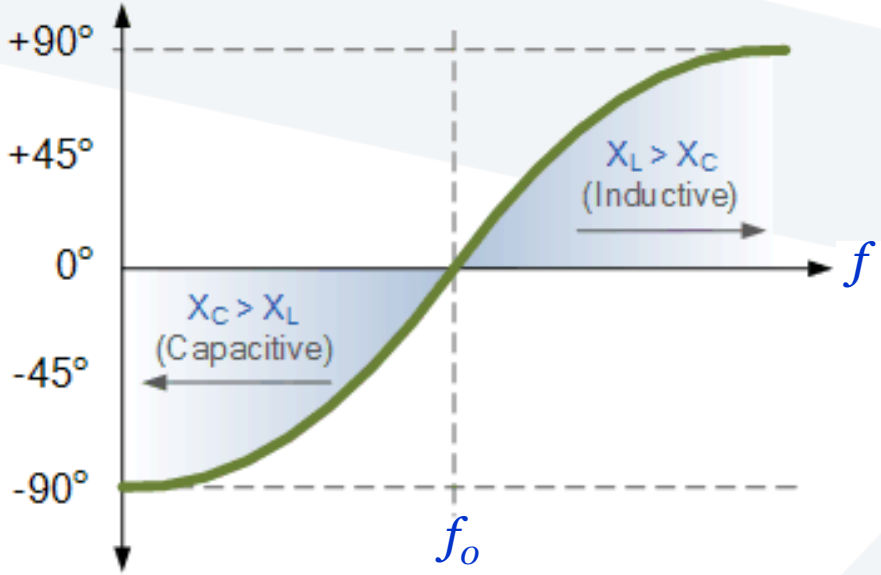
  $xy = k$



Series RLC impedance as a function of frequency.



يظهر من الشكل أن ممانعة الدارة تكون أصغرية عند تردد الطنين، Z=R وبالتالي سيكون التيار في هذه الحالة أعظمياً. ونلاحظ أن مطال Z يتغير بسرعة أكثر مع الترددات المنخفضة بالنسبة للترددات العالية. ونكتب بالنسبة للجهود بدلالة التردد:

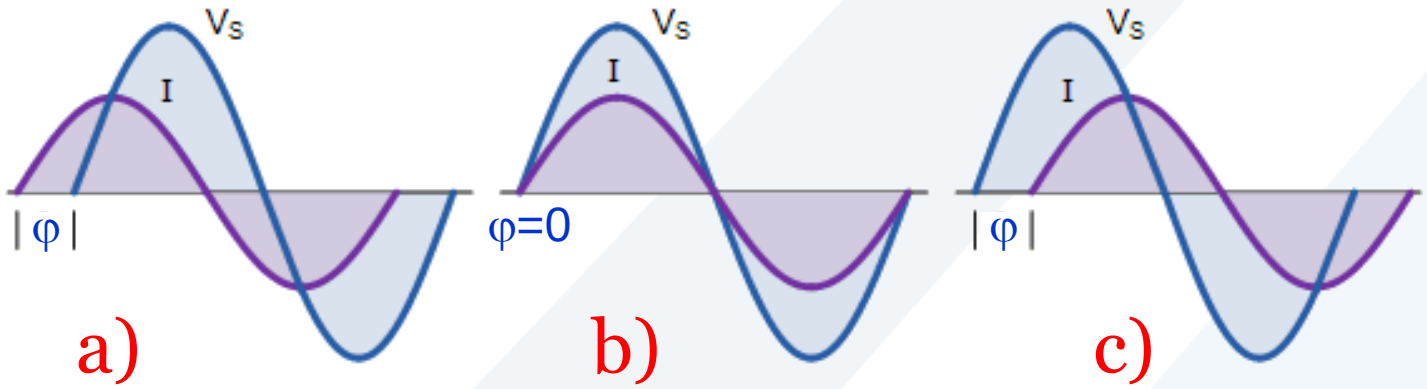


يبين الشكل تغير زاوية الطور لدارة RLC تسلسلية بالنسبة لتردد الطنين f_0 حيث تظهر لدينا الحالات التالية:

a) يتقدم التيار على الجهد المطبق عند الترددات الأقل من f_0.

b) يتفق التيار بالطور مع الجهد المطبق عند تردد الطنين f_0.

c) يتأخر التيار على الجهد المطبق عند الترددات الأكبر من f_0.



تحسب القيمة الفعالة للتيار المار في الدارة عند حدوث الطنين كما يأتي:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C})^2}}$$

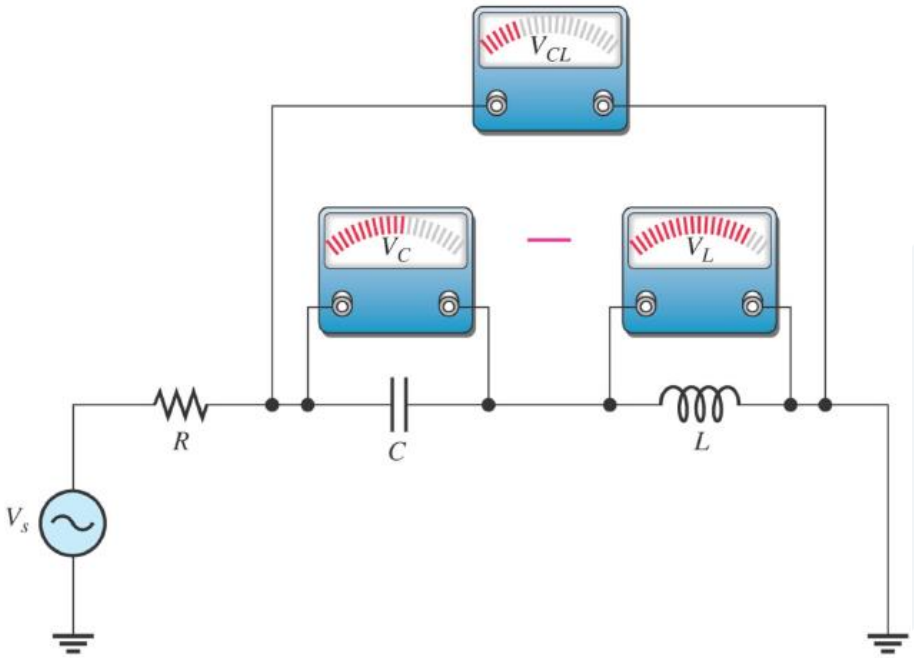
وكما وجدنا سابقاً، يتحقق في حالة الطنين الشرط الآتي: $\omega \cdot L = \frac{1}{\omega \cdot C} \Rightarrow I = \frac{V}{\sqrt{R^2}} = \frac{V}{R}$

أي أن الممانعة تكون أصغرية، وبالتالي التيار أعظمي، أي: $I_{max} = \frac{V}{R_{max}}$

وفقاً لما سبق، فإن قيمة التيار في حالة الطنين لا تعتمد على قيم المفاعلات الردية ($1/\omega \cdot C$) أو التحريضية ($\omega \cdot L$).

عامل الجودة Quality Factor:

The voltage across the series combination of C , L and R is always less than the larger individual voltage across either C or L



يمكن أن يكون جهد الملف وجهد المكثف أكبر بكثير من جهد المنبع. فكيف يمكن لجهد عنصر تسلسلي أن يكون أكبر من الجهد المطبق على العناصر الثلاثة معاً؟

يكمن الجواب في أن C و L هما عنصران لتخزين الطاقة، والجهدين V_C و V_L مزاحان عن بعضهما بزاوية 180°، حيث جهد V_L يعاكس جهد V_C.

عند حدوث الطنين، وبأخذ قيمة السرعة النبضية من العلاقة يكون: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$

$$V_L = \omega_0 \cdot L \cdot I = \omega_0 \cdot L \cdot \frac{V_m}{R} = \frac{\omega_0 \cdot L}{R} \cdot V_m = Q \cdot V_m = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \cdot L \cdot \frac{V_m}{R} = \frac{V_m}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$V_C = \frac{I}{\omega_0 \cdot C} = \frac{1}{\omega_0 \cdot C \cdot R} \cdot V_m = Q \cdot V_m = \frac{V_m \cdot \sqrt{L \cdot C}}{C \cdot R} = \frac{V_m}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\Rightarrow V_L = V_C = \frac{V_m}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$$

تسمى الكمية $\sqrt{L/C}$ بالممانعة المميزة للدارة، ويُرمزلها بالرمز Z_0 :

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

وفقاً لذلك تصبح العلاقة $V_L = V_C = \frac{V_m}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$ بالشكل: $V_L = V_C = \frac{V_m}{R} \cdot Z_0$

نعرف عامل الجودة للدارة التسلسلية Q بالعلاقة:

$$Q = \frac{\omega_0 \cdot L}{R} = \frac{1}{\omega_0 \cdot C \cdot R}$$

يتم القياس الكمي لحدة الطنين في الدارة من خلال عامل الجودة Q، فعند حدوث الطنين تتأرجح الطاقة بين الملف والمكثف، حيث يعبر عامل الجودة عن النسبة بين القيمة العظمى للقدرة المخزنة في الدارة وبين القدرة المبددة فيها، وذلك خلال دورواحد من الطنين.

$$Q = 2\pi \frac{\text{Peak energy stored in the circuit}}{\text{Energy dissipated by the circuit in one period at resonance}}$$

وفقاً لذلك نعرف تردد الطنين بأنه التردد الذي يسمح للوشيعة بتفريغ ما اختزنته بالسرعة التي يحتاجها المكثف لاختزان القدرة المفرغة، وبالعكس. فتكون القدرة التي يقدمها المنبع مساوية تماماً للقدرة التي تستهلكها المقاومة المكافئة للضياع على المقاومة، أي أن كامل الجهد المطبق على الدارة يساوي فرق الجهد على المقاومة، وهذا لا يعني انعدام جهد كل من العنصرين الآخرين في الدارة (L , C)، حيث يمكن كتابة هذين الجهدين بالصيغة العقدية بدلالة عامل الجودة:

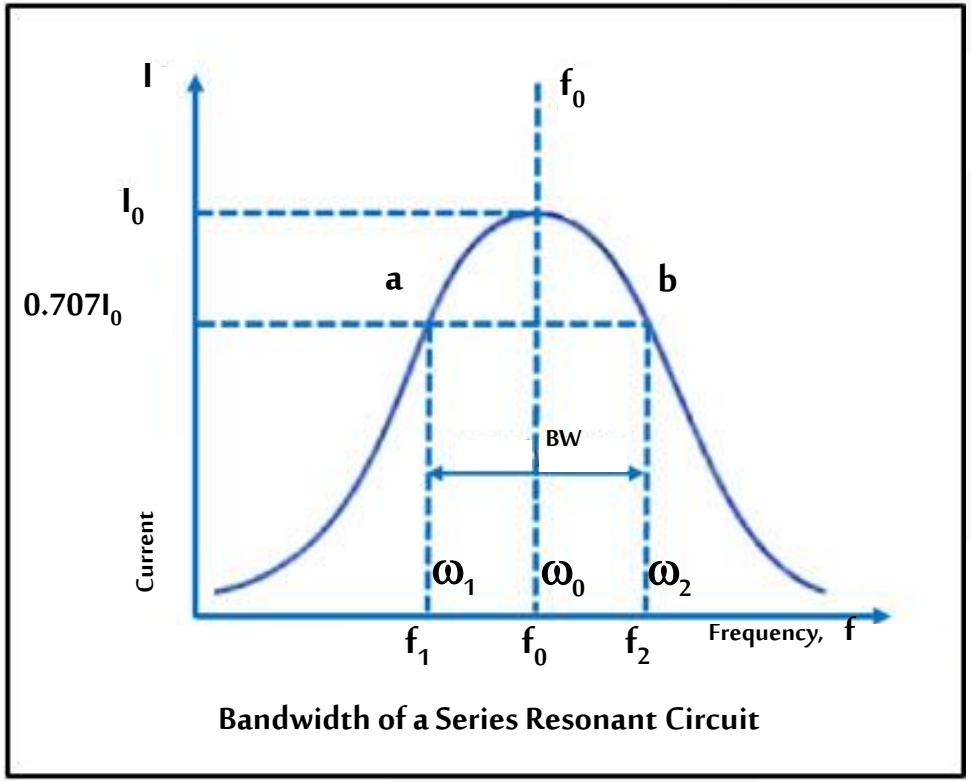
$$\vec{V}_L = jQ\vec{V}$$
$$\vec{V}_C = -jQ\vec{V}$$

ويعد عامل الجودة أيضاً مقياساً لخاصية تخزين القدرة في الدارة بالنسبة لخاصية تبديدها.

نقطتا نصف الاستطاعة وعرض الحزمة (النطاق):

The half-power points and bandwidth

في دارة RLC تسلسلية يمكن تمثيل التيار كتابع للتردد، حيث يأخذ قيمة عظمى I_0 عند تردد الطنين $f=f_0$، وتكون الاستطاعة المقدمة العظمى مساوية $P = I_0^2 \cdot R$.

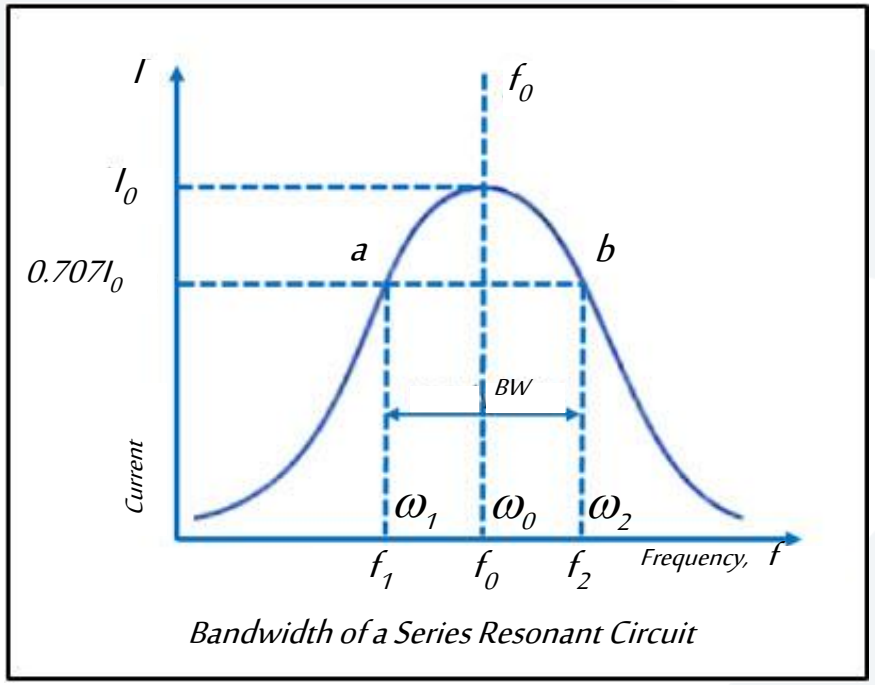


Bandwidth of a Series Resonant Circuit

نفتش عن قيمة التيار I_1 التي توافق نصف هذه الاستطاعة:

$$\frac{P}{2} = \frac{I_0^2 \cdot R}{2} = I_1^2 \cdot R \Rightarrow I_1 = 0.707 \cdot I_0$$

النقطتان a و b عند الترددات f_1 و f_2 يكون التيار عندهما هو I_1 . يعرف الترددان السابقان بترددي نصف الاستطاعة، ويعرف الفرق بينهما بعرض الحزمة BW.



Bandwidth of a Series Resonant Circuit

$$BW = f_2 - f_1[Hz]$$
$$BW = \omega_2 - \omega_1[rad/s]$$

عند ω_0 يكون:

$$V = I_0 \cdot Z = I_0 \cdot R$$

عند $\omega=\omega_1$ يكون:

$$V = I_1 \cdot Z_1 = 0.707 \cdot I_0 \cdot Z_1$$
$$\Rightarrow Z_1 = \frac{V}{0.707 \cdot I_0} = 1.414 \cdot R = \sqrt{2}R$$

نستنتج من العلاقة الأخيرة أن زاوية الممانعة Z_1 هي (-45°) لأن التأثير السعوي أكبر من التأثير التحريضي.

$$\varphi = -45^0 \Rightarrow X_C - X_L = R \Rightarrow \frac{1}{\omega_1 \cdot C} - \omega_1 \cdot L = R \qquad (1)$$

بنفس الطريقة عند $\omega=\omega_2$ يكون:

$$\varphi = 45^0 \Rightarrow X_L - X_C = R \Rightarrow \omega_2 \cdot L - \frac{1}{\omega_2 \cdot C} = R \quad (2)$$

مع ملاحظة أن التأثير التحريضي أكبر من التأثير السعوي.

من المعادلتين (1) و (2) نجد:

$$\frac{1}{\omega_1 \cdot C} - \omega_1 \cdot L = \omega_2 \cdot L - \frac{1}{\omega_2 \cdot C}$$

نضرب الطرفين بقيمة السعة C:

$$\frac{1}{\omega_1} - \omega_1 \cdot L \cdot C = \omega_2 \cdot L \cdot C - \frac{1}{\omega_2}$$

نعوض في العلاقة الأخيرة $\omega_0^2 = \frac{1}{L \cdot C}$ فيكون:

$$\frac{1}{\omega_1} - \frac{\omega_1}{\omega_0^2} = \frac{\omega_2}{\omega_0^2} - \frac{1}{\omega_2} \Rightarrow \frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} = \frac{\omega_1}{\omega_0^2} + \frac{\omega_2}{\omega_0^2}$$

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1 \cdot \omega_2} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_0^2} \Rightarrow \omega_0^2 \cdot (\omega_1 + \omega_2)$$

$$= \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot (\omega_1 + \omega_2)$$

$$\omega_0^2 = \omega_1 \cdot \omega_2 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2} \Rightarrow f_0 = \sqrt{f_1 \cdot f_2}$$

من المعادلة (1) نجد:

$$\frac{1}{\omega_1 \cdot C} - \omega_1 \cdot L = R \Rightarrow \frac{1 - \omega_1^2 \cdot L \cdot C}{\omega_1 \cdot C} = R$$

$$1 - \omega_1^2 \cdot L \cdot C = \omega_1 \cdot C \cdot R$$

$$\omega_1^2 \cdot L \cdot C + \omega_1 \cdot C \cdot R - 1 = 0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (C \cdot R)^2 + 4 \cdot C \cdot L$$

$$\omega_1 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-C \cdot R + \sqrt{(C \cdot R)^2 + 4 \cdot C \cdot L}}{2 \cdot C \cdot L}$$

$$\omega_1 = \frac{-C \cdot R}{2 \cdot L \cdot C} + \frac{\sqrt{(C \cdot R)^2 + 4 \cdot L \cdot C}}{2 \cdot C \cdot L} = \frac{-R}{2L} + \sqrt{\frac{C^2 \cdot R^2 + 4 \cdot L \cdot C}{4 \cdot L^2 \cdot C^2}}$$

$$\omega_1 = \frac{-R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{L \cdot C}}$$

يتم اعتماد القيمة الموجبة فقط.

من المعادلة (2) نجد:

$$\omega_2 \cdot L - \frac{1}{\omega_2 \cdot C} = R \Rightarrow \frac{\omega_2^2 \cdot L \cdot C - 1}{\omega_2 \cdot C} = R$$

$$\omega_2^2 \cdot L \cdot C - 1 = \omega_2 \cdot C \cdot R$$

$$\omega_2^2 \cdot L \cdot C - \omega_2 \cdot C \cdot R - 1 = 0$$

وهي معادلة من الدرجة الثانية:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (C \cdot R)^2 + 4 \cdot L \cdot C$$

$$\omega_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{C \cdot R + \sqrt{(C \cdot R)^2 + 4 \cdot C \cdot L}}{2 \cdot C \cdot L}$$

$$\omega_2 = \frac{C \cdot R}{2 \cdot L \cdot C} + \frac{\sqrt{(C \cdot R)^2 + 4 \cdot L \cdot C}}{2 \cdot C \cdot L} = \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{C^2 \cdot R^2 + 4 \cdot L \cdot C}{4 \cdot L^2 \cdot C^2}}$$

$$\omega_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{L \cdot C}}$$

يتم اعتماد القيمة الموجبة فقط.

$$\omega_1 = \frac{-R}{2L} + \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 + \frac{1}{L \cdot C}} \quad ، \quad \omega_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 + \frac{1}{L \cdot C}}$$ مما سبق نجد:

وبالتالي عرض الحزمة BW يساوي:

$$BW = \omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{2L} + \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 + \frac{1}{L \cdot C}} - \frac{-R}{2L} + \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 + \frac{1}{L \cdot C}}$$

$$BW = \frac{R}{2L} + \frac{R}{2L} = \frac{2R}{2L} = \frac{R}{L} [rad/s]$$

وفق تعريف عامل الجودة $Q = \frac{\omega_0 \cdot L}{R}$ يكون عرض الحزمة هو: $BW = \frac{\omega_0}{Q} [rad/s]$

وبدلالة التردد يكون عرض الحزمة BW يساوي:

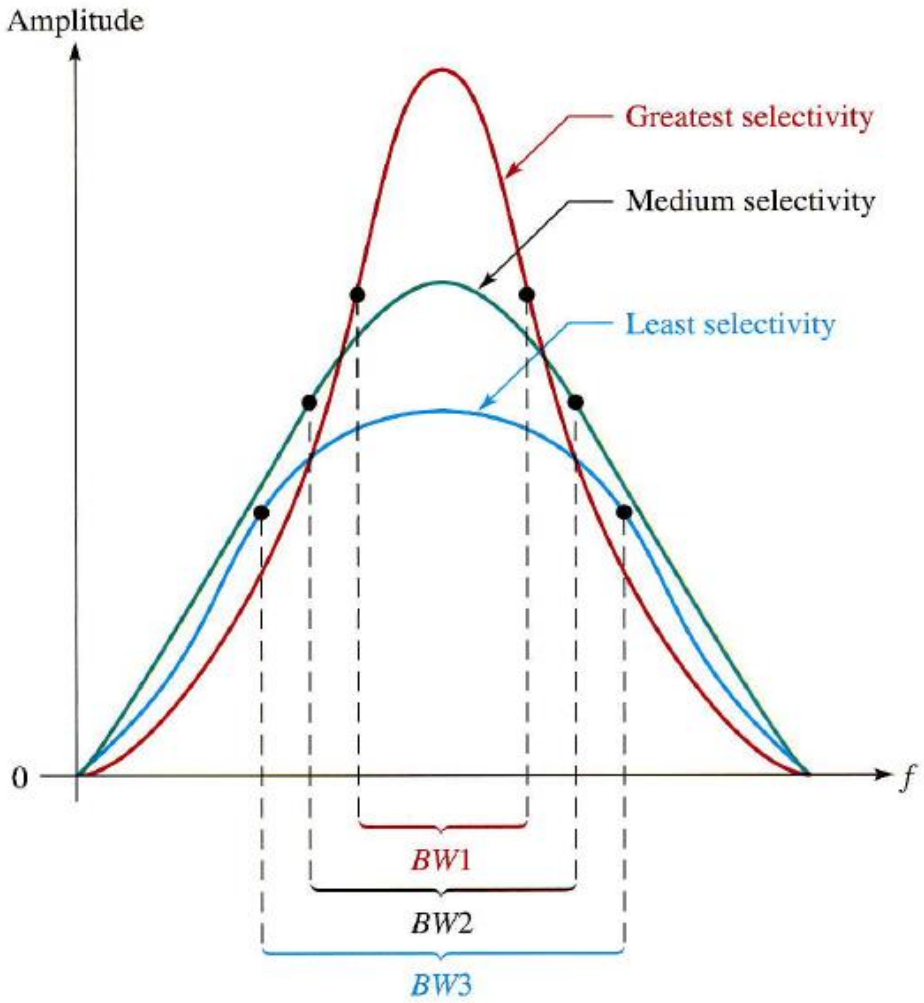
$$BW = f_2 - f_1 = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2 \cdot \pi} = \frac{R}{2 \cdot \pi \cdot L} [Hz]$$

من العلاقة الأخيرة ووفق تعريف عامل الجودة $Q = \frac{\omega_0 \cdot L}{R}$ يكون :

$$Q = \frac{\omega_0 \cdot L}{BW \cdot 2 \cdot \pi \cdot L} = \frac{\frac{\omega_0}{2 \cdot \pi} \cdot L}{BW \cdot L} = \frac{f_0}{BW} = \frac{f_0}{f_2 - f_1}$$

أو بدلالة ω :

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$$



المسافة بين الترددين f_1 و f_2 تدل على انتقائية الدارة (قدرة انتخابها) Selectivity.

يظهر من الشكل أنه كلما زادت قيمة عامل الجودة Q كلما زادت انتقائية الدارة، وكلما كان عرض النطاق الترددي أصغر. فانتقائية دارة RLC التسلسلية تعبر عن قدرة الدارة على الاستجابة لتردد معين، وتمييزه عن جميع الترددات الأخرى. فإذا أردنا أن يكون عرض نطاق الترددات المراد تحديدها أو رفضها ضيقاً، فيجب أن يكون عامل الجودة لدارة الطنين عالي القيمة، وبالعكس إذا أردنا أن يكون عرض النطاق عريضاً ، فيجب أن يكون عامل الجودة منخفضاً.

$$\omega_1 = \frac{-R}{2L} + \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 + \frac{1}{L \cdot C}} \quad ، \quad \omega_2 = \frac{R}{2L} + \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 + \frac{1}{L \cdot C}}$$

بضرب العلاقتين

مع بعضهما نجد:

$$\omega_1 \cdot \omega_2 = \frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{L \cdot C} - \frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{L \cdot C} = \omega_0^2$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2}$$

تردد الطنين هو المتوسط الهندسي لترددات نصف الطاقة.

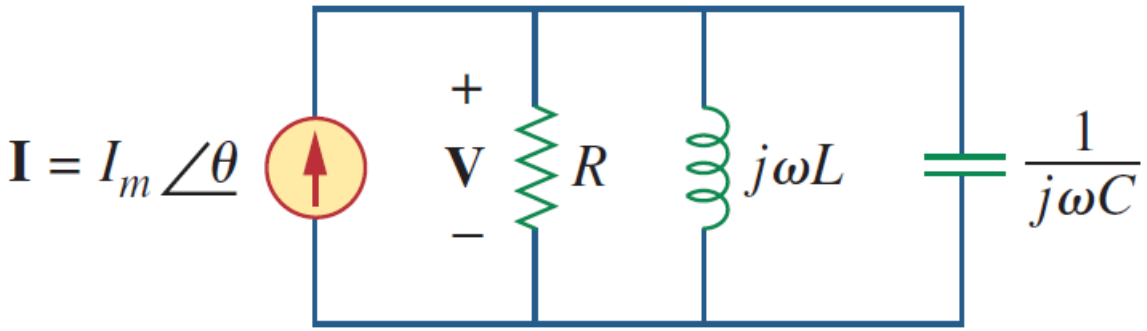
نقول عن عامل الجودة أنه عالي إذا تجاوزت قيمته 10، ونعتمد العلاقتين التاليتين في حساب $\omega 1$ و $\omega 2$

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{\mathrm{BW[rad/s]}}{2}$$

$$\omega_2 = \omega_0 + \frac{\mathrm{BW[rad/s]}}{2}$$

الطنين التفرعي(طنين التيار) :

Parallel (Current) Resonance



لتكن لدينا دارة كهربائية مؤلفة من مقاومة أومية R وملف تحريضه الذاتي L ومكثّف سعته C بوصل تفرعي، كما في الشكل.

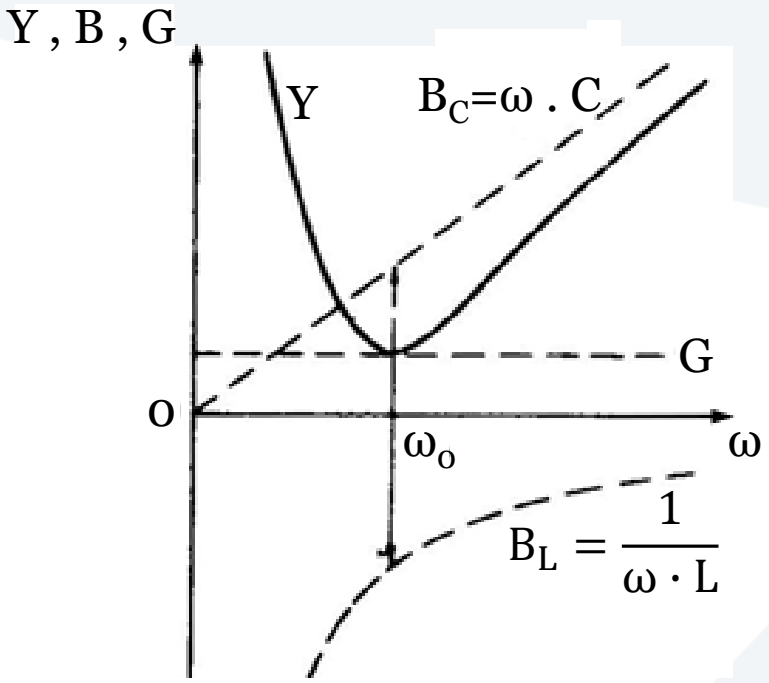
السماحية (المسايرة) الكلية المكافئة للدارة:

$$\mathbf{Y} = H(\omega) = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}} = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{Y} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)$$

عندما تكون الدارة في حالة طنين فإن القسم التخيلي للسماحية يكون معدوماً:

$$\mathrm{B} = 0 \Rightarrow \omega_0 \mathrm{C} - \frac{1}{\omega_0 \mathrm{L}} = 0 \Rightarrow \omega_0 \mathrm{C} = \frac{1}{\omega_0 \mathrm{L}}$$

$$\Rightarrow \omega_0^2 \cdot \mathrm{L} \cdot \mathrm{C} = 1 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{L} \cdot \mathrm{C}}}\ \mathrm{rad/s}$$



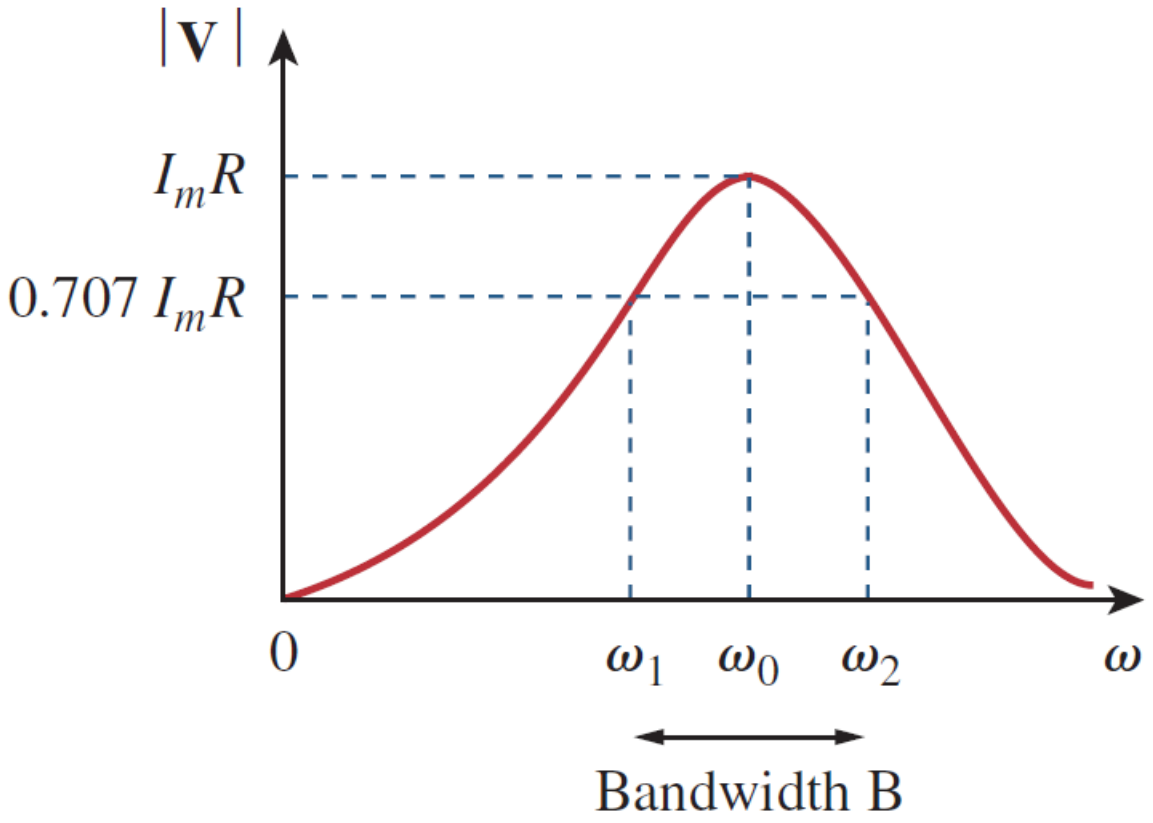
تابعية السماحية الكلية Y
وعناصرها للسرعة الزاويّة

يعطى تردد الطنين بالعلاقة:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = 2\pi \cdot f_0 \Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} [Hz]$$

عند سرعة زاويّة أصغر من ω_0 تكون القبولية التحريضية أكبر من القبولية السعوية، وعند سرعة زاويّة أكبر من ω_0 تصبح القبولية التحريضية أصغر من القبولية السعوية.

يبين الشكل علاقة الجهد كتابع للتردد.



$$\omega_1 = -\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{1}{RC}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{B} = \omega_0 RC = \frac{R}{\omega_0 L}$$

يمكن باستخدام العلاقات السابقة التعبير عن ترددات نصف الاستطاعة كعلاقة مع عامل الجودة، ويكون:

$$\omega_1 = \omega_0\sqrt{1+\left(\frac{1}{2Q}\right)^2} - \frac{\omega_0}{2Q}, \qquad \omega_2 = \omega_0\sqrt{1+\left(\frac{1}{2Q}\right)^2} + \frac{\omega_0}{2Q}$$

نقول عن عامل الجودة أنه عالي إذا تجاوزت قيمته 10، ونعتمد العلاقتين التاليتين في حساب $\omega 1$ و $\omega 2$

$$\omega_1 \approx \omega_0 - \frac{\mathrm{BW[rad/s]}}{2}$$

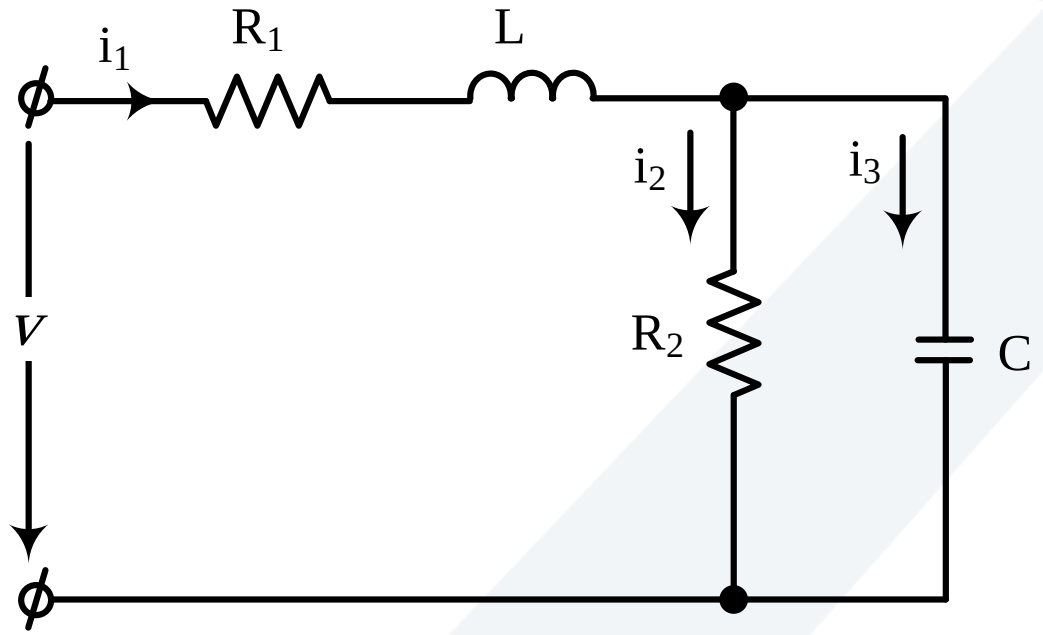
$$\omega_2 \approx \omega_0 + \frac{\mathrm{BW[rad/s]}}{2}$$

جَامعة المَنارة
MANARA UNIVERSITY

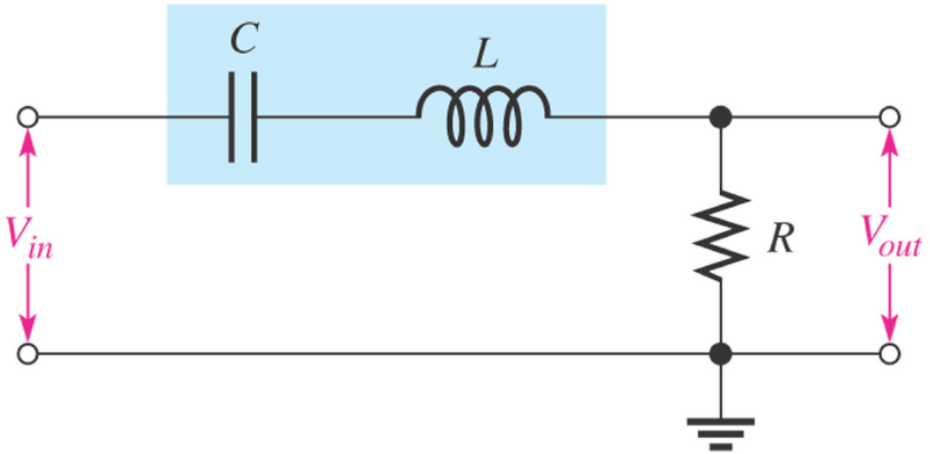
Summary of the characteristics of resonant *RLC* circuits.

Characteristic	Series circuit	Parallel circuit
Resonant frequency, ω_0	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$
Quality factor, Q	$\frac{\omega_0 L}{R}$ or $\frac{1}{\omega_0 RC}$	$\frac{R}{\omega_0 L}$ or $\omega_0 RC$
Bandwidth, B	$\frac{\omega_0}{Q}$	$\frac{\omega_0}{Q}$
Half-power frequencies, ω_1, ω_2	$\omega_0\sqrt{1+\left(\frac{1}{2Q}\right)^2} \pm \frac{\omega_0}{2Q}$	$\omega_0\sqrt{1+\left(\frac{1}{2Q}\right)^2} \pm \frac{\omega_0}{2Q}$
For $Q \geq 10$, ω_1, ω_2	$\omega_0 \pm \frac{B}{2}$	$\omega_0 \pm \frac{B}{2}$

لتكن لدينا الدارة الكهربائية المبينة بالشكل، والمؤلفة من ملف بارامتراته $R_1=4[\Omega]$, $L=796[\mu H]$، ومكثف سعته $C=39.8\ [\mu F]$ مربوط تفرعياً مع المقاومة R_2. فإذا علمت أن القيمة الفعالة لمنبع التغذية $V=36\ [V]$، المطلوب:



1. تحديد قيمة المقاومة R_2. التي توصل على التفرع مع المكثف C والتي تُدخل الدارة في حالة الطنين، وذلك من أجل تردد مقداره $f_o=800\ [Hz]$.
2. حساب قيمة الممانعة الكلية للدارة في حالة الطنين.
3. إيجاد قيم جميع التيارات المارة في أفرع الدارة.
4. رسم المخطط الشعاعي للتيارات.



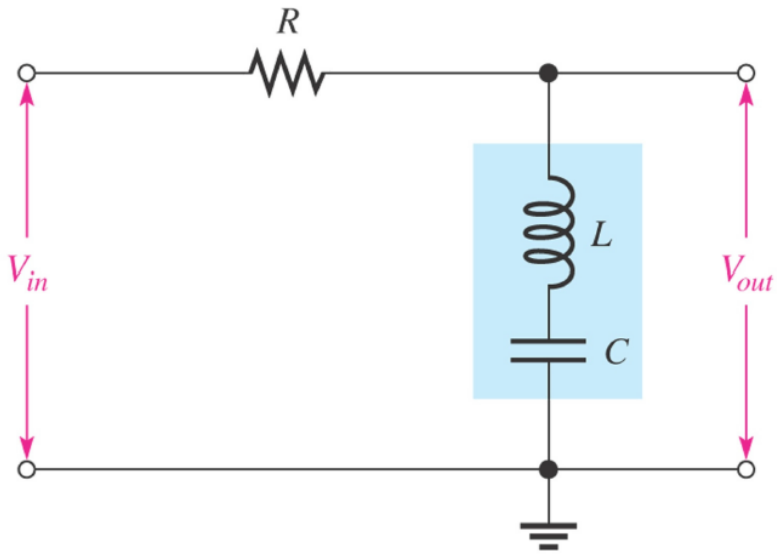
مرشح تمرير حزمة ترددات Band pass filter

نطبق إشارة الدخل V_{in} على طرفي الدارة التسلسلية، ونأخذ إشارة الخرج على طرفي المقاومة.

ينتج عمل هذا المرشح من سلوك مميزة ممانعته مع تغير التردد: ففي الترددات المنخفضة تكون الممانعة كبيرة جداً مما يحد من مرور التيار، وبزيادة التردد تنقص هذه الممانعة مما يؤدي إلى مرور كمية من التيار أكبر، وبالتالي يكون الجهد على طرفي المقاومة أكبر.

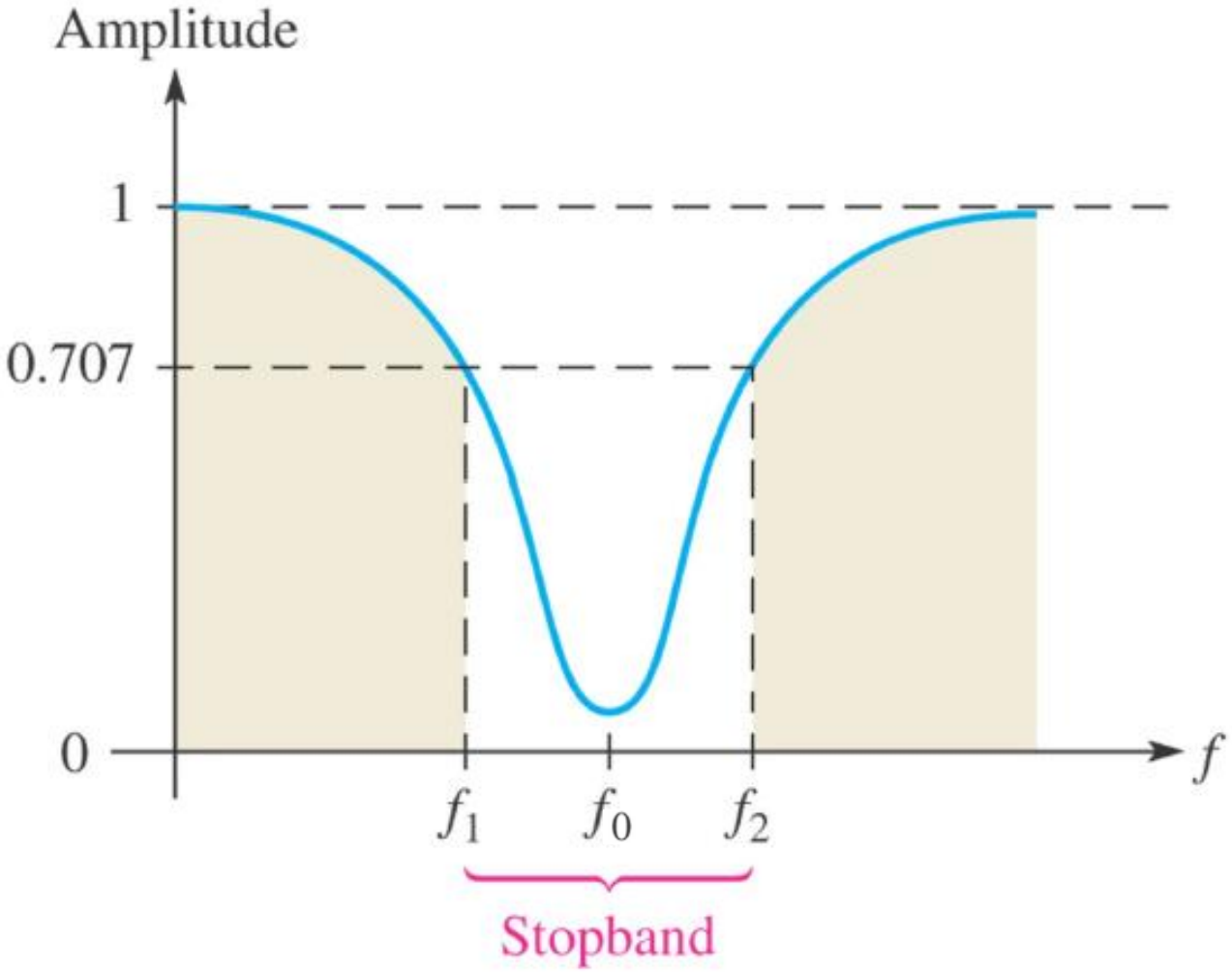
يصل جهد الخرج V_{out} إلى القيمة الأعظمية عند تردد الطنين، مع تيار أعظمي (ممانعة أصغرية).

وإذا تابعنا زيادة التردد فستزداد قيمة الممانعة من جديد لتمنع مرور التيار.



مرشح حذف حزمة ترددات Band elimination (stop) filter

نطبق إشارة الدخل V_{in} على طرفي الدارة التسلسلية، ونأخذ إشارة الخرج V_{out} على طرفي (الوشيعة+المكثف).
في الترددات المنخفضة جداً تكون الممانعة (للوشيعة+المكثف) كبيرة جداً بسبب كبر المفاعلة السعوية X_C، مما يسمح بمرور كامل التيار تقريباً. وبزيادة التردد تنقص قيمة هذه الممانعة لتصبح معدومة (نظرياً) عند تردد الطنين، مما يؤدي إلى حدوث دارة قصر لإشارة الخرج، وبالتالي يكون جهد الخرج معدوماً أو صغيراً جداً. إذا تابعنا زيادة التردد تزداد قيمة الممانعة من جديد (للوشيعة+المكثف)، وبالتالي تزداد قيمة إشارة الخرج.



لا يسمح هذا المرشح بمرور الإشارات ذات الترددات الواقعة بين f_1 و f_2 كما هو مبين بالشكل.