المحاضرة الثانية

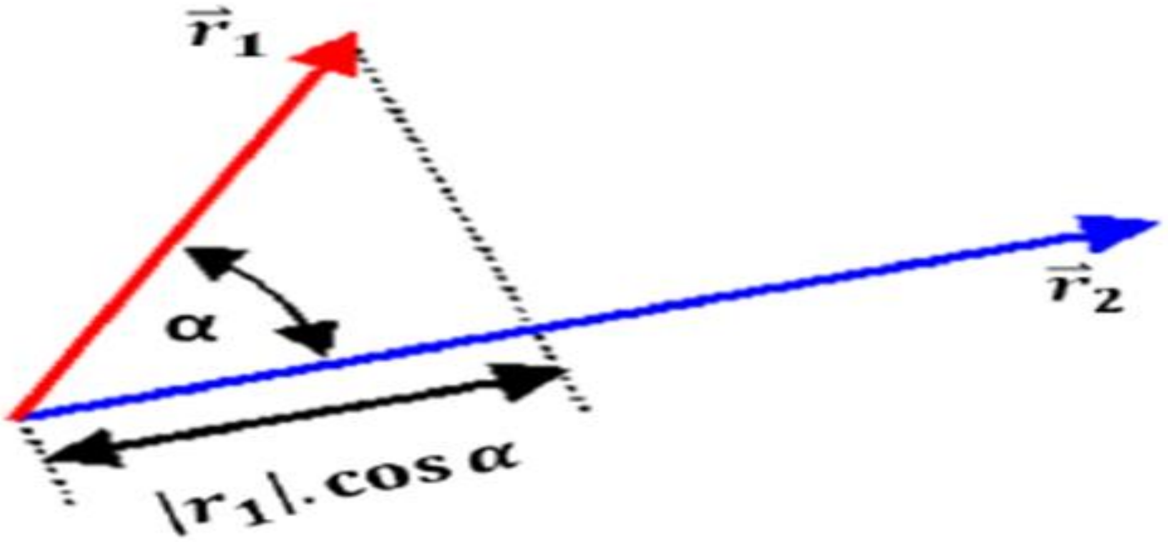
ميكانيك النقطة المادية والجسم الصلب

جامعة المنارة

MANARA UNIVERSITY

4.3.2– إسقاط شعاع على محور

لإسقاط الشعاع ($\vec{r}_1$) على الشعاع ($\vec{r}_2$) او على أي محور يكون الناتج شعاعا طوله: $|\vec{r}_1|.\cos\alpha$ حيث إن (α) هي الزاوية المحصورة بين الشعاعين، كما يتضح من الشكل (9.2).



الشكل (9.2): إسقاط شعاع على محور

طول مسقط الشعاع على المحور هو: $|\vec{r}_1|.\cos\alpha$

5.3.2– الزاوية بين شعاعين

عندما يكون لدينا شعاعان :

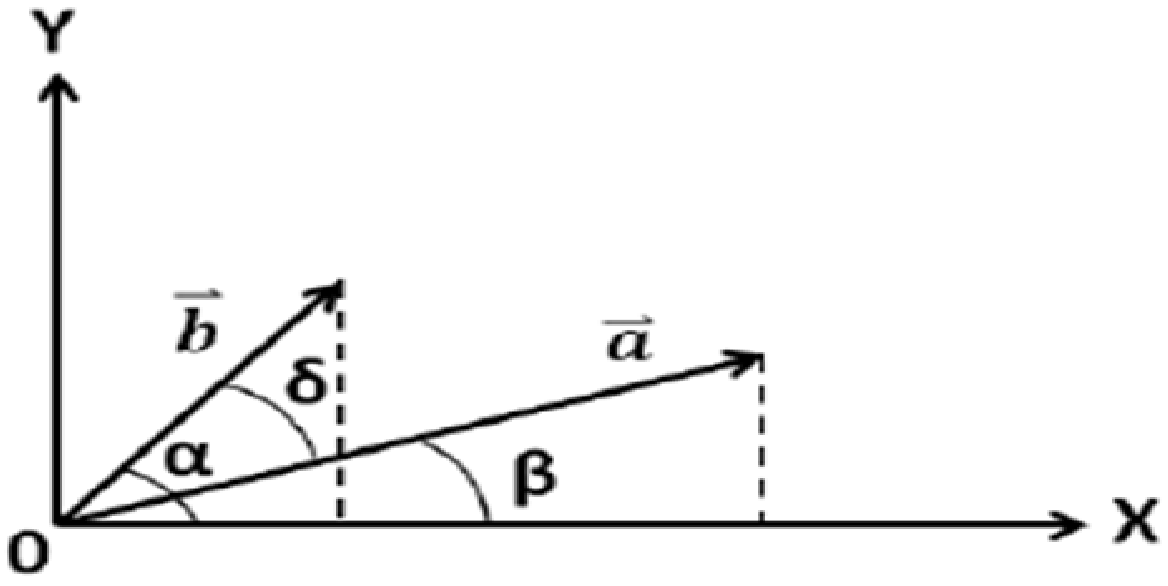
$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2.\vec{j} \qquad \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2.\vec{j}$$

يحصران الزاوية (δ) بينهما حيث إن:

$$0 \le \delta \le \pi$$

يمكن حساب الزاوية (δ) من خلال قيم الأشعة وعواملها (a) و (b) كما يأتي: من الشكل (10.2) نجد أن:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(\vec{a},\vec{b}) &= \cos\delta = \cos(\alpha-\beta) \\ \cos(\vec{a},\vec{b}) &= \cos\alpha\cos\beta + sin\alpha.\sin\beta \end{aligned}}$$



الشكل (10.2): الزاوية بين شعاعين

وبما أن:

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2}}$$
$$|\vec{b}| = b = \sqrt{b_1^{\,2} + b_2^{\,2}}$$

يصبح:

يصبح:

$$\cos\beta = \frac{a_1}{a}$$

$$\sin\beta = \frac{a_2}{a}$$

$$\cos\alpha = \frac{b_1}{b}$$

$$\sin\alpha = \frac{b_2}{b}$$

بالتعويض في العلاقات أعلاه نحصل على:

$$\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{a_1}{a}.\frac{b_1}{b} + \frac{a_2 b_2}{a.b}$$

$$\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{a.b}$$

وبالمثل تكون الزاوية المحصورة بين الاشعة الفراغية:

$$\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{|a||b|}$$

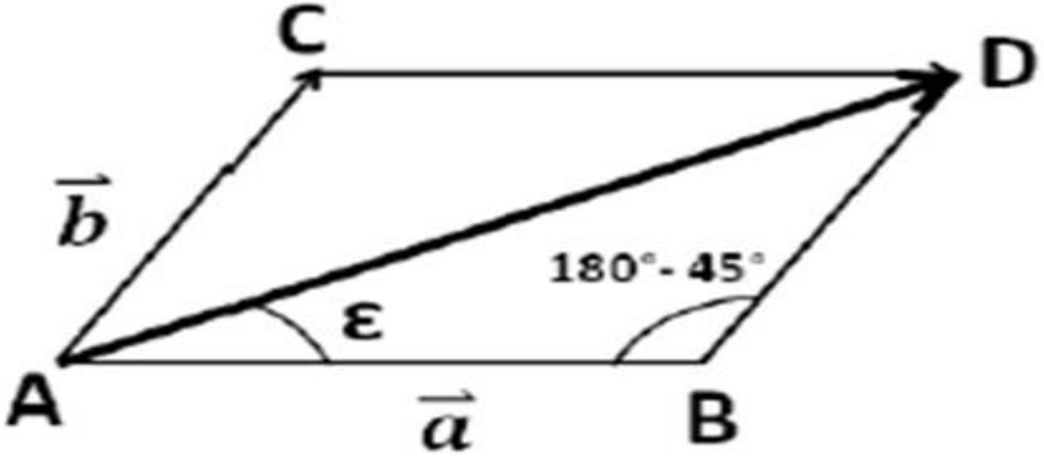
مسائل محلولة

مسألة (1):

لدينا الشعاعان: $(\vec{a} = AB)$ الممثل بالطول (5cm)، و $(\vec{b} = AC)$ الممثل بـــالطول (2cm) كما موضح بالشكل (11.2) يحصران زاوية قدرها (45°). يطلب حساب:

1− حاصل جمع الشعاعين $|\vec{a} + \vec{b}|$.

2− حساب الزاوية المحصورة بين الشعاع $(\vec{a})$ والمحصلة وذلك بيانيا وحسابيا.



الشكل (11.2): للمسألة (1)

الحل:

بيانياً:

عند رسم الاشعة بمقياس الرسم :$(M_l = \frac{1}{1})$ نجد ان:

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = 6{,}5\text{cm}$$

وبقياس الزاوية المحصورة بين المحصلة وبين الشعاع (AB) نجد أنها:

$$\varepsilon = 14^\circ$$

حسابياً:

إن محصلة شعاعين يحصران بينهما زاوية تعطي بالعلاقة الآتية:

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \vec{d}$$

حيث إن طول المحصلة هو البعد (AD) الشكل $(2-11)$:

$$\left|\overrightarrow{AD}^2\right| = \left|\vec{a}^2\right| + \left|\vec{b}^2\right| - 2.\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos(180^\circ - 45^\circ)$$

بالتعويض ينتج:

$$\boxed{\overrightarrow{AD}^2} = 25cm + 4cm^2 - 2.5cm.4cm\cos(180^\circ - 45^\circ)$$

$$AD = \sqrt{36,07cm} = 6,006cm$$

أما الزاوية فتحسب من العلاقة:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{\sin(180-45)}{\sin\varepsilon}$$

بالتعويض ينتج:

$$\frac{6,006}{2} = \frac{\sin 135^\circ}{\sin\varepsilon}$$

$BD^2=AD^2+AB^2-2AD.AB\cos(AD,AB)$

$$\sin\varepsilon = \frac{2cm.\sin 135^\circ}{6,006cm} = 0.235$$

$$\varepsilon = 13,61^o$$

مسألة (2):

لدينا نقطتان:

$$p_1 = (2,9,-1)$$

$$p_2 = (5,7,-3)$$

يطلب تعيين إحداثيات الشعاع $(\overrightarrow{p_1p_2})$:

الحل:

$$(\overrightarrow{p_1p_2}) = [5-2,7-9,-3-1(-1)]$$

وتكون إحداثيات الشعاع:

$$(\overrightarrow{p_1p_2}) = (3,-2,-2)$$

مسألة (3):

ما هي إحداثيات النقطة (p2) إذا علم أن الشعاع $(\vec{a})$.

$$\vec{a} = p_1p_2 = (-6\,,-1\,,2)$$

وإن إحداثيات النقطة (p_1) هي :

$$p_1(4\,,1\,,-3)$$

الحل:

إن إحداثيات النقطة (x_2) هي:

المسقط على x

$$x_2 = x_1 + \underline{a_1} = -6 + 4 = -2$$

المسقط على y

$$y_2 = y_1 + \underline{a_1} = -1 + 1 = 0$$

$$z_2 = z_1 + \underline{a_3} = -3 + 2 = -1$$

المسقط على z

إذن تكون إحداثيات (p_2):

$$p_2 = (-2, 0, -1)$$

مسألة (4):

لدينا الشعاع ($\vec{a}$) معطى بإحداثياته:

$$\vec{a} = (5, 5, -5)$$

المطلوب: حساب القيمة المطلقة للشعاع والزاوية التي يصنعها مع محاور الإحداثيات.

الحل :

إن القيمة المطلقة للشعاع هي:

$$|a| = \sqrt{5^2 + 5^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{3} \rightarrow |a| = 8.66$$

والزاوية المتشكلة هي :

$$\cos\alpha = \frac{5}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.577 \rightarrow \alpha = 54{,}8^\circ$$

$$\cos\beta = \frac{5}{5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0.577 \rightarrow \beta = 54{,}8^\circ$$

$$\cos\gamma = -\frac{5}{5\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -0.577 \rightarrow \gamma = 125{,}2$$

مسألة (5):

لدينا الشعاع ($\vec{r}$) المؤلف من ثلاثة أشعة على الشكل الآتي:

$$\vec{r} = 3\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c}$$

وأن الأشعة هي:

$$\vec{a} = (2,0,-1)$$

$$\vec{b} = (-5,1,4)$$

$$\vec{c} = (\frac{15}{2},-4,\frac{11}{2})$$

احسب مركبات الشعاع ($\vec{r}$) وما هي الزوايا التي يشكلها مع المحور (X)؟

الحل:

ان الشعاع ($\vec{r}$) يشكل على المحور (X) المركبة الآتية:

$$\vec{r} = 3\,(2\,,0\,,-1) - (-5,1,4) - 2(\frac{15}{2},-4,-\frac{11}{2})$$

$$\vec{r} = (6+5-15),(0-1+8),(-3-4+11)$$

$$\vec{r} = (-4,7,4)$$

لحساب الزاوية التي يصنعها الشعاع مع المستوي (x−y) نوجد الزاوية يبين الشعاع وبين مسقطه على محور (z):

$$|r| = \sqrt{-4^2 + 7^2 + 4^2} = 9$$

$$\cos\gamma = \frac{4}{9} \rightarrow \gamma = 63,6^\circ$$

وتكون الزاوية المطلوب حسابها هي: $90^\circ - 63,6^\circ = 26.4^\circ$

تطبيق

لدينا أشعة القوى الآتية:

$$\vec{F}_1 = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$$
$$\vec{F}_2 = -10\vec{\jmath}$$
$$\overrightarrow{F_3} = 3\vec{\imath} + 1\vec{\jmath} - 5\vec{k}$$

المطلوب إيجاد مجموع هذه الاشعة.

الحل:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_2 = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 10\vec{\jmath} + 3\vec{\imath} + 1\vec{\jmath} - 5\vec{k}$$
$$\vec{F}_1 = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$$
$$\vec{F}_2 = -10\vec{\jmath}$$
$$\overrightarrow{F_3} = 3\vec{\imath} + 1\vec{\jmath} - 5\vec{k}$$
$$\vec{F} = 5\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} - 5\vec{k}$$

تطبيق

لدينا الشعاعان $\vec{F}_1 = 10\vec{i} - 10\vec{j}$ والشعاع $\vec{F}_2$ ، إذا كانــت محصـــلتهما $\vec{F} = 2\vec{i}$، أوجد الشعاع $\vec{F}_2$.

الحل:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$
$$\overrightarrow{F_2} = \vec{F} - \vec{F}_1 = 2\vec{\imath} - (10\vec{\imath} - 10\vec{\jmath})$$
$$\vec{F}_2 = -8\vec{\imath} - 10\vec{\jmath}$$