كلية ادارة الاعمال

احصاء 2 Statistics

مدخل الى نظرية العينات

للعام 2023-2024

الدكتور محمود محمد ديب طيوب

محاضرة رقم 8

المعاينة

Sampling or Echantillonnage

مقدمة :

من أهم المشكلات التي تواجه الباحث عند إجراء أي بحث هو تحديد نطاق العمل وعلى الرغم من أن لكل بحث ظروفه التي تحدد نطاقه ومستلزماته إلا أنه من الواضح أنه كلما زاد عدد المفردات التي يشملها البحث كلما أصبحت النتائج التي يتوصل إليها الباحث مستندة إلى أساس قوي. إلا أن ذلك أحياناً يتطلب جهوداً وإمكانيات أكبر إضافةً لإجراء العديد من التجارب.

إن هذه المعضلات تجعل الأنظار تتوجه نحو إجراء البحوث والتجارب على عدد محدود من المفردات . (أي أن الدراسة الميدانية يمكن أن تجري بالعينة التي تسحب من المجتمع الإحصائي بحيث تكون ممثلة تمثيلاً صادقاً لصفات هذا المجتمع. إن مثل هذه الدراسات لا تجرى من أجل التعرف على صفات وحدات العينة فقط وإنما للاستدلال على المقاييس والمؤشرات المختلفة للمجتمع الذي سحبت منه هذه العينة.

المشكلة التي يواجهها الباحث عند الأخذ بأسلوب العينات هي تحديد حجم العينة المرغوب سحبها وهذا يتعلق بعدة عوامل أهمها: الإمكانيات المادية المخصصة لذلك ـ مقدار الثقة التي يرغب الباحث الحصول عليها وفي الحقيقة فإن هناك علاقة عكسية بين الأخطاء الاحتمالية وبين حجم العينة، بمعنى آخر، كلما ازداد حجم العينة نقصت الأخطاء الاحتمالية والعكس بالعكس. إلا أنه كلما ازداد حجم العينة المطلوبة كلما ازدادت الإمكانيات والمستلزمات الضرورية لإجراء البحث. وبالتالي ازداد مقدار الثقة التي يمكن وضعها في نتائجها.

نظرية العينات بالتعريف: مجموعة الطرق الرياضية والتنظيمية التي تساعد على إجراء البحوث الإحصائية غير الشاملة وذلك بهدف إيجاد الخصائص العامة للظاهرة المدروسة عن طريق تصميم النتائج المستخلصة من هذه البحوث عن الموضوع ككل.

ـ فوائد نظرية العينات:

1 ـ تختصر كثيراً من الوقت والجهد والتكاليف لعمليات البحث.

2 ـ تمكن من الحصول على معلومات إحصائية مميزة لوحدات الموضوع المدروس.

3 ـ تفيد في تصحيح معلومات البحث الشامل عندما تكون نسبة الأخطاء فيها كبيرة ما تفيد في معرفة الدقة المتوفرة في معلومات هذا البحث.

4 ـ تعتبر في بعض الحالات هي الطريقة الوحيدة أو الرئيسية التي يمكن استخدامها وذلك لتعذر أو استحالة المسح الشامل.

5 ـ العينات هي الأسلوب الوحيد لدراسة بعض خواص الموضوعات الهامة مثال (ملوحة البحر، كريات الدم . . .الخ).

ـ الخطوات الرئيسية لتصميم العينة:

1 ـ تحديد المشكلة والهدف المرجو من الدراسة.

2 ـ تعريف وتحديد المجتمع المراد دراسته.

3 ـ تحديد المعلومات المطلوب الحصول عليها.

4 ـ تحديد طرق جمع البيانات.

5 ـ تحديد الإطار وحجم العينة وتكاليفها.

6 ـ إجراء اختبار سريع وأولي عند بعض القضايا الهامة لإدخالها في موضوع الدراسة.

7 ـ تلخيص وتحليل البيانات.

8 ـ تقدير المؤشرات الإحصائية المطلوبة للمجتمع استناداً على العينة

أنواع العينات

2 ـ العينات العشوائية المنتظمة systematics Sampling

يتلائم هذا النوع من المعاينة مع الدراسات التي تنصب على المجتمعات المتجانسة والتي تنتمي مفرداتها إلى نوعية واحدة والمبدأ العام يكمن في تحديد ما يسمى بوحدة الابتداء ومن ثم السحب على مسافة منتظمة تسمى فترة السحب.

مثال:

إذا كان لدينا مجتمعاً مؤلفاً من 5000 فرداً نريد سحب عينة منتظمة بحجم 100 فرد. فيكون لدينا السحب $= \frac{5000}{100}=50$ فرداً ومن بعد ذلك نحدد وحدة الابتداء ولنفرض أن المجتمع N ترقم أفراده من الرقم 1 حتى رقم N وعلينا في هذه الحالة أن نحدد بشكلٍ عشوائي وحدة الابتداء من مجموعة الأعداد التي تقع من 1 إلى 50 وبإضافة مقدار التمثيل بطريقة منتظمة إلى الرقم الأول على النحو التالي:

وليكن رقم وحدة الامتداد 14 السحب وفق التالي:

المفردة الأولى المفردة الثانية وهكذا

64= 14+50 الثالثة 114 والرابعة 164 . . .الخ.

وبصفةٍ عامة فإذا كان الرقم المختار عشوائياً x وأن كل مفردة من مفردات العينة تمثل عدداً أو مقداراً K من مفردات المجتمع فإن:

x = المفردة الأولى.

$x+K=$ المفردة الثانية.

$x+2.K =$ المفردة الثالثة.

أما المفردة التي ترتيبها n تحمل الرقم $[x+(n-1)(K)]$ أي مثلاً:

المفردة التي ترتيبها 8 تحمل الرقم $14+(8-1)(50)=364$.

أما المفردة التي ترتيبها 100 تحمل الرقم $14+(100-1)(50)=4964$

مزايا هذه الطريقة:

تتميز هذه الطريقة بالسهولة واختصار الوقت والتكاليف. وتتصف بملائمتها مع الدراسات الاجتماعية التي تتعلق بالسكان من حيث توزع الدخول أو استطلاع الرأي حول طريقة مثلاً جديدة لتحديد النسل لكن خطورة هذه الطريقة تكمن في الاختيار العشوائي لوحدة الابتداء خاصةً إذا ما ظهر للباحث أن هذا الرقم له وضع خاص.

2 ـ العينة العشوائية الطبقية Echantillonne Stratifie:

يتلائم هذا النوع من المعاينة مع الدراسات الخاصة بالمجتمعات غير المتجانسة والتي يمكن تقسيمها من الداخل إلى مجموعات كل مجموعة تتصف بدرجة عالية من التجانس الداخلي، والمبدأ العام للمعاينة الطبقية تقوم على أساس تقسيم المجتمع المدروس إلى طبقات متجانسة داخلياً. وتجري المعاينة داخل كل طبقة بطريقة المعاينة العشوائية البسيطة. أما عدد الوحدات المطلوب سحبها من كل طبقة تتم على النحو التالي:

$$\text{الجزء من الطبقة} = \text{حجم العينة المطلوب} \times \frac{\text{حجم الطبقة}}{\text{حجم المجتمع الأصلي}}$$

مثال : إذا فرضنا أن حجم المجتمع الأصلي يساوي10000 وحدة ويقسم إلى أربع طبقات A, B, C, D وحجم هذه الطبقات على الترتيب 1000، 4000، 2000، 3000، وإذا أردنا سحب عينة حجمها 1000 مفردة من هذا المجتمع فإن:

من الطبقة الأولى: وحدة $N_A \geq 1000 \times \frac{1000}{10000} = 100$

من الطبقة الثانية: وحدة $N_B \geq 1000 \times \frac{4000}{10000} = 400$

وحدة $N_C \geq 1000 \times \frac{2000}{10000} = 200$

وحدة $N_D \geq 1000 \times \frac{3000}{10000} = 300$

وبهذا يكون حجم العينة المسحوبة من المجتمع الأصلي تساوي 100 وحدة. هذا النوع من المعاينة يسمح إلى درجة كبيرة بدراسة المجتمعات على حسب درجة تجانسها مما يؤدي إلى تقليل الأخطاء عند تعميم نتائج العينة على كل المجتمع وتقدير بعض خصائص المجتمع من هذه العينة وتقليل إلى حد كبير التباين في المقاييس والمؤشرات الإحصائية المستمدة من هذه العينات.

توزيعات المعاينة Sampling Distributions:

لنفرض أن مجتمعاً إحصائياً محدوداً Y. فالوسط الحسابي والتباين لهذا المجتمع يجري حسابهما وفق الصيغتين التاليتين:

$$\bar{Y} = \frac{\Sigma y_i}{N} \quad \text{او} \quad \bar{X} = \frac{\sum X}{N}$$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma (y_i - \bar{Y})^2}{N} \quad \text{او} \quad \sigma^2 = \frac{\sum \left(X - \bar{X} \right)^2}{N}$$

حيث أن N تشير إلى عدد مفردات المجتمع.

من هذا يمكننا أن نحسب مجموعة من العينات يتوقف عددها على حجم المجتمع N وعلى حجم العينة المسحوب n وعلى أسلوب سحب العينة أي هل هو مع الإعادة أو بدون إعادة. ولكل عينة يمكننا أن نحدد مؤشراتها كالوسط الحسابي والتباين مثلاً. وبذلك نحصل على عدة متوسطات حسابية وعدة تباينات تعرف باسم مجتمع الأوساط الحسابية أو مجتمع التباينات للعينات المسحوبة.

إن توزع هذه الأوساط وهذه التباينات يسمى توزيعات المعاينة. إن مؤشرات توزيع العينة وتوزيعات المعاينة فهي تتأثر بأسلوب السحب وعليه يمكن تمييز حالتين:

السحب مع الإعادة السحب بدون الإعادة	$$M = \begin{cases} C^{n}_{N+n-1} \\ C^{n}_{N1} \end{cases}$$

M عدد العينات:

إذ أن: التوافيق من طرق العد

$$C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

وبما أن كل عينة يعطينا تقديراً للمؤشر المدروس فإنه يمكننا القول أنه يوجد لدينا تقديراً لكل مؤشر من مؤشرات المجتمع. وبالتالي يمكننا اعتبار أي تقدير من التقديرات الممكنة متحولاً عشوائياً خاضع لتوزيع احتمالي معين وتختلف من تقدير لآخر.

الخواص الإحصائية للمقدرات : معايير جودة التقدير:

تستخدم هذه الخواص لتقرير جودة التقدير و هذه الخواص هي:

- **عدم التحيز: نقول** عن التقدير $\hat{\theta}$ أنه تقدير غير متحيز إذا كان توقعه الرياضي مساوياً المؤشر المطلوب تقديره θ:

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{\sum X_i}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum E(X) = \frac{\cancel{n}\mu}{\cancel{n}} = \mu$$

هذا يعني مثلاً: الوسط الحسابي للعينة هو تقدير غير متحيز للوسط الحسابي للمجتمع وأن تقدير غير متحيز لتباين المجتمع σ^2 أي أن التوقع $E(\hat{\theta})$ مأخوذ على جميع العينات الممكنة.

- **التماسك: نقول** عن التقدير $\hat{\theta}$ أنه تقدير متماسك للمؤشر θ إذا كانت قيم $\hat{\theta}$ تنتهي احتمالياً إلى θ عندما تنتهي n إلى $N(\infty)$ أي أن:

$$P(\hat{\theta}\xrightarrow[n\to N]{}\theta)=1$$

ويتعلق هذا المعيار بالصيغة الرياضية التي ستستخدم في حساب $\hat{\theta}$.

$$\lim_{n\to\infty} pr(|\hat{\Theta}-\Theta| \succ \varepsilon) = 0, \varepsilon \rangle 0$$

الفعالية: تقول عن التقدير $\hat{\theta}$ أنه تقدير فعال للمؤشر θ إذا كان التباين الناتج عنه أصغر من جميع التباينات الناتجة عن التقديرات الأخرى أي أن: $\sigma^2_{\hat{\theta}} = Min[\sigma^2_{\hat{\theta}_K}]$

أي أن:

$$\sigma^2_{\hat{\theta}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(E(\hat{\theta}-\theta)\right)^2}{M} = \text{minimum}$$

ـ الكفاية تقول عن التقديرات $\hat{\theta}$ أنه تقدير كاف للمؤشر θ إذا استخدم جميع المعلومات التي توفرها العينة عن المؤشر ويعتبر أفضل المقدرات لأنه يستخدم جميع بيانات العينة.

التقدير النقطي لمؤشرات المجتمع:

يعني إمكانية تمثيل العدد الوحيد الذي يمثل التقدير بنقطة واحدة على محور موجه وفي هذه الحالة تستخدم المعلومات المتوفرة في عينة حجمها n للوصول إلى عدد واحد أو نقطة تكون تقديراً للوسيط المراد تقديره

وتجدر الإشارة إلى أمثالاً نستطيع تقييم جودة طريقة في التقدير على أساس تقدير واحد إذ لا بد من مراقبة النتائج عند تطبيق الطريقة بصورة متكررة عدداً كبيراً من المرات، وعندئذٍ نلاحظ مدى تمركز النقاط حول نقطة ما

وبما أن التقديرات هي أعداداً فيمكن تقييم جودة المقدار بإقامة توزيع تكراري للتقديرات التي نحصل عليها من عينات متكررة ونلاحظ مدى قرب مركز ذا التوزيع من قيمة الوسيط أو مدى تمركز هذا التوزيع حول قيمة الوسيط.

وسنتحدث باختصار عن أهم التقديرات الممكنة لمؤشرات المجتمع المطلوبة وهي:

1 **ـ تقدير متوسط خاصة في مجتمع:**

إن الوسط الحسابي للعينة هو تقدير غير متحيز للوسط الحسابي للمجتمع $\bar{Y}$ الذي سحبت منه العينة سواءً كان السحب مع الإعادة أو بدون إعادة نظراً لأن التوقع الرياضي لهذا المؤشر يساوي الوسط الحسابي للمجتمع:

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{N}$$

إذ أن هي قيم خاصة في المجتمع وهي مقادير مجهولة كما أن متوسطها $\bar{Y}$ مجهول ولإيجاد تقدير لـ $\bar{Y}$ تستخدم الوسط الحسابي للعينة $\bar{x}$ أي:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

إذ أن قيم نفس الخاصة في العينة ذات الحجم n وبالتالي يكون التقدير يساوي:

$$\overline{\overline{Y}} = \overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

وهذا التقدير غير متحيز بحسب تعريف عدم التحيز لأن التوقع الرياضي يساوي:

$$E(\overline{X}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} y_i = \overline{Y}$$

وهو تقدير متماسك لأنه يساوي:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \xrightarrow[n \to N]{} \frac{\Sigma y_i}{N} = \overline{Y}$$

وهو تقدير فعال لأن بحسب خواص التباين. أي تباين القياسات عن وسطها الحسابي أصغر من تباينها عن أي قيمة أخرى. وبما أنه يستخدم جميع معلومات العينة فهو إذن تقدير كاف.

2- تقدير تباين المجتمع:

يعرف تباين المجتمع الإحصائي بالعلاقة التالية:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \overline{Y})$$

ويمكن استخدام تباين العينة كمقدار لتباين المجتمع:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})$$

وحتى يكون هذا التقدير غير متحيز يجب أن يكون: $E(\overline{S}) = \sigma^2$

أي نثبت ذلك بإضافة وبطرح ثابت يساوي $\overline{x}$ إلى التباين العينة ومن ثم يحسب التوقع الرياضي لهذا التباين:

$$E(D^2) = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2\right]$$

$$E(D^2) = E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}) - (\overline{X} - \overline{Y})^2\right]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i - \overline{Y})^2 - 2(x_i - \overline{Y})(x_i - \overline{Y}) + (x_i - \overline{Y})^2\right]$$

وبملاحظة أن:

ونجد أن $E(x_i-\bar{Y})(x_i-\bar{Y})=(\bar{X}i-\bar{Y})(\Sigma X-n\bar{Y})=n(\bar{X}i-\bar{Y})^2$

$$E(D^2)=\frac{1}{n}E\left[\sum_{0i=1}^{n}(X-\bar{Y})-n(\bar{X}-\bar{Y})^2\right]$$

$$E(D^2)=\frac{1}{n}E\sum_{0i=1}^{n}(x_i-\bar{Y})^2-\frac{n}{2}E(\bar{X}-\bar{Y})^2$$

$$E(D^2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2-\sigma^2_{\bar{x}}-\sigma^2_{\bar{x}}$$

إذ أن التوقع الرياضي : $E(\bar{X}_i-\bar{Y})^2$ يساوي تباين المجتمع σ^2 ورمزنا $\sigma^2_{\bar{X}}$ ، ولإيجاد هذا التقدير نجد أن $E(D^2)\neq\sigma^2$ أي أن تباين العينة ويمثل تقدير غير متحيز لتباين المجتمع σ^2

ولإيجاد هذا التقدير غير المتحيز لـ σ^2 يجب حساب قيمة تباين التوسطات عن الوسط

$$\sigma^2_{\bar{X}}=\begin{cases}\dfrac{\sigma^2}{n} & \text{حالة السحب مع حالة الإعادة}\\[2ex] \dfrac{N-n}{N-1}\cdot\dfrac{\sigma^2}{n} & \text{حالة السحب بدون الإعادة}\end{cases}$$

الحسابي العام $\sigma^2_{\bar{X}}$ بدلالة σ^2 و هذا يساوي حالة السحب:

وبالتعويض بالعلاقة التالية: $E(D^2)=\frac{1}{n}\Sigma\sigma^2-\sigma^2_{\bar{x}}-\sigma^2_{\bar{x}}$

نجد أنه في حالة السحب مع الإعادة: $E(D^2)=\sigma^2-\frac{\sigma^2}{n}=\frac{n-1}{n}\sigma^2$

وبضرب $E(D^2)$ بالمقدار $\frac{n-1}{n}$ نجد أن:

$$E\left(\frac{n-1}{n}.D^2\right)=\frac{n-1}{n}E(.D)^2=\frac{n-1}{n}.\frac{n-1}{n}\sigma^2=\sigma^2$$

وبعد الإصلاح نجد أن: $S^2=\frac{n-1}{n}.D^2=\frac{n}{n-1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

وبالتالي يكون التقدير في حالة السحب مع الإعادة: $(X_i-\overline{X}_c)$

$$\delta^2=S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

أما في حالة السحب بدون الإعادة:

فنجد أنه لو عوضنا $\sigma_{\overline{X}}^2$ في العلاقة التالية:

$$E(.D)^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2-\sigma_{\overline{x}}^2-\sigma_{\overline{x}}^2$$

نحصل على: $E(.D)^2=\sigma^2-\frac{n-N}{n-1}.\frac{\sigma^2}{N}$

$$E(.D)^2=\frac{\sigma^2}{N}\left[\frac{n(N-1)-(n-N)}{n-1}.\right]$$

ومنه: $E(.D)^2=\frac{n-1}{n}.\frac{N}{N-1}.\sigma^2$

وإذا أخذنا نفس المقدار: $\frac{n}{N-1}D^2$

نجد أن: $E\left(\frac{n}{N-1}D^2\right)=E(S)^2=\frac{N}{N-1}\sigma^2$

وإذا أخذنا المقدار $\frac{N}{N-1}$ فإننا نجد أن التقدير في حالة السحب بدون إعادة يساوي:

$$\delta^2\frac{N-1}{N}=S^2=\frac{N-1}{N(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

وبما أن المقدار $\frac{N-1}{N}$ قريب جداً من الواحد فإنه يمكننا اعتبار تباين العينة S^2 تقديراً لـ σ^2 **في كلتا حالتي** السحب والصيغة هي:

$$\boxed{\sigma^2=S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$$

ويعود لسبب لتقسيم مجموع مربعات انحرافات القياسات عن وسطها الحسابي على $n-1$ **بدلاً من** n **في حالة التقدير من العينة للأسباب التالية:**

أ ـ عندما تتعامل مع بيانات عينة مسحوبة من مجتمع إحصائي نجد أن:

$$\Sigma(X_i-\overline{Y})>\Sigma(x_i-\overline{X})^2$$

أي أن مجموع مربعات الاختلافات الكلية في المجتمع الإحصائي أكبر من مجموع مربع الاختلافات الكلية في العينة لذلك فإن القسمة علىn-1 يجعل تباين العينة يقترب من التباين الحقيقي للمجتمع أي أن متوسط توزيع البيانات للعينات يعطي تقديراً متحيزاً لتباين المجتمع الإحصائي. ما لم يتم القسمة على $n-1$:

ب ـ **عندما توجد التباين لمجموعة من البيانات** فإننا نخسر درجة حرية واحدة بسبب القيد المفروض على الانحرافات وهو أن مجموع القيم حول الوسط يساوي الصفر. أما درجة الحرية فيقصد بها عدد الحدود التي يمكن أن تتحرك بحرية في مجموعة من البيانات.

تقدير تباين تقدير المتوسط $\hat{\sigma}^2_{\bar{x}}$:

إن $\hat{\sigma}^2_{\bar{x}}$ عبارة عن تباين متوسطات العينات الممكنة $\overline{X}_i$ عن متوسط المجتمع $\overline{Y}$ ويساوي:

$$\sigma^2_{\overline{X}}=E(\overline{X}i-\overline{Y})^2$$

وبما أن $\sigma^2_{\bar{x}}$ معطى بدلالة التباين σ^2 وبحسب حالة السحب نجد أن:

$$\sigma^2_{\bar{x}}=\begin{cases}\dfrac{\hat{\sigma}^2}{n} & \text{حالة السحب مع الاعادة}\\[2ex] \dfrac{N-n}{N-1}\cdot\dfrac{\hat{\sigma}^2}{n} & \text{حالة بدون الإعادة}\end{cases}$$

وباستبدال التقدير σ^2 في العلاقتين:

في حالة السحب مع الإعادة $\delta^2 = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$

في حالة السحب بدون الإعادة $\delta^2 = S^2 = \frac{N-1}{N}S^2 = \frac{N-1}{N(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$

نحصل على التقدير التالي للمقدار $\sigma_{\bar{X}}^2$ وذلك بحسب حالة السحب نجد أن:

ذ

حالة **السحب مع حالة الإعادة**

حالة السحب بدون الإعادة

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}}^2 = \begin{cases} \frac{S^2}{n} \\ \frac{N-n}{N-1}\cdot\frac{S^2}{n} \end{cases}$$

وإذا كان حجم المجتمع N كبيراً فإن $\frac{N-1}{N} \approx 1$ وبذلك يمكننا اعتبار المقدار $\frac{S^2}{n}$ في هذه الحالة وفي كلتا حالتي السحب قديراً للتباين $\sigma_{\bar{X}}^2$.

- تقدير تباين تقدير إجمالي المجتمع:

إن تقدير الإجمالي يعطى بالعلاقة التالية: $\hat{Y} = N\overline{X}$

فإن تباين التقدير لـ $\hat{Y}$ يعرف بالعلاقة التالية: $\sigma_{\hat{Y}}^2 = N^2\sigma_{\bar{X}}^2$ وإن تقديره يعرف بالعلاقة التالية وبحسب حالة السحب:

:

حالة السحب مع حالة الإعادة

$$\sigma_Y^2 = N^2\sigma_X^2 = \begin{cases} N^2\dfrac{S2}{n} \\ N^2\dfrac{N-n}{N}.\dfrac{S^2}{n} \end{cases}$$

بدون اعادة

ـ تقدير الفرق بين متوسطي مجتمعين وتباينهما

لنفرض لدينا مجتمعين Y_1 و Y_2 ومتوسطهما $\overline{Y}_1$ و $\overline{Y}_2$ على التوالي فإذا سحبنا عينتين n_1 و n_2 على الترتيب وكان متوسطي الخاصتين في العينتين على التوالي $\overline{x}_1$ و $\overline{x}_2$ فيكون لدينا:

$$\overline{Y}_1 = \overline{x}_1$$

$$\overline{Y}_2 = \overline{x}_2$$

وبذلك نستنتج أن تقدير الفرق بين $\overline{Y}_1 - \overline{Y}_2$ هو الفرق بين $\overline{x}_1 - \overline{x}_2$ وبذلك يكون:

$$(\overline{Y}1 - \overline{Y}2) = (\overline{x}1 - \overline{x}2)$$

وبما أن العينتين مستقلتان فإن تباين الفرق $(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)$ يساوي إلى مجموع تباينهما أي أن:

$$\sigma^2_{(\overline{x}1-\overline{x}2)} = \sigma^2_{\overline{x}1} + \sigma^2_{\overline{x}2}$$

وبذلك نجد أن تقدير تباين الفرق بين المتوسطين يساوي:

$$\sigma^2_{(\overline{x}1-\overline{x}2)} = \sigma^2_{\overline{x}1} + \sigma^2_{\overline{x}2}$$

وهنا نميز حالتين بحسب حالة السحب وفق التالي:[1]

$$\sigma^{2}_{(\overline{X}1-\overline{X}2)}=\begin{cases}\dfrac{S_{1}^{2}}{n_{1}}+\dfrac{S_{2}^{2}}{n_{2}} & \text{حالة السحب مع الإعادة}\\[2ex] \dfrac{N_{1}-n_{1}}{N_{1}}..\dfrac{S_{1}^{1}}{n_{1}}+\dfrac{N_{2}-n_{2}}{N_{2}}..\dfrac{S_{2}^{1}}{n_{2}} & \text{بدون الإعادة}\end{cases}$$

تقدير نسبة مؤشر نوعي:

لتقدير نسبة خاصة لابد من تحديد عدد عناصر المجتمع التي تتصف بها. فإذا كانت تتصف بتلك الخاصة نقوم بإضافة (I) إلى عدد العناصر المتصفة بها ولا نضيف شيئاً في الحالة المعاكسة. وبالقياس إلى ما برهناه في حالة تقدي الوسط في المجتمع فإننا نجد أن تقدير النسبة R في المجتمع يعطى بواسطة النسبة r في العينة أي أن:

$$R=r=\frac{m}{n}$$

وهذا التقدير هو تقدير غير متميز ومتماسك وفعال وكاف :

وإن تقدير التباين يساوي: $S^{2}=r.q$

حيث أن: $r=\dfrac{m}{n}$

$.q=1-r$

وتقدير تباين التقدير R وبحسب حالة السحب يعرف بالعلاقة التالية:

$$\sigma^{2}_{X}=\begin{cases}\dfrac{r.q}{n}\approx\dfrac{r.q}{n} & \text{حالة السحب مع حالة الإعادة}\\[2ex] \dfrac{N-n}{N}.\dfrac{r.q}{n} & \text{السحب بدون الإعادة}\end{cases}$$

ـ تقدير الفرق بين نسبتين في مجتمعين وتباينهما:

بطريقة مشابهة لتقدير الفرق بين المتوسطين نجد أن الفرق بين النسبتين R_1 و R_2 لخاصة ما في المجتمعين يقدر بواسطة الفرق بين النسبتين في العينتين r_1 و r_2 وفق التالي: $(R_1-R_2)=r_1-r_2$ وتباين الفرق (r_1-r_2) يقدر بواسطة

السحب مع الاعادة

$$\sigma^2_{(\overline{R}1-\overline{R}2)}=\sigma^2_{(\overline{R}1)}+\sigma^2_{(\overline{R}2)}\left|\begin{array}{l}\frac{r_1q_1}{n_1}\approx\frac{r_2q_2}{n_2}\\ \frac{N_1-n_1}{N_1}\cdot\frac{r_1q_1}{n_1}+\frac{N_2-n_2}{N_2}\cdot\frac{r_2q_2}{n_2}\end{array}\right.$$

ا

سحب بدون اعادة

مثال سحبنا عينة بحجم 12 عامل من عمال شركة ما والتي تضم 200 عامل ودرسنا اجورهم وحصلنا على البيانات الاتية.

1500,1600,1700,1800,1900و2000,2100و1850,1910,1740,1350، 1670.

اوجد تقدير كا من متوسط الأجور

اوجد تقدير اجمالي الأجور

الحل

تقدير متوسط اجر المجتمع بدلالة كتوسط العينة

$$\tilde{\bar{y}}=\bar{x}=\frac{\sum x}{n}=\frac{1500+1600+1700+1800+1900+\dots\dots\dots\dots+1670}{12}=1760l.s$$

تقدير اجمالي أجور عمال الشركة

$$\tilde{Y}=N*\tilde{\bar{y}}=200*1760=352000L.S$$

جَـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

تقدير تباين الاجر يعطى بالعلاقة الاتية

أي

$$\tilde{\sigma}^2 = s^2 = \frac{1}{n-1}\sum(x-\bar{x})^2 = \frac{1}{12-1}\left[(1500-1760)^2+(1600-1760)^2+.............+(1670-1760)^2\right] = 45309.1$$

تقدير تباين تقدير المتوسط

هو عبارة عن تباين متوسطات العينات الممكنة عن المتوسط الحسابي العام للمجتمع الذي سحبت منه هذه العينات

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = E(\bar{x}-\bar{y})^2$$

وتقديره يساوي بسحب حالة السحب كما يلي

السحب مع الاعادة

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\tilde{\sigma}^2}{n} = \frac{s^2}{n}$$

السحب بدون عادة

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{N-n}{N} * \frac{\tilde{\sigma}^2}{n} = \frac{N-n}{N} * \frac{s^2}{n}$$

وبما ان المقدار $\frac{N-n}{N-1} \simeq 1$ يساوي تقريبا الوحد يمكن اعتبار المقدار $\frac{s^2}{n}$ تقريرا لتباين المجتمع في كلتا حالتي السحب

تقدير تباين اجمالي المجتمع

يعطى تقدير الإجمالي بالعلاقة الاتية

$$\tilde{y} = N * \bar{x}$$

فان تباين تقدير الإجمالي يعطى باالعلاقة الاتية

$$\sigma_{\tilde{y}}^2 = N^2 * \tilde{\sigma}_{\bar{x}}^2$$

وبحسب حالة السحب نجد ان تقدير تباين تقدير الإجمالي يساوي

السحب مع الإعادة

$$\sigma_{\tilde{y}}^2 = N^2 * \tilde{\sigma}_{\bar{x}}^2 = N^2 \frac{s^2}{n}$$

السحب بدون إعادة

$$\sigma^2_{\tilde{y}} = N^2 * \tilde{\sigma}^2_{\bar{x}} = N^2 \frac{N-n}{N} * \frac{s^2}{n}$$

مثال بالعودة الى أجور 12 عمال من الشركة التي تضم 200 عامل اوجد

تقدير تباين اجمالي الأجور في حالة السحب بدون إعادة

$$\sigma^2_{\tilde{y}} = N^2 * \tilde{\sigma}^2_{\bar{x}} = N^2 \frac{N-n}{N} * \frac{s^2}{n} = \frac{200-12}{200} * \frac{45309.1}{12} = 3549.21 * 200^2 = 14168513.3$$

تقدير الفرق بين متوسطي مجتمعين وتبانهما

نفترض لدينا مجتمعان مستقلان

وان متوسط الخاصة المدروسة في المجتمع الأول $\bar{y}_1$ ومتوسطها في المجتمع الثاني $\bar{y}_2$ سحبنا عينة من المجتمع الأول بحجم n1 وكان متوسطها $\bar{x}_1$ وعينة من المجتمع الثاني بحجم n2 وكان متوسطها $\bar{x}_2$ على التوالي أي

$$\tilde{\bar{y}}_1 = \bar{x}_1$$

$$\tilde{\bar{y}}_2 = \bar{x}_2$$

وبذلك نستنتج ان تقدير الفرق بين متوسطي المجتمعين $(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)$ هو الفرق بين متوسطي العينتين $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ وبذلك يكون $(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$

ملاحظة هامة جدا : **وبما ان العينتين مستقلتين فن تباين الفرق بين المتوسطين يساوي الى مجموع تبانهما**

أي ان :

$$\tilde{\sigma}^2_{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)} = \tilde{\sigma}^2_{\bar{x}1} + \tilde{\sigma}^2_{\bar{x}2}$$

استنادا العلاقة أعلاه فان تقدير تباين الفرق بين متوسطي عينتين بحسب حالة السحب نجد ان :

حالة السحب مع الإعادة

$$\tilde{\sigma}^2_{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)} = \frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}$$

حالة السحب بدون إعادة

$$\tilde{\sigma}^2_{(\bar{x}_1-\bar{x}_2)} = \frac{N_1 - n_1}{N_1} * \frac{s_1^2}{n_1} + \frac{N_2 - n_2}{N_1} * \frac{s_2^2}{n_2}$$

جامعة
المنارة
MANARA UNIVERSITY