جَـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

تمارين محلولة

1. أثبت أنّه إذا كان $r \in \mathbb{Q}$، وكان $x \notin \mathbb{Q}$ ، فإنّ $r + x \notin \mathbb{Q}$، وإذا كان $r \neq 0$ ، فإنّ $r.x \notin \mathbb{Q}$.

الحلّ : ليكن $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ و $x \notin \mathbb{Q}$ عندئذ بنقض الفرض, لنفرض جدلاً أنّ $r + x \in \mathbb{Q}$؛ وبذلك يوجد عددان صحيحان $\acute{p}$ و $\acute{q}$، بحيث $r + x = \frac{\acute{p}}{\acute{q}}$، ومنه $x = \frac{\acute{p}}{\acute{q}} - \frac{p}{q} = \frac{qp' - q'p}{q'q}$، وبالتالي $x \in \mathbb{Q}$ وهذا تناقض مع الفرض، الأمر الّذي يعني أنّ فرضنا خاطئ، وعكسه هو الصّحيح.

بالطّريقة نفسها : إذا كان $r.x \in \mathbb{Q}$، يكون $r.x = \frac{\acute{p}}{\acute{q}}$، وعليه $x = \frac{p}{q}.\frac{\acute{p}}{\acute{q}}$، وهذا تناقض.

2. أثبت أنّ $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. من أجل الحلّ، استعن باستراتيجيّة التّناقض.

3. استنتج أنّه بين أيّ عددين عاديّين، يوجد عدد غير عاديّ.

الحل : ليكن r, r' عددين عاديّين، بحيث $r < r'$. لنضع

$x = r + \frac{\sqrt{2}}{2}(r - r')$. من جهة لدينا $x \in]r, r'[$ ، حيث $\left(0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1\right)$، وبناء على التّمرينين (1) و (2)، فإنّ $\frac{\sqrt{2}}{2}(r - r')$ لا ينتمي إلى مجموعة الأعداد العاديّة، وعليه $x \notin \mathbb{Q}$، وبهذا استطعنا إيجاد عدد عاديّ بين عددين غير عاديّين.

4. بيّن أنّ $\frac{ln3}{ln2}$ عدد غير عاديّ. **مساعدة :** برهن ذلك عن طرق التّناقض.

5. بيّن أنّ $\max \ (x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$ و

$\min \ (x, y) = \frac{x+y-|x-y|}{2}$,

ثمّ أوجد صيغة لـ $\max \ (x, y, z)$

الحلّ : إذا كان $x - y \leq 0$ عندئذ $|x - y| = -\text{x} + \text{y}$، وعليه يكون

$\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y+x-y) = y$. بالشّكل نفسه عندما يكون

$x-y \geq 0$ عندئذ $|x-y| = x-y$، وعليه

$$\frac{1}{2}(x+y-|x-y|) = \frac{1}{2}(x+y-x+y) = y.$$

أمّا بالنّسبة إلى ثلاثة أعداد حقيقيّة :

$$\max\left(\max(x,y), z\right)$$

بناءً على الصّيغة السّابقة يكون :

$$\max(x,y,z) = \frac{\max(x,y) + z + \left|\max(x,y) - z\right|}{2}$$

$$\max(x,y,z) = \frac{\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) + z + \left|\frac{1}{2}(x+y+|x-y|) - z\right|}{2}$$

6. لتكن لدينا المجموعتان A, B المحدودتان من الأعداد الحقيقيّة, لنعرف : $A+B =$
$\{a+b;\ (a,b) \in A \times B\}$

a. أثبت أنّ $\sup(A+B)$، تمثّل حدّاً أعلى للمجموعة $A+B$

b. أثبت أنّ $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$

الحلّ :

a. نعلم أنّ $\sup A$، يمثّل حدّاً أعلى لـ A, هذا يعني أنّ $\forall a \in A, a \leq \sup A$ كذلك الأمر $\forall b \in A, b \leq \sup B$. سنبيّن أنّ

$\sup A + \sup B$، يمثّل حدّاً أعلى لـ $A+B$. لنأخذ عنصراً كيفيّاً من المجموعة $A+B$، وبذلك يكتب بالشّكل $x = a+b; a \in A, b \in B$. بما أنّ $b \leq \sup B$ و$a \leq \sup A$ هذا يعني أنّ

$x = a+b \leq \sup A + \sup B$. وبما أنّ x كيفيّ من المجموعة $A+B$، فإنّ $\sup A + \sup B$، يمثّل حدّاً أعلى للمجموعة $A+B$.

b. بدايةً سنبيّن أنّه من أجل كلّ $\varepsilon > 0$ ، $\sup A + \sup B - \varepsilon$، لا يمثّل حدّاً أعلى للمجموعة $A+B$. لنأخذ إذاً $\varepsilon > 0$ كيفيّ، ولنبيّن أنّ

$\sup A+\sup B-\varepsilon$، لا يحدّ المجموعة $A+B$ من الأعلى. بما أنّ $\sup A$ أصغر حدّ أعلى لـ A،
فإنّ $\sup A-\frac{\varepsilon}{2}$، ليست حدّاً أعلى لـ A. هذا يعني أنّه يوجد $a\in A$، بحيث $a>\sup A-\frac{\varepsilon}{2}$.

(تنبيه : $\sup A-\frac{\varepsilon}{2}$ ليس بالضّرورة عنصر من A). بالطّريقة نفسها، يوجد $b\in B$، بحيث
$b>\sup B-\frac{\varepsilon}{2}$. إذاً $x=a+b\in(A+B)$ كذلك $x>a+\sup A-\frac{\varepsilon}{2}+b+$
$\sup B-\frac{\varepsilon}{2}$ ؛ أي أنّ

$x>\sup A+\sup B-\varepsilon$ ، وهذا يعني أنّنا استطعنا إيجاد عنصر من المجموعة $A+B$ أكبر من
$\sup A+\sup B-\varepsilon$ ، وعليه

$\sup A+\sup B-\varepsilon$، لا يمثّل حدّاً أعلى للمجموعة وفقاً لتعريف الحد الأعلى.

c. من الجزء الأوّل للبرهان لدينا $\sup A+\sup B$، تمثّل حدّاً أعلى للمجموعة $A+B$، كما أنّه وفقاً للجزء الثّاني حينما أخذنا ε كيفيّاً موجباً، تبيّن أنّ $\sup A+\sup B-\varepsilon$، ليس حدّاً أعلى لـ $(A+B)$، إذاً $\sup A+\sup B$ حد أعلى أصغريّ للمجموعة. ومنه يكون

$\sup A+\sup B=\sup(A+B)$.

7. لتكن A,B مجموعتين محدودتين من الأعداد الحقيقيّة. صح أو خطأ؟

a. $A\subset B\Longrightarrow\sup A\le\sup B$

b. $A\subset B\Longrightarrow\inf A\le\inf B$

c. $\sup A\cup B=\max(\sup A,\sup B)$

d. $\sup A+B<\sup A+\sup B$

e. $\sup -A=-\inf A$

f. $\sup A+\inf B\le\sup A+B$

الحلّ :

a.صحيح، **b.**خاطئ، **c.** صحيح، **d.** خاطئ، **e.** صحيح، **f.** صحيح.

تمارين غير محلولة

1) ليكن x و y عددين حقيقيّين، أثبت أنّ $|x| \geq \big||x+y|-|y|\big|$.

2) ليكن $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$، n عدداً حقيقيّاً (n عدد طبيعيّ). أثبت أنّ

$$|x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n| \leq |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$$

3) ليكن x, y، n عددين حقيقيّين. قارن بين $E(x+y)$ و $E(x)+E(y)$، ثمّ قارن بين $E(x\times y)$ و $E(x)\times E(y)$.

4) أثبت أنّ تقاطع المجالات يمثّل مجالاً، هل هذه النّتيجة تسري على اجتماع المجالات؟ أوجد الشّرط اللازم، والكافي حتى يكون اجتماع المجالات مجالاً.

5) لتكن A مجموعة جزئيّة من $\mathbb{R}$، ولنعرّف $-A=\{-x; \quad x\in A\}$. أثبت أنّ $\min A = -\max -A$.

6) أوجد الحدّ الأعلى الأصغريّ والحدّ الأدنى الأعظميّ لكلّ من المجموعات :

a. $S=\left\{x \; ; \; x=-\frac{1}{n}+[1+(-1)^n]\cdot n^2; n\geq 1\right\}$

b. $S=\{x \; ; \; x^2<9\}$

c. $S=\{x \; ; \; x^2\leq 7\}$

d. $S=\{x \; ; \; |2x+1|<5\}$

e. $S=\left\{x \; ; \; (x^2+1)^{-1}>\frac{1}{2}\right\}$

7) لتكن S و T مجموعتين غير خاليتين من الأعداد الحقيقيّة، ولنعرف :

$$S+T=\{s+t; \quad s\in S \quad , \quad t\in T\}$$

a. أثبت أنّه إذا كانت المجموعتان S و T محدودتين من الأعلى، يكون : $\sup(S+T)=\sup S+\sup T$

b. أثبت أنّه إذا كانت المجموعتان S و T محدودتين من الأدنى، يكون : $\inf(S+T)=\inf S+\inf T$

8) تحقّق ممّا يلي :

a. من أجل أيّ ثلاثة أعداد حقيقيّة a, b, c يتحقّق :

$$a + c = b + c \Longrightarrow a = b$$

b. من أجل أيّ عددين حقيقيّين a, b يتحقّق :

$$a \cdot b = 0 \Longrightarrow a = 0 \quad \text{أو} \quad b = 0$$

9) تحقّق من صحّة المتراجحات الآتية :

a. إذا كان $a < b + \varepsilon$ لكلّ $\varepsilon > 0$، فإنّ : $a \leq b$.

b. إذا كان $|x| < \varepsilon$ لكلّ $\varepsilon > 0$، فإنّ : $x = 0$.

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \;;\; a < b \quad \text{و} \quad c > 0 \;\Longrightarrow\; a \cdot c < b \cdot c$$

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \;;\; a < b \quad \text{و} \quad c < 0 \;\Longrightarrow\; a \cdot c > b \cdot c$$

10) حلّ المتراجحات الآتية :

a. $|8x - 1| < 2$ **b.** $|3x - 4| \geq 5$ **c.** $\dfrac{x}{1 - x} \geq 1 \;;\; x \neq 1$
