المحاضرة الثالثة

ميكانيك النقطة المادية والجسم الصلب

جَـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

تطبيق

إذا كان لدينا الاشعة الآتية:

$$\vec{A} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 4\vec{k}$$
$$\vec{B} = 3\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 5\vec{k}$$
$$\vec{C} = 2\vec{\imath} - 1\,\vec{\jmath} - 3\vec{k}$$

المطلوب:

- أوجد المحصلة R لهذه الاشعة،
- الشعاع E الذي تحقق فيه العلاقة: $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{E} = 0$،
- الشعاع D الذي يحقق العلاقة: $\vec{D} = (\vec{A} + \vec{B} - 2\vec{C})$.

الحل:

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 7\vec{\imath} - 1\vec{\jmath} - 2\vec{k}$$

طالما أن: $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ ، فهذا يعني أن:

$$\vec{E} = -\vec{R} = -7\vec{\imath} + 1\vec{\jmath} + 2\vec{k}$$

نكتب الصيغة التحليلية للاشعة:

$$\vec{A} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 4\vec{k}$$

$$\vec{B} = 3\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 5\vec{k},$$

$$-2\vec{C} = -4\vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath} + 6\vec{k},$$

$$(\vec{A} + \vec{B} - 2\vec{C}) = 1\vec{\imath} + 2\,\vec{\jmath} + 7\vec{k}$$

تطبيق

إذا كان لدينا الشعاعان: $\vec{A} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ و $\vec{B} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath}$، أوجد:

- الجداء السلمي $\vec{A}.\vec{B}$،
- الجداء الشعاعي $\vec{A} \times \vec{B}$،
- الزاوية بين $\vec{A}, \vec{B}$.

الحل:

- الجداء السلمي $\vec{A}.\vec{B}$:

$$\vec{A}.\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y = 2.3 + 3(-1) = 3$$

- الجداء الشعاعي $\vec{A} \times \vec{B}$:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = [2 \times (-1) - 3 \times 3]\vec{k}$$

$$= -11\ \vec{k}$$

- الزاوية بين $\vec{A}, \vec{B}$:

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB} = \frac{3}{\sqrt{2^2+3^2} \cdot \sqrt{3^2+1^2}} = 0.264 \Rightarrow \theta = 74,7^o$$

تطبيق

اذا كان لدينا الشعاعان $\vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$ و $\vec{B} = 3\vec{i} \quad -3\vec{j} + 4\vec{k}$، أوجد:

- الجداء السلمي $\vec{\mathbf{A}}.\vec{\mathbf{B}}$،
- الجداء الشعاعي $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$ مع اشعة الواحدة عليهما،
- الزاوية بين الشعاع $\vec{\mathbf{A}}$ والشعاع الناتج عن جدائهما الشعاعي $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$.

الحل:

- الجداء السلمي $\vec{A}.\vec{B}$:

$$\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = 2.3 + 3(-3) + 1(4) = 1$$

- الجداء الشعاعي $\vec{A} \times \vec{B}$:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= [[3.4 - (-3)(1)]\vec{i}] - [2(4) - 3(1)]\vec{j}$$
$$+ [2(-3) - 3(3)]\vec{k} = 15\vec{i} - 5\vec{j} - 15\vec{k}$$

- والقيمة الجبرية للشعاع الناتج:

$$C = \sqrt{15^2 + 5^2 + 15^2} = 21,8$$

- شعاع الواحدة للشعاع الناتج:

$$\frac{15}{21.8}\vec{i} - \frac{5}{21.8}\vec{j} - \frac{15}{21.8}\vec{k} = 0.688\vec{i} - 0.229\vec{j} - 0.688\vec{k}$$

- الزاوية بين الشعاع $\vec{A}$ والشعاع الناتج عن جدائهما الشعاعي $\vec{A} \times \vec{B}$ تحدد بالعلاقة:

نحسب البسط اولا

الشعاع C

$$\sin\theta = \frac{\vec{A} \times (\vec{A} \times \vec{B})}{A\ \ C} \Rightarrow \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 15 & -5 & -15 \end{bmatrix}$$

نحسب البسط أولا

$$= [[-45 + 5]\vec{i}] - [-30 - 15]\vec{j} + [-10 - 45]\vec{k}$$

$$= -40\vec{i} + 45\vec{j} - 55\vec{k}$$

والقيمة الجبرية للشعاع في البسط

$$D = \sqrt{40^2 + 45^2 + 55^2} = 81,55$$

$$\sin\theta = \frac{81.55}{3.74 \times 21.8} = 1$$

أي أن الزاوية تساوي 90 درجة والنتيجة صحيحة لأن الشعاعين يجب أن يكونا متعامدين.