د.نزار عبد الرحمن

عزم القصور الذاتي (عزم العطالة)

الخصائص الهندسة للمقاطع

تتضمن الخصائص الهندسية للمقاطع :

- حساب عزوم العطالة للمقاطع
- تحديد احداثيات مركز ثقل الشكل C (Zc , Yc)

عزوم العطالة لبعض المقاطع الشهيرة

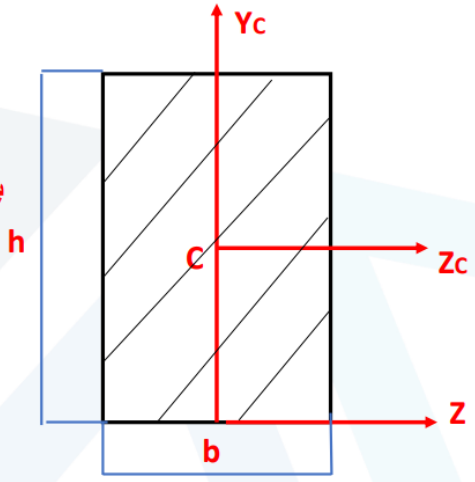
تنشيط Windows

عزوم العطالة للمقطع على شكل مستطيل

$$I_{ZC} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{YC} = \frac{hb^3}{12}$$

عزم عطالة مستطيل
بالنسبة لمحور مار من مركز ثقله



تنشيط Windows

ملاحظة هامة

لحساب عزم عطالة المستطيل بالنسبة لمحور لا يمر من مركز ثقله نستخدم نظرية شتاينر

نظرية شتاينر

عزم عطالة مقطع بالنسبة لمحور لا يمر من مركز ثقله يساوي إلى عزم عطالة هذا المقطع بالنسبة لمحور مار من مركز ثقله ويوازي المحور السابق مضافاً إليه مساحة هذا الشكل مضروبة بمربع البعد بين المحورين

$$I_Z = I_{ZC} + Aa^2$$

- I_Z: عزم عطالة المستطيل بالنسبة للمحور Z
- I_{ZC}: عزم عطالة المستطيل بالنسبة لمحور مار من مركز ثقله ZC
- A: مساحة المستطيل
- a: مربع البعد بين المحورين Z, Zc

$$I_Z = I_{ZC} + Aa^2$$

$$I_Z = \frac{bh^3}{12} + bh\left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$I_Z = \frac{bh^3}{3}$$

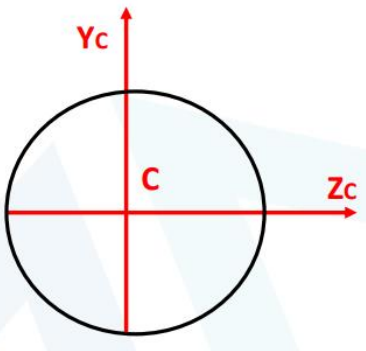
عزوم العطالة للمقطع على شكل دائرة

$$I_{ZC} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4}$$

$$I_{YC} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4}$$

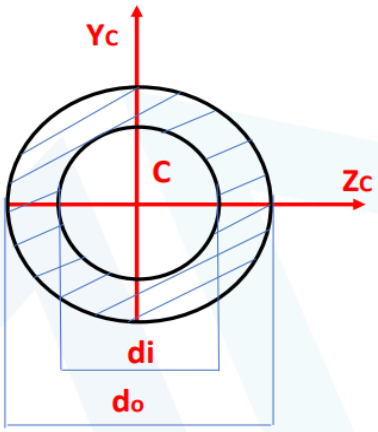
d قطر الدائرة

r نصف قطر الدائرة



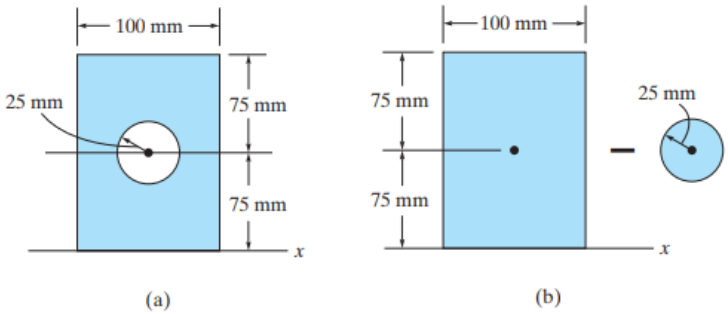
عزوم العطاله للمقطع على
شكل دائرة مفرغة (الحلقة)

$$I_{ZC} = I_{YC} = \frac{\pi[d_o{}^4 - d_i{}^4]}{64}$$



المساحات المركبة : عزم العطالة لمساحة مؤلفة من مجموعة من الأشكال ذات مساحات جزئية (دائرة ، مثلث، مربع) يساوي إلى المجموع الجبري لعزوم العطالة لكل شكل .

مسألة (1) : احسب عزم العطالة للشكل المؤلف من مستطيل ودائرة مفرغة . حول المحور x .



باستخدام نظرية المحاور المتوازية نحسب عزم العطالة لمساحة المستطيل ونطرح منه عزم العطالة للدائرة.

من أجل الدائرة يكون عزم العطالة :

$$I_x = \frac{1}{4}\,\pi . r^4$$

عزم العطالة من أجل المستطيل :

$$I_x = \frac{1}{12}\,b . d^3$$

- الدائرة :

$$I_x = \bar{I}_{x'} + A d_y^2$$

$$= \frac{1}{4}\pi(25)^4 + \pi(25)^2(75)^2 = 11.4(10^6)\ \text{mm}^4$$

المستطيل :

$$I_x = \bar{I}_{x'} + A d_y^2$$

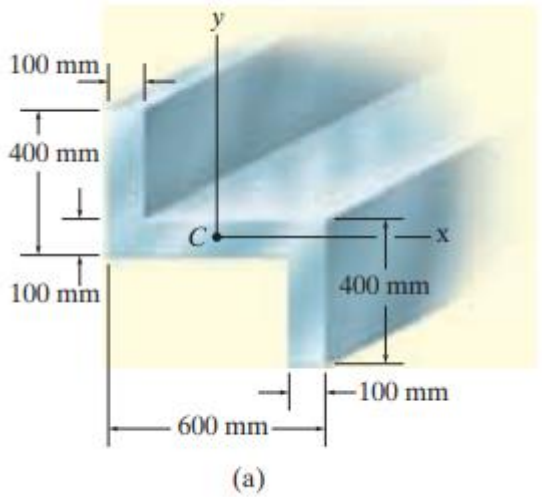
$$= \frac{1}{12}(100)(150)^3 + (100)(150)(75)^2 = 112.5(10^6)\ \text{mm}^4$$

المجموع :

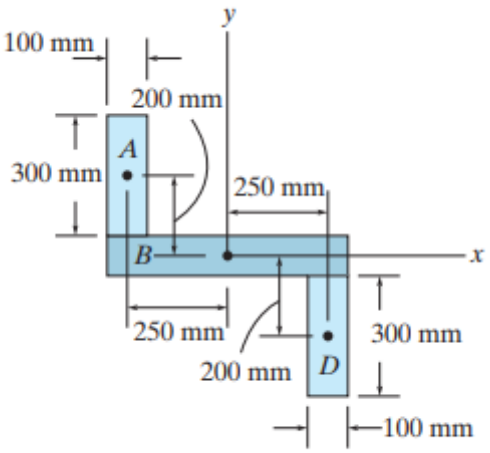
$$I_x = -11.4(10^6) + 112.5(10^6)$$

$$= 101(10^6)\ \text{mm}^4$$

مسألة (2): احسب عزم العطالة للمساحة المبينة في الشكل حول المحورين x وy.



(a)



(b)

الحل :

الأجزاء المركبة : يمكن تقسيم المقطع العرضي إلى ثلاثة مستطيلات A، Bو C.

مركزهذه المستطيلات مبيّن في الشكل .

نظرية المحاورالمتوازية :

عزم العطالة للمستطيل حول محوريمربمركزالثقل

$$I = \frac{1}{12}\, b.d^3$$

المستطيلين Aو D :

$$I_x = \bar{I}_{x'} + A d_y^2 = \frac{1}{12}(100)(300)^3 + (100)(300)(200)^2$$
$$= 1.425(10^9)\ \text{mm}^4$$
$$I_y = \bar{I}_{y'} + A d_x^2 = \frac{1}{12}(300)(100)^3 + (100)(300)(250)^2$$
$$= 1.90(10^9)\ \text{mm}^4$$

المستطيل B:

$$I_x = \frac{1}{12}(600)(100)^3 = 0.05(10^9)\ \text{mm}^4$$
$$I_y = \frac{1}{12}(100)(600)^3 = 1.80(10^9)\ \text{mm}^4$$

المجموع:

$$I_x = 2[1.425(10^9)] + 0.05(10^9)$$
$$= 2.90(10^9)\ \text{mm}^4$$
$$I_y = 2[1.90(10^9)] + 1.80(10^9)$$
$$= 5.60(10^9)\ \text{mm}^4$$

الاجهادات في العتبات

من أجل استنتاج معادلة الاجهادات في العتبات نفرض مايلي :

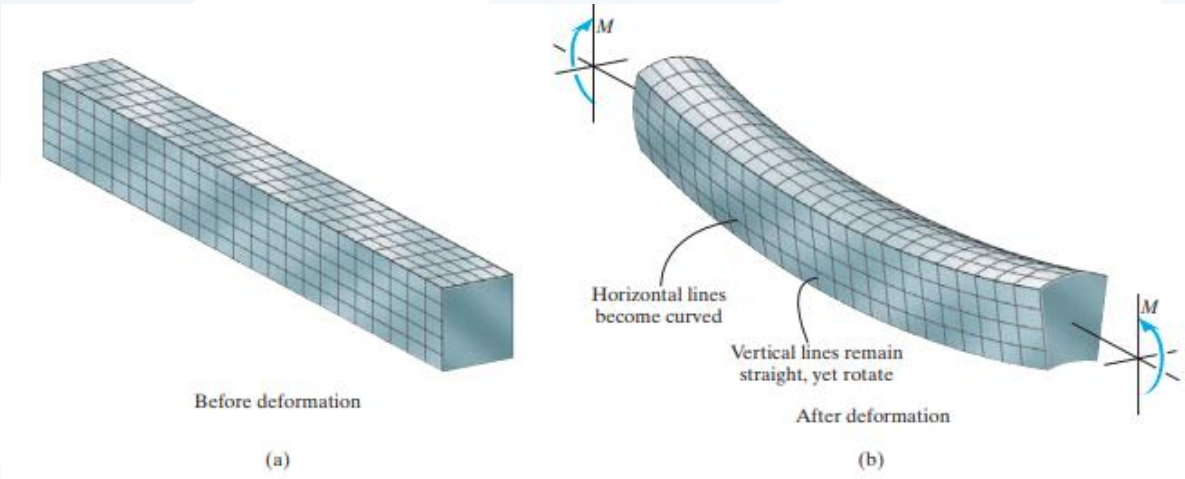
1- المقاطع المستوية في العتبة والتي هي في الأصل مستوية تبقى مستوية.

2- تكون مادة العينة متجانسة وتخضع لقانون هوك .

3- معاملا المرونة في الشد والضغط متساويين .

4- تكون العتبة في البداية مستقيمة وذات مقطع عرضي ثابت .

5- يجب أن يحتوي مستوى التحميل على محوررئيسي للمقطع العرضي للعتبة ،وكذلك يجب أن تكون الأحمال عمودية على المحورالطولي للعتبة



تعطى معادلة الاجهاد الأعظمي في العتبات عن طريق العلاقة التالية :

$$\sigma_{max} = \frac{M.C}{I_{N.A}} \quad (1)$$

حيث :

-M عزم الانحناء المطبّق .

C- المسافة من المحور الحيادي إلى أبعد ليف موجود في منطقة الضغط أو الشد .

$I_{N.A}$- عزم العطالة للمساحة حول محور التعادل .

وبالتبادل مع العلاقة (1) يمكننا استخدم العلاقة التالية التي تستخدم عندما يراد حساب الاجهاد في أي منطقة من مقطع العتبة .

$$\sigma = \frac{M.y}{I_{N.A}} \quad (2)$$

حيث y المسافة من المحور الحيادي إلى النقطة المراد حساب الاجهاد عندها في منطقة الضغط أو منطقة الشد .

كيف نحسب العزم :

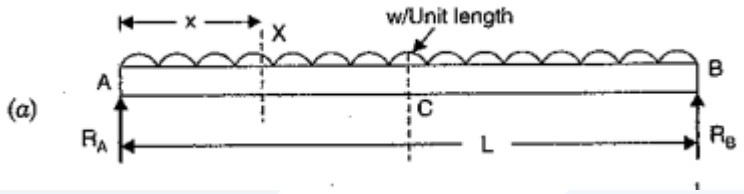
1- إما أن يكون معطى في نص المسألة .

2- أو يتم حساب قيمة العزم :إمّا من مخطط عزم الانحناء (في حالة حساب الاجهاد الأعظمي ، أو من خلال اجراء مقطع في العتبة وذلك عندما يطلب إيجاد قيمة العزم عند مسافة معينة)

تعريف العزم الموجب : هو العزم الذي يسبب إجهادات ضغط في أعلى العتبة وإجهادات شد في الأسفل .

المحور الحيادي (محور التعادل) : هو المحور الذي يتساوى عنده اجهادات الضغط مع اجهادات الشد .

مسألة (3): عتبة طولها 10 متر، محمّلة بحمولة موزعة w = 1000N/m، ذات مقطع دائري بقطر D=120mm، احسب اجهاد الانحناء الأعظمي .



$$\sigma_{max} = \frac{M.C}{I} \quad (1)$$

يعطى عزم الانحناء بالنسبة للعتبة بحمولة موزعة على كامل طولها وذات استناد بسيط (مفاصل ثابتة أو متحركة) بالعلاقة :

عزم الانحناء للعتبة المفروضة:

$$M = \frac{WL^2}{8} = \frac{1000(10)^2}{8} = 12.5 \times 10$$

$$= 12.5X10^3[N.m] = 12.5 \times 10^6[N.mm]$$

عزم العطالة بالنسبة للمقطع الدائري حول محوريمر بالمركز:

$$I = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi(60)^4}{4} = 10.18 \times 10^6\ [mm^4]$$

حساب المسافة C: $$C = \frac{D}{2} = 60\ [mm]$$

نعوض في المعادلة (1):

$$\sigma_{max} = \frac{M.C}{I} = \frac{125\times10^6}{10.18\times10^6}.60 = 73.68[N/m^2$$

مسألة (4) : احسب اجهاد الانحناء الأعظمي المتشكل في عتبة ذات مقطع مستطيل 50X150mm ، عند تطبيق عزم انحناء مقداره 600N.M حول المحور x-x.

$$\sigma_{max} = \frac{M.C}{I}$$

M= 600[N.M]

عزم العطالة حول المحورX-X

$$I_{X-X} = \frac{bd^3}{12} = \frac{50(150)^3}{12} = 14.06 \times 10^3 [mm^4]$$

C - المسافة من محورالتعادل إلى الطبقة العليا من العتبة ذات الاجهاد الأعظمي

$$C = \frac{D}{2} = 75[mm].$$

بالتعويض :

$$\sigma_{max} = \frac{M.C}{I} = \frac{600\times75}{14.06\times10^3} = 3.2[N/mm^2]$$

مسألة (5) : عتبة ذات مقطع عرضي مستطيل بعرض120 mmوعمق 300 mm.

ماهو مقدارالحمولة الموزعة التي من الممكن أن تتحملها العتبة إذا كان إجهاد الانحناء لا يتجاوز120 MPa.

$$\sigma_{max} = \frac{M.C}{I} \quad (1)$$

عزم الانحناء بالنسبة للعتبة ذات الحمولة الموزعة والاستناد البسيط يعطى بالعلاقة :

$$M = \frac{WL^2}{8} = \frac{W(4)^2}{8} = 2KN.m = 2 \times 10^3 W[\,KN.mm]$$
$$= 2 \times 10^6 W[\,N.mm]$$

عزم العطالة للمقطع المستطيل

$$I_{X-X} = \frac{bd^3}{12} = \frac{(120)(300^3)}{12} = 27X10^7[mm^4]$$

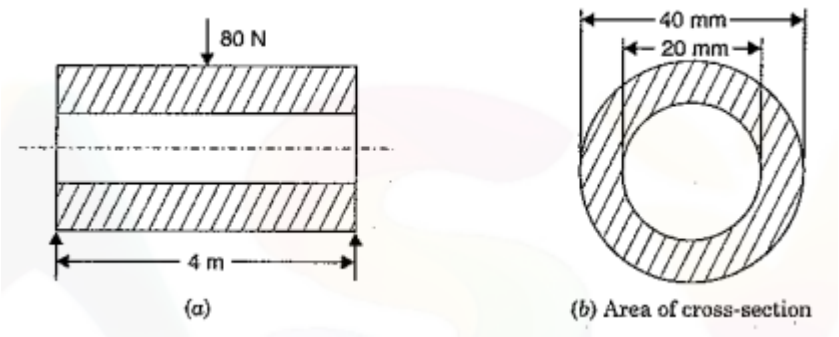
$$C = \frac{d}{2} = \frac{300}{2} = 150[\text{mm}]$$

نعوض في المعادلة (1) :

$$\sigma_{max} = \frac{M.C}{I} = \frac{2w \times 10^6}{27 \times 10^7}.150 = 120$$

W= 108[N/mm]

مسألة (6): احسب الاجهاد الأعظمي المتولد في انبوب من حديد الصب إذا كان :



- القطر الخارجي D=40mm - القطر الداخلي d=20mm

-طول الانبوب 4 mومعرض لحمولة مقدارها 80 N مركّزة في المنتصف .

$$\sigma_{max} = \frac{M.C}{I} \quad (1)$$

يعطى عزم الانحناء الأعظمي للعتبة المبينة في الشكل وفق العلاقة :

$$\mathrm{M} = \frac{W.L}{4} = \frac{(8)(4000)}{4} = 8 \times 10^4 N.mm$$

-- عزم العطالة للمقطع: $I = \frac{\pi}{64}(D^4 - d)^4$

$$= \frac{\pi}{64}(\,256.000 - 160.000) = 117809.7mm^4$$

- المسافة C: $C = \frac{D}{2} = \frac{40}{2} = 20mm$

-نعوض في المعادلة (1) :

$$\sigma_{max} = \frac{M.C}{I} = \frac{8 \times 10^4}{11789.7} = 13.56N/mm^2$$