كلية ادارة الاعمال

احصاء 2 Statistics

محاضرة رقم 9 التقدير الاحصائي

التقدير المجالي

الاسناذ الدكتور محمود محمد ديب طيوب

الفصل الثاني للعام 2023-2024

مقدمة : الاستنتاجات الاحصائية هي التعميمات والتوازن التي يمكن اتخاذها بناءً على معلومات او بيانات قمت بجمعها أو كانت متوفرة لديك. فمثلاً إذا ارادت شركة أدوية أن تسوق دواء ما، فإنه يجب عليها أن تحصل على تصريح أولاً ويتم ذلك من خلال اثبات أن الدواء المنتج قد جُرِب واثبت جدوى استعماله، وهذا يعني ان عينة من المرضى قد استعملوا ذلك الدواء وحصلوا على نتائج ايجابية، وبذلك فإن الشركة بنت قرارها من خلال دراسة تلك العينة.

المثال السابق يوضح أنه من أهم فروع الاحصاء الاستنتاجي هو عمليتي التقدير واختبار الفرضيات. حيث نقوم في هذا الفصل بدراسة مفهوم التقدير على أن يتم دراسة اختبار الفرضيات في الفصل الخامس لاحقاً إن شاء الله.

أولاً : مفهوم التقدير : تتم عملية التقدير من خلال اختبار عينة عشوائية من مجتمع ما ومشاهدة مقررات تلك العينة ومن ثم حساب المقاييس المراد اجراءها وتعميم ذلك على المجتمع. إن أي توزيع احتمالي يحتوى على معالم تحدد شكله. توزيع ذات الحدين يعتمد على p (نسبة النجاح) ، n (عدد مرات اجراء التجربة) أما في توزيع بواسون فيعتمد شكله على معلمة λ (معدل النجاحات في فترة زمنية معينة) أما في التوزيع الطبيعي فيعتمد شكل ذلك التوزيع على μ (المعدل)، σ (الانحراف المعياري – التباين σ^2) وعادة ما تكون هذه المعالم مجهولة، وفي هذه الحالة لا بد من تقدير هذه المعالم.

هناك طريقتان اساسيتان لتقدير معالم المجتمع المجهولة هما :
1- التقدير بنقطة.   2- التقدير بفترة.

أولاً : التقدير بنقطة.

يمكن ايجاد تقديرات للمعالم الخاصة بالمجتمع من خلال البيانات المأخوذة من عينة عشوائية وذلك بحساب ما يسمى بالإحصاءات، فمثلاً في المجتمع الطبيعي يستخدم متوسط العينة العشوائية $\overline{X}$ كتقدير لمتوسط المجتمع μ وكذلك الانحراف المعياري للعينة S يستخدم كتقدير للانحراف المعياري للمجتمع σ. في توزيع بواسون يستخدم الوسط الحسابي للعينة $\overline{X}$ كتقدير لمعدل عدد النجاحات في تجربة بواسون λ، $(\overline{X} = \lambda)$

أما في توزيع ذات الحدين فيستخدم الوسط الحسابي للعينة $\overline{X}$ كتقدير لنسبة النجاح p $(p = \overline{X})$... وهكذا

وتسمى هذه التقديرات بالتقدير النقطي حيث أنها قيمة وحيدة محسوبة من العينة.

مثال : اخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ فكانت قيمها 6، 4، 7، 3، 5، أوجد تقديراً معدل المجتمع μ وتقديراً تباين المجتمع σ^2 ؟

الحل : -1 $\mu = \overline{X}$ (الوسط الحسابي للمجتمع تقديراً ويساوي الوسط الحسابي للعينة).

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{6+4+7+3+5}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

الوسط الحسابي للمجتمع تقديرا $\mu = 5$

-2 $\sigma^2 = \frac{2}{\overline{X}}$ (تباين المجتمع تقديراً يساوي تباين العينة).

$$\sigma_{\overline{X}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{5}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{5-1}$$

$$= \frac{(6-5)^2 + (4-5)^2 + (7-5)^2 + (3-5)^2 + (5-5)^2}{4}$$

$$= \frac{10}{4} = 2.5$$

σ^2= 2.5 (تباين المجتمع تقديراً يساوي 2.5)

σ = $\sqrt{2.5}$ (الانحراف المعياري للمجتمع تقديراً يساوي 2.5)

مثال : في توزيع بواسون، قدِّر عدد النجاحات في فترة زمنية معينة (λ) بناءًا على عينة عشوائية اعطت القيم التالية 7، 7، 7، 7 ؟

الحل : عدد النجاحات في فترة زمنية معينة (λ) تقديراً = الوسط الحسابي للعينة.

$$\overline{X} = 7 \to \lambda = 7$$

تمرين : إذا اخذت عينة عشوائية حجمها $n = 5$ ، $\sum_{i=1}^{5} x_i = 3$ مجتمع برنوللي (أي ذات حدين $(B(5, p)$)، أوجد التقدير النقطي للمعلمة p ؟

ثانياً : التقدير بفترة (Interred Estimation) : من الصعب جداً الحصول على تقدير لمعلمة مجتمع ما دون الوقوع في الخطأ مهما كان هذا التقدير جيداً، ولذلك فإنه من المرغوب فيه إعطاء فترة معينة نتوقع أن تقع معلمة المجتمع بداخلها. إن مثل هذا النوع من التقديرات يسمى تقدير بفترة أو فترة ثقة ومع أنّ دقة التقدير تزداد بزيادة حجم العينة فأنه ليس هناك سبب يبرر إمكانية الحصول على تقدير يحدد معلمة المجتمع بدون خطأ. وسنتعرف في هذا الفصل على ايجاد فترات الثقة للمعدل (الوسط الحسابي) μ، وفترات الثقة للنسبة P، وفترات الثقة للتباين σ^2.

1- إيجاد فترات الوسط الحسابي μ:

الوسط الحسابي μ إذا كانت σ^2 معلومة:

نظرية (1) : إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي $N(\mu,\sigma^2)$ بحيث كانت σ^2 معلومة فإن فترة $100(1-\alpha)\%$ للمعلمة μ هي :

$$\left(\overline{X}-Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,\overline{X}+Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

حيث $\overline{X}$: الوسط الحسابي للعينة، $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$: هي القيمة على محور Z والتي تقع على يسارها مساحة $1-\frac{\alpha}{2}$

فترات تفسير الثقة : تعتبر فترة الثقة من الأدوات القوية التي تعطي معلومات عن المعلمة المجهولة مثل (μ) باستعمال أسلوب العينة. وسيكون لدينا عدة أنواع دقة فترات الثقة منها 90% ، 95% ، 98% وهذا ما نقصده بالرمز $100(1-\alpha)\%$ وسنكتفي بشرح فترة 95% حيث أن البقية لها نفس السلوك.

1- مثل دراسة العينة وتسجيل المشاهدات وإيجاد قيمة الوسط الحسابي فإن

$$\left(\overline{X}-Z_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,\overline{X}+Z_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

هي فترة نهايتها متغيران عشوائيان تحاول احتواء المجهولة μ.

2- أن تفسير الاحتمال $\left(\overline{X}-Z_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,\overline{X}+Z_{0.975}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=95\%$

أن التكرار النسبي لمحاولات المعاينة الكثيرة المتكررة يحدد أن 95% من فترات الثقة ستحتوي المعلمة μ وأن 5% منها لا تحويها. (بمعنى إذا أخذنا 100 عينة عشوائية ذات الحجم n وفي كل مرة نحسب $\overline{X}$ ونحسب فترة الثقة لها، فإننا نتوقع بنسبة 95% (95 فترة) للوسط الحسابي μ.

مثال : عينة عشوائية حجمها $n = 25$ ، أخذت من مجتمع طبيعي انحرافه المعياري $4 = \sigma$ فأعطت المعدل $\overline{X} = 60$. أوجد فترة 98% ثقة الوسط المجتمع μ ؟

الحل: قبل البدء بتطبيق نص النظرية يجب أن نقوم بعملية التحويل

$$1-\alpha = 98\% \rightarrow 1 - \alpha/2 = ??$$

$$\alpha = 2\%$$

$$1 - \alpha/2 = 99\%$$

وبتعويض القيم المعطاة في السؤال نحصل على

$$(\overline{X} - Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

$$(60 - Z_{0.99}\frac{4}{\sqrt{25}}, 60 + Z_{0.99}\frac{4}{\sqrt{25}})$$

$$(60 - 2.33 \times \frac{4}{5}, 60 + 2.33 \times \frac{4}{5})$$

$$(58.14 , 61.86)$$

ملاحظة : يمكن تطبيق النظرية السابقة في حال كان السحب من مجتمع غير طبيعي وذلك من خلال استخدام نظرية التقارب بشرط ان حجم العينة (n) سيكون كبيراً $(n \geq 30)$ وبذلك سنتعرف على النظرية رقم (2).

نظرية (2) : إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع وسطه μ وتباينه σ^2بحيث كانت σ^2 معلومة، فإن فترة $100(1-\alpha)\%$. ثقة للمعلمة μ هي تقريباً :

$$(\overline{X} - Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

بشرط أن $n \geq 30$.

مثال : عينة عشوائية حجمها 100 من مجتمع تباينه 25، أعطيت الوسط الحسابي 52، اوجد فترة 98% ثقة الوسط الحسابي μ ؟

الحل : المعطيات $n = 100$ ، $\sigma^2 = 25$ ، $\overline{X} = 52$

$$1 - \alpha = 98\% \rightarrow 1 - \alpha/2 = 99\%$$

وبتطبيق النظرية (2) نحصل تقريباً على :

$$\left(52 - Z_{0.99} \times \frac{5}{10}, 52 + Z_{0.99} \times \frac{5}{10}\right)$$

$$= \left(52 - 2.33 \times \frac{1}{2}, 52 + 2.33 \times \frac{1}{2}\right)$$

$$= (50.84, 53.16)$$

تمرين : اعتماد على المثال الأخير، أوجد فترة 95% نقطة الوسط الحسابي μ ؟ ثم أوجد فترة 90% ثقة الوسط الحسابي μ ؟

الوسط الحسابي μ إذا كانت σ^2 غير معلومة :

نظرية (3) : إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي تباينه غير معلوم فإن فترة $100(1-\alpha)\%$ ثقة للوسط μ هي :

$$\left(\overline{X} - t\left[1 - \frac{\alpha}{2}, n - 1\right]\frac{S}{\sqrt{n}}, \overline{X} + t\left[1 - \frac{\alpha}{2}, n - 1\right]\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

حيث S : الانحراف المعياري للعينة.

مثال : أخذت عينة عشوائية حجمها 15 من مجتمع طبيعي فأعطت $S = 2.1$, $\overline{X} = 17.4$. أوجد فترة 95% ثقة للوسط الحسابي μ ؟

الحل : نقوم بعملية التحويل $1 - \alpha = 95\%$

$\alpha = 5\%$

$\alpha/2 = 2.5\%$

$1 - \alpha/2 = 97.5\% = 0.975$

$$\left(17.4 - 2.145 \times \frac{2.1}{\sqrt{15}} , 17.4 + 2.145 \times \frac{2.1}{\sqrt{15}}\right)$$

$(16.24 , 18.56) \leftarrow$ فترة ثقة للوسط الحسابي للمجتمع 95%

بإمكاننا استخدام الأسلوب السابق في بناء فترات الثقة للوسط الحسابي لأكثر من مجتمع وذلك بالاستعانة بالنظرية التالية :

نظرية (4) : (فترات الثقة للفرق بين وسطين)

إذا كانت $X_1, X_2 \dots, X_{n_1}$ عينة عشوائية من مجتمع طبيعي $N(\mu_1; \sigma_1^2)$، وكانت $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2}$ عينة عشوائية أخرى من مجتمع طبيعي $N(\mu_2; \sigma_2^2)$، مستقل عن الأول، بحيث كانت σ_1^2, σ_2^2 معلومتين فإن هذه الثقة $100(1 - \alpha)\%$ للفرق بين الوسطين (μ_1 , μ_2) هي :

$$\left[(\overline{X} - \overline{Y}) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} , \quad (\overline{X} - \overline{Y}) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$$

مثال : أخذت عينة عشوائية حجمها 9 من مجتمع طبيعي $N(\mu_1 , 25)$ ثم أخذت عينة عشوائية حجمها 10 من مجتمع طبيعي $N(\mu_2 , 40)$ مستقل عن الأول، فإذا أعطيت العينة الأولى وسطاً حسابياً = 32، بينما أعطيت العينة الثانية وسطاً حسابياً = 47 أوجد :

أ- فترة ثقة 95% للفرق بين الوسطين $(\mu_1 - \mu_2)$ ؟
ب- فترة ثقة 90% للفرق بين الوسطين $(\mu_2 - \mu_1)$ ؟

الحل: المجتمع الأول المجتمع الثاني

المعطيات :

$\sigma_1^2 = 25$ $\sigma_2^2 = 40$

$n_1 = 9$ $n_2 = 10$

$\overline{X} = 32$ $\overline{Y} = 47$

المطلوب : أ- فترة ثقة 95% للفرق $\mu_1 - \mu_2$ ؟

$$1 - \alpha = 95\% \rightarrow 1 - \alpha/2 = 97.5\%$$

وبتطبيق نص النظرية نجد أن:

$$[(32 - 47) - Z_{0.975} \times \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{40}{10}}, (32 - 47) + Z_{0.975}\sqrt{\frac{25}{9} + \frac{40}{10}}]$$

$$(-15 - 1.96 \times \sqrt{\frac{25}{9} + 4}, -15 - 1.96 \times \sqrt{\frac{25}{9} + 4}) = (-20.1 , -9.9)$$

$$\overline{X} - \overline{Y} = 32 - 47 = -15$$

ب- فترة ثقة 90% للفرق بين $\mu_2 - \mu_1$ ؟

$$1 - \alpha = 90\% \rightarrow 1 - \alpha/2 = 95\%$$

وبتطبيق نص النظرية نجد أن:

$$[(47 - 32) - Z_{0.95} \times \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{40}{10}}, (47 - 32) + Z_{0.95}\sqrt{\frac{25}{9} + \frac{40}{10}}]$$

$$(15 - 1.64 \times \sqrt{\frac{25}{9} + 4}, 15 + 1.64 \times \sqrt{\frac{25}{9} + 4}) = (10.73 , 19.27)$$

$$\overline{Y} - \overline{X} = 15$$

2- تقدير النسبة:

إن تقدير النسبة بفترة هو عبارة عن إيجاد تقدير نقطي لنسبة النجاح في المجتمع P ثم إيجاد توزيع المعاينة لذلك المقدر واستعمال هذه المعلومات لإيجاد فترة ثقة ذات معامل ثقة معينة تحصر نسبة النجاح P بداخلها والنظرية التالية توضح ذلك.

نظرية (5) : إذا كان $\overline{P} = \frac{X}{n}$ نسبة النجاح في عينة عشوائية حجمها n وكان n كبيراً ، فإن فترة $100(1-\alpha)\%$ ثقة التقريبية لنسبة النجاح P هي:

$$\left(\overline{P} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}}\ , \quad \overline{P} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}}\right)$$

مثال : لإيجاد فترة 95% ثقة لنسبة عدد طلاب أحد المدارس الأساسية الذين لديهم ضعف في البصر، أخذت عينة عشوائية حجمها 100 طالب ووجد أن من لديهم ضعف في البصر كان 15 طالب. أوجد فترة الثقة المطلوبة ؟

الحل : $1-\alpha = 95\% \rightarrow 1-\alpha/2 = 97.5\%$

وأيضاً يجب إيجاد $\overline{P}$: (التقدير النقطي لنسبة النجاح)

$$\overline{P} = \frac{15}{100} = 0.15$$

وبتطبيق نص النظرية نجد أن:

$$\left(0.15 - 1.96 \times \sqrt{\frac{0.15(0.85)}{100}}\ , 0.15 + 1.96 \times \sqrt{\frac{0.15(0.85)}{100}}\right) = (0.08\ , 0.22)$$

$$\overline{P} = 0.15$$

نظرية (6) : إذا كانت $X_1 \ ,X_2 \, , ... \ X_{n_1}$ عينة عشوائية من مجتمع برنوللي $B(\,1\,.P_1)$ وكانت $Y_1 \ ,Y_2 \, , ... \ Y_{n_2}$ عينة عشوائية أخرى مستقلة عن الأولى من مجتمع برنوللي $B(\,1\,.P_2)$ ، فإن فترة $100(1-\alpha)\%$ ثقة للفرق بين النسبتين $(P_1 - P_2)$ هي :

$$\left[(\overline{\mathbf{P}}_1 - \overline{\mathbf{P}}_2) - \mathbf{Z}_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{\mathbf{P}}_1(1-\overline{\mathbf{P}}_1)}{\mathbf{n}_1}+\frac{\overline{\mathbf{P}}_2(1-\overline{\mathbf{P}}_2)}{\mathbf{n}_2}}\ ,\right.$$
$$\left.(\overline{\mathbf{P}}_1 - \overline{\mathbf{P}}_2) + \mathbf{Z}_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\overline{\mathbf{P}}_1(1-\overline{\mathbf{P}}_1)}{\mathbf{n}_1}+\frac{\overline{\mathbf{P}}_2(1-\overline{\mathbf{P}}_2)}{\mathbf{n}_2}}\right]$$

مثال : أخذت عينة عشوائية حجمها 100 طالبة من الجامعة (A)، ووجد أن 27 طالبة لديهن تسوس في الأسنان ، ثم أخذت عينة عشوائية أخرى من الجاامعة الأخرى (B) ووجد أن 12 طالبة لديهن تسوس في الأسنان. أجد فترة 95% ثقة للفرق بين
$(P_2\,, P_1)$؟

الحل : $1-\alpha = 95\% \rightarrow 1-\alpha/2 = 97.5\%$ $\quad (P_1\,, P_2)$

$$\overline{P}_2 = \frac{12}{80} = 0.15 \qquad \overline{P}_1 = \frac{27}{100} = 0.27$$

حسب النظرية السابقة نجد أن:

$$[(0.27-0.15) - Z_{0.975} \times \sqrt{\frac{0.27(0.83)}{100}+\frac{0.15(0,85)}{80}}\, , (0.27-0.15)$$
$$+ Z_{0.975} \times \sqrt{\frac{0.27(0.83)}{100}+\frac{0.15(0.85)}{80}}] = (0.003\, , 0.237)$$

$$\overline{P}_1 - \overline{P}_2 = 0.27 - 0.15 = 0.12$$

3- فترات الثقة للتباين.

نظرية (7) : إذا كانت $X_1 , X_2 , \dots , X_n$ عينة عشوائية من توزيع طبيعي $N(\mu , \sigma^2)$ فإن فترة $100(1 - \alpha)\%$ ثقة للتباين σ^2 هي :

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2\left[1-\frac{\alpha}{2}; n-1\right]} , \frac{(n-1)S^2}{\chi^2\left[\frac{\alpha}{2}; n-1\right]} \right)$$

حيث S^2 : هو تباين العينة و n : حجم العينة

ولإيجاد فترة الثقة للانحراف المعياري، نأخذ الجذر التربيعي لطرفي فترة الثقة للتباين.

مثال: عينة عشوائية حجمها 20 أخذت من مجتمع طبيعي $N(\mu, \sigma^2)$ فأعطت التباين $S^2 = 15$ ، أوجد فترة 90% ثقة للتباين σ^2؟

الحل : $1 - \alpha = 90\%$

$$\alpha = 10\%$$

$$\alpha/ 2 = 5\% = 0.05$$

$$1 - \alpha/ 2 = 1 - 0.05 = 0.95$$

من جدول توزيع كاي تربيع نجد أن :

$$\chi^2 [0.95 , 19] = 30.144$$

$$\chi^2 [0.05 , 19] = 10.117$$

وحسب النظرية السابقة ، فإن فترة الثقة هي:

$$\left[\frac{19 \times 15}{30.144} , \frac{19 \times 15}{10.117} \right]$$

أما فترة 90% ثقة الانحراف المعياري فهي

$$[\sqrt{9.45} , \sqrt{28.17}] = [3.07 , 5.31]$$

فترات الثقة للنسبة بين تباينين.

نظرية (8) : إذا كانت $X_1 , X_2 , \dots , X_{n_1}$ عينة عشوائية من $N(\mu_1 , , \sigma_1^2)$,

وكانت $Y_1 , Y_2 , \dots , Y_{n_2}$ عينة عشوائية من $N(\mu_2 \;\; , \sigma_2^2)$,

مستقل عن المجتمع الأول ، فإن فترة $100(1 - \alpha)\%$ ثقة النسبة $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ هي

:

$$\left(\frac{S_2^2}{S_1^2} F\left[\frac{\alpha}{2}; n_1 - 1 , n_2 - 1\right], \frac{S_2^2}{S_1^2} F\left[1 - \frac{\alpha}{2}; n_1 - 1 , n_2 - 1\right]\right)$$

مثال : أخذت عينة عشوائية حجمها $n_1 = 9$ من مجتمع $N(\mu_1 , \sigma_1^2)$ فأعطت التباين $S_1^2 = 65.4$ وأخذت عينة عشوائية أخرى حجمها $n_2 = 11$ من مجتمع طبيعي $N(\mu_2 , \sigma_2^2)$ مستقل عن الأول فأعطت التباين $S_2^2 = 127.3$.

أوجد قيمة الفترة 90% ثقة للنسبة $\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$ ؟

الحل : $1 - \alpha = 90\%$

$$\alpha = 10\%$$

$$\alpha / 2 = 5\% = 0.05$$

$$1 - \alpha / 2 = 1 - 0.05 = 0.95$$

من جدول توزيع F نجد أن:

$$F[0.05 ; 8 , 10] = \frac{1}{F [0.95 ;10 ,8]} = \frac{1}{3.35} = 0.3$$

$$F [0.95 ; 8 , 10] = 3.07$$

ومن صيغة القانون للنظرية السابقة نجد أن:

$$\left[\frac{127.3}{65.4} \times 0.3 , \frac{127.3}{65.4} \times 3.07 \right]= [\, 0.583 , 5.98 \,]$$

أمثلة :

1- أخذت عينة عشوائية حجمها 400 من معلمي المرحلة الإعدادية فوجد أن 80 منهم حاصلون على شهادة البكالوريوس:

أ- قدر نسبة المعلمين في المرحلة الإعدادية الحاصلين على شهادة البكالوريوس.

ب- أوجد فترة 99% ثقة للنسبة الحقيقية للمعلمين في هذه المرحلة الحاصلين على شهادة البكالوريوس؟

الحل :

أ- نقدر نسبة المعلمين لهذه المرحلة كما يلي:

النسبة $= \frac{80}{400} = 0.2$

(لاحظ أن $\overline{\mathrm{P}} = \frac{X}{n}$). التقدير النقطي لنسبة النجاح P هي $\overline{\mathrm{P}}$

ب- من خلال استخدام النظرية رقم (5) نجد أن:

$$\left(0.2 - Z_{0.995} \sqrt{\frac{0.2\,(1-0.2)}{400}} , 0.2 + Z_{0.995} \sqrt{\frac{0.2\,(1-0.2)}{400}}\right) =(\;\; 0.2$$

$$-\, 2.58 \times 0.02 , 0.2 + 2.58 \times 0.02 \,)$$

$$= (\, 0.148 , 0.252 \,)$$

2 - أنتج احد المصانع مصابيح كهربائية تخضع أعمارها تقريبا لتوزيع طبيعي انحرافه المعياري 35 ساعة .

أخذت عينه عشوائية حجمها 25 مصباحا فكان الوسط الحسابي لأعمار هذه المصابيح 890 ساعة .

أوجد فترة 98% ثقة لمعدل أعمار المصابيح !

الحل : لاحظ ان :

$\mu = 890$ ،$n = 25$ ، $\sigma = 35$

من نظرية رقم 1 ، نلاحظ أن :

$$\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\alpha} \;,\; \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} Z_{1-\alpha}\right) = \left(\frac{35}{\sqrt{25}} \times 0.99\,Z + 890 ,\; \frac{35}{\sqrt{25}} \times 0.99\,Z - 890\right)$$

$$= (890 - 2.33 \times 7, \qquad 890 + 2.33 \times 7)$$

$$= (890 - 16.31, \qquad 890 + 16.31)$$

$$= (873.69,\; 956.31)$$

3- اعتمادا على السؤال السابق ، اذا كان تباين المجتمع غير وكان الانحراف المعياري يساوي 17 للعينة .

أوجد فترة 98% ثقه لمعدل أعمار المصابيح !

الحل : نلاحظ ان جميع المعطيات شبيهه بالمثال السابق باستثناء ان الانحراف المعياري قد اصبح معطى للعينة وليس لمجتمع حجم العينة وفي هذه الحالة فإننا بدلا من ان نستخدم جداول التوزيع الطبيعي المعياري، فإننا في هذه الحالة نستخدم جداول توزيع t وبالتالي يصبح الحل على الصورة :

من نظرية رقم (3) :

$$\left(\bar{X} - t\left[1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right]\frac{s}{\sqrt{n}} \;, \bar{X} + t\left[1-\frac{\alpha}{2}, n-1\right]\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\left(890 - t[0.99;16] \times \frac{35}{\sqrt{16}}, \quad 890 + t[0.99;16] \times \frac{35}{\sqrt{16}}\right)$$

$$= (890 - 2.602 \times \frac{35}{\sqrt{16}}, 890 + 2.602 \times \frac{35}{\sqrt{16}})$$

$$= (890 - 22.77, 890 + 22.77)$$

ملاحظات :

عند ايجاد فترات التقدير للوسط الحسابي للمجتمع μ نلاحظ أن :

1- اذا كان السحب من مجتمع طبيعي تباينه معلوم فإننا نستخدم جداول التوزيع الطبيعي المعياري.

2- اذا كان السحب من مجتمع ما تباينه معلوم فإننا نستخدم ايضا جداول التوزيع المعياري بشرط $n > 30$

3- اذا كان السحب من مجتمع تباينه غير معلوم فإننا نستخدم جداول توزيع t

4- في حال السؤال عن التقدير للنسبة سواء لمجتمع واحد او مجتمعين فإننا نستخدم جداول التوزيع الطبيعي

5- في حال السؤال عن التقدير للتباين :

أ- اذا كان السؤال عن مجتمع واحد، فإننا نستخدم توزيع كاي تربيع

ب- اذا كان السؤال عن النسبه بين تباين مجتمعين فإننا نستخدم توزيع F

جَـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY