جامعة المنارة

قسم الهندسة المعلوماتية

الدارات الكهربائية والالكترونية

Electrical and Electronic Circuits

الدكتورالمهندس

علاء الدين أحمد حسام الدين

4

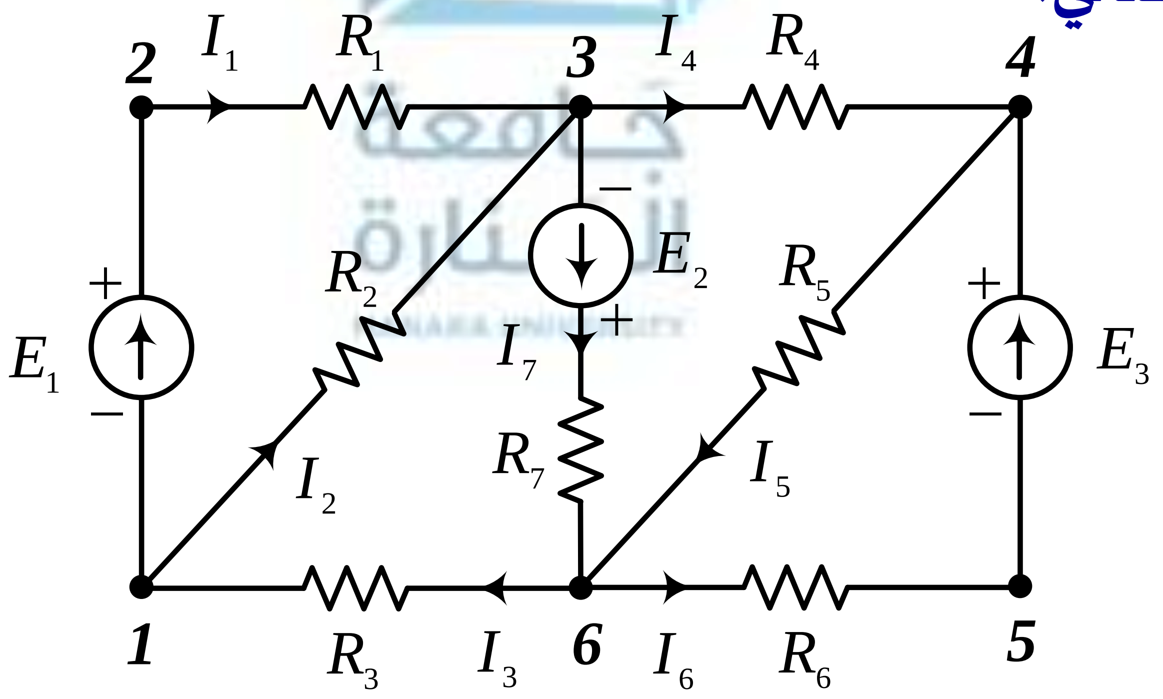
طرق تحليل الدارات الكهربائية

METHODS ANALYSIS OF ELECTRICAL CIRCUITS

استخدام قوانين كيرشوف

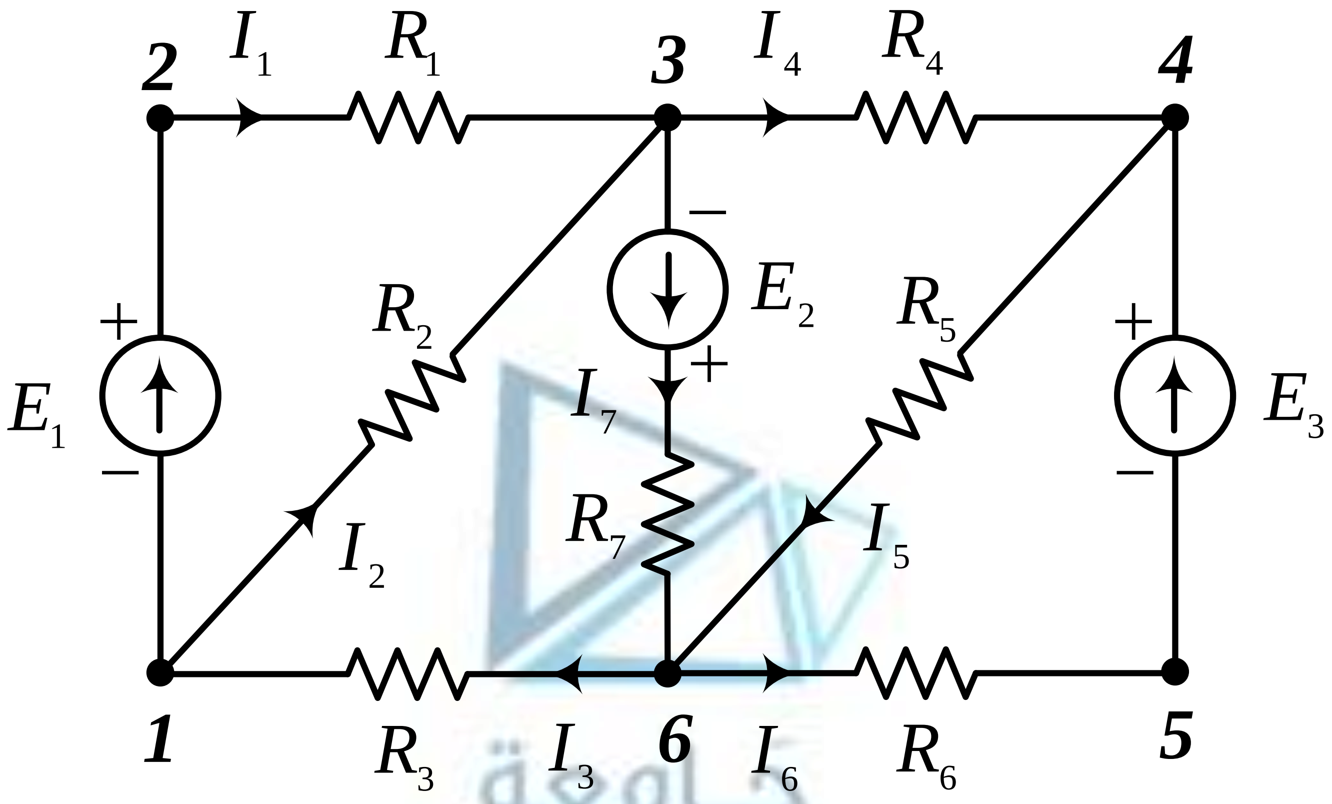
:By using Kirchhoff's laws

لتكن لدينا الدارة المبينة بالشكل. تحوي هذه الدارة على عدد من العقد (1, 3, 4, 6)، وعدد من الحلقات (1-2-3-1، 1-3-6-1، 1-2-3-6-1،.... وهكذا). يمكن كتابة معادلة التيارات في كل عقدة من عقد الدارة حسب قانون كيرشوف الأول، كما يمكن كتابة معادلات الجهود لكل حلقة حسب قانون كيرشوف الثاني.



توجد في المعادلات المكتوبة حسب قانوني كيرشوف الأول والثاني، التيارات التي بحسابها نكون قد حققنا هدف الحساب.

يجب قبل كتابة المعادلات اختيار الاتجاهات الافتراضية الموجبة للتيارات في كل فرع من فروع الدارة. الاتجاهات الفعلية للتيارات قد لا تتطابق مع الاتجاهات الافتراضية، وسيظهر الخطأ في اختيار اتجاه التيار نتيجة الحل، إذ ستكون قيمة مثل هذا التيار سالبة، وبالتالي يجب تغيير اتجاهه في الدارة وعَدّه فيما بعد موجباً.



نكتب الآن معادلات التيارات في العقد حسب قانون كيرشوف الأول:

في العقدة 1:
$$I_3 = I_1 + I_2$$

في العقدة 3:
$$I_1 + I_2 = I_4 + I_7$$

في العقدة 4:
$$I_5 = I_4 + I_6$$

في العقدة 6:
$$I_5 + I_7 = I_3 + I_6$$

نلاحظ من المعادلات السابقة أن هناك ثلاث معادلات مستقلة فقط، وهي المعادلات التي يدخل فيها تيارواحد جديد على الأقل مقارنةً بباقي المعادلات. المعادلة الرابعة لا تحوي تيار جديد، وبالتالي يمكن الحصول عليها من المعادلات السابقة. فإذا رمزنا لعدد العقد في الدارة بالرمز N يكون عدد العقد المستقلة هو:

$$P = N - 1$$

وهو عدد المعادلات المستقلة التي يمكن الحصول عليها حسب قانون كيرشوف الأول.

وفقاً لذلك نجد أن عدد المعادلات المستقلة التي وضعت حسب قانون كيرشوف الأول غير كافٍ لتحديد جميع التيارات في الدارة، إذ يسري فيها سبعة تيارات (سبعة مجاهيل). معادلات العقد المستقلة هي ثلاث فقط. يتم وضع باقي المعادلات اعتماداً على قانون كيرشوف الثاني.

نلاحظ من الدارة أنها تحتوي على عشر حلقات، إلا أن بعض هذه المعادلات سيكون غير مفيد لوجود حدودها في معادلات أخرى. أي أننا نحتاج لمعادلات مستقلة فقط، فالمعادلة تكون مستقلة عن سابقتها إذا احتوت الحلقة التي نطبّق عليها قانون كيرشوف الثاني على جزء واحد من الدارة على الأقل لم يدخل في نطاق الحلقة التي كتبت عليها المعادلة السابقة. بمعنى آخر يجب اختيار الحلقات بحيث يكون في كل حلقة جزء واحد جديد على الأقل مقارنةً بباقي الحلقات.

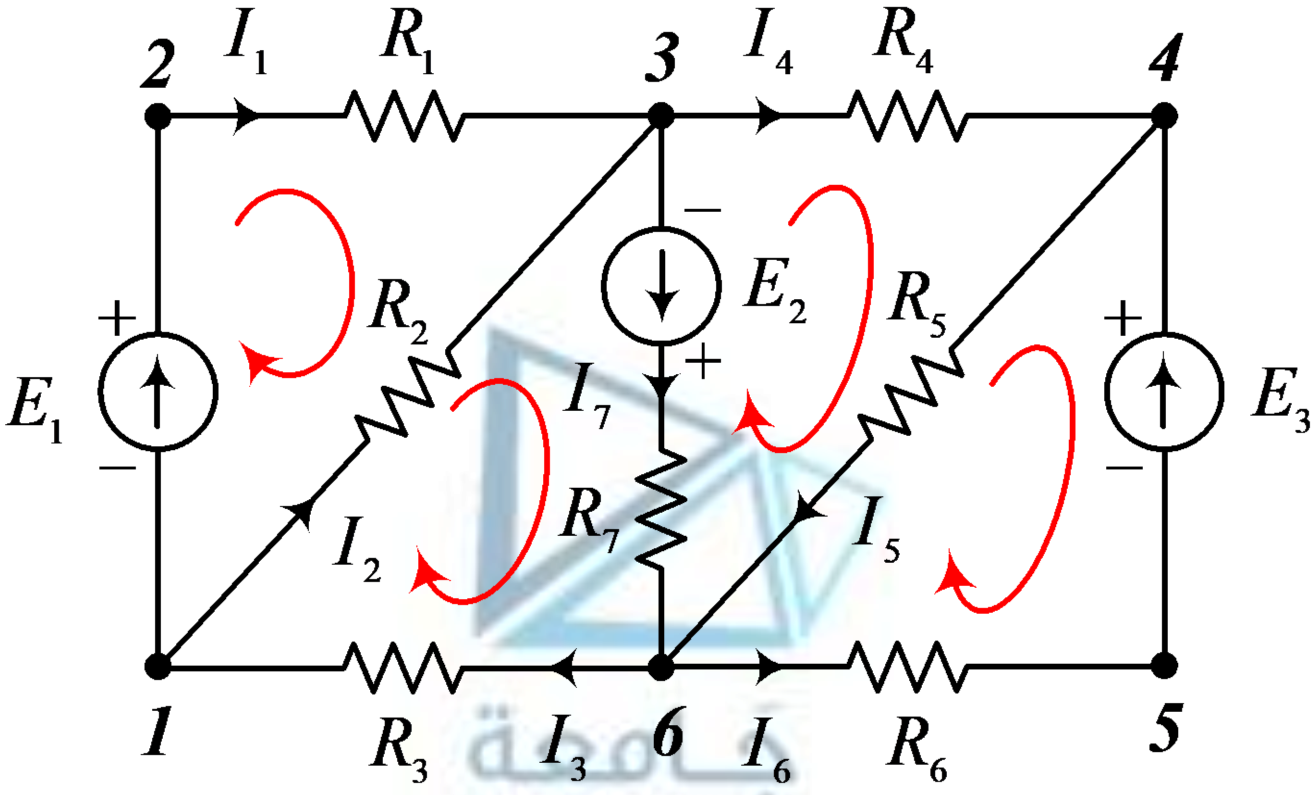
يتم معرفة عدد الحلقات المستقلة في الدارة من خلال عدد الفروع وعدد العقد فيها. فإذا رمزنا لعدد فروع الدارة بالرمز L ولعدد العقد بالرمز N فإن عدد الحلقات المستقلة في الدارة يحسب من العلاقة:

$$B=(L-N)+1$$

وفقاً لذلك لدينا في الدارة المدروسة في الشكل السابق:

$$B=(7-4)+1=4$$

أي أربع حلقات مستقلة، نحددها ثم نختار اتجاه الدوران الافتراضي فيها لكتابة قانون كيرشوف الثاني. تم في الشكل تحديد الحلقات المستقّلة، وهي واضحة من خلال اتجاه الدوران الافتراضي المبين داخلها.



$$B=(L-N)+1$$

في الحلقة 1-2-3-1: $E_1 = I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2$

في الحلقة 1-3-6-1: $E_2 = I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3 + I_7 \cdot R_7$

في الحلقة 6-3-4-6: $-E_2 = I_4 \cdot R_4 + I_5 \cdot R_5 - I_7 \cdot R_7$

في الحلقة 6-4-5-6: $-E_3 = -I_5 \cdot R_5 - I_6 \cdot R_6$

إن الإشارة السالبة للقوى المحركة الكهربائية يحددها الاختلاف في اتجاه الدوران الافتراضي مع اتجاه القوة المحركة لمنبع الجهد. فإذا دخل سهم اتجاه الدوران الافتراضي من القطب السالب باتجاه القطب الموجب للمنبع تكون E موجبة، وإلا تكون سالبة.

أما إشارات الجهود المطبقة على العناصر فيحددها التوافق أو التعاكس بين اتجاه التيار المار في العنصر وبين اتجاه الدوران الافتراضي. فإذا توافق اتجاه التيار المار في العنصر (الفرع) مع اتجاه الدوران الافتراضي تكون إشارة جهد العنصر موجبة، وإلا تكون سالبة.

حسب هذه الطريقة يتم تحديد عدد المعادلات المستقلة التي يجب كتابتها لحساب تيارات الدارة من العلاقة الآتية:

$$Z = P + B$$

عدد المعادلات المستقلة= عدد العقد المستقلة + عدد الحلقات المستقلة.

$$P = N - 1$$

$$B = (L - N) + 1$$

N- عدد العقد في الدارة.

L- لعدد فروع الدارة

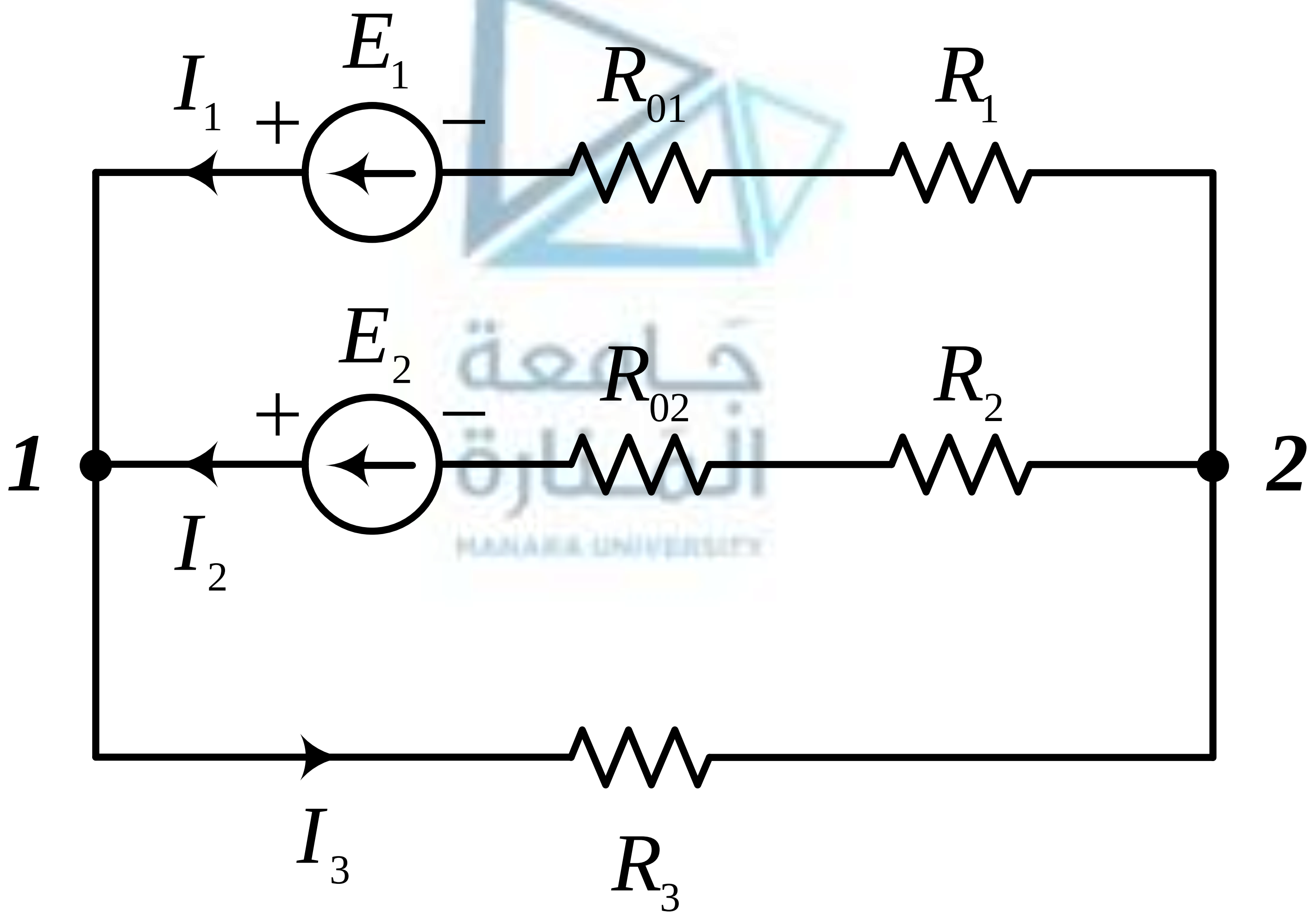
مثال: لـتكن لـدينا الـدارة المبينـة بالشـكل. المطلـوب حساب تيارات الفروع في هـذه الـدارة باسـتخدام قوانين كيرشوف إذا كان:

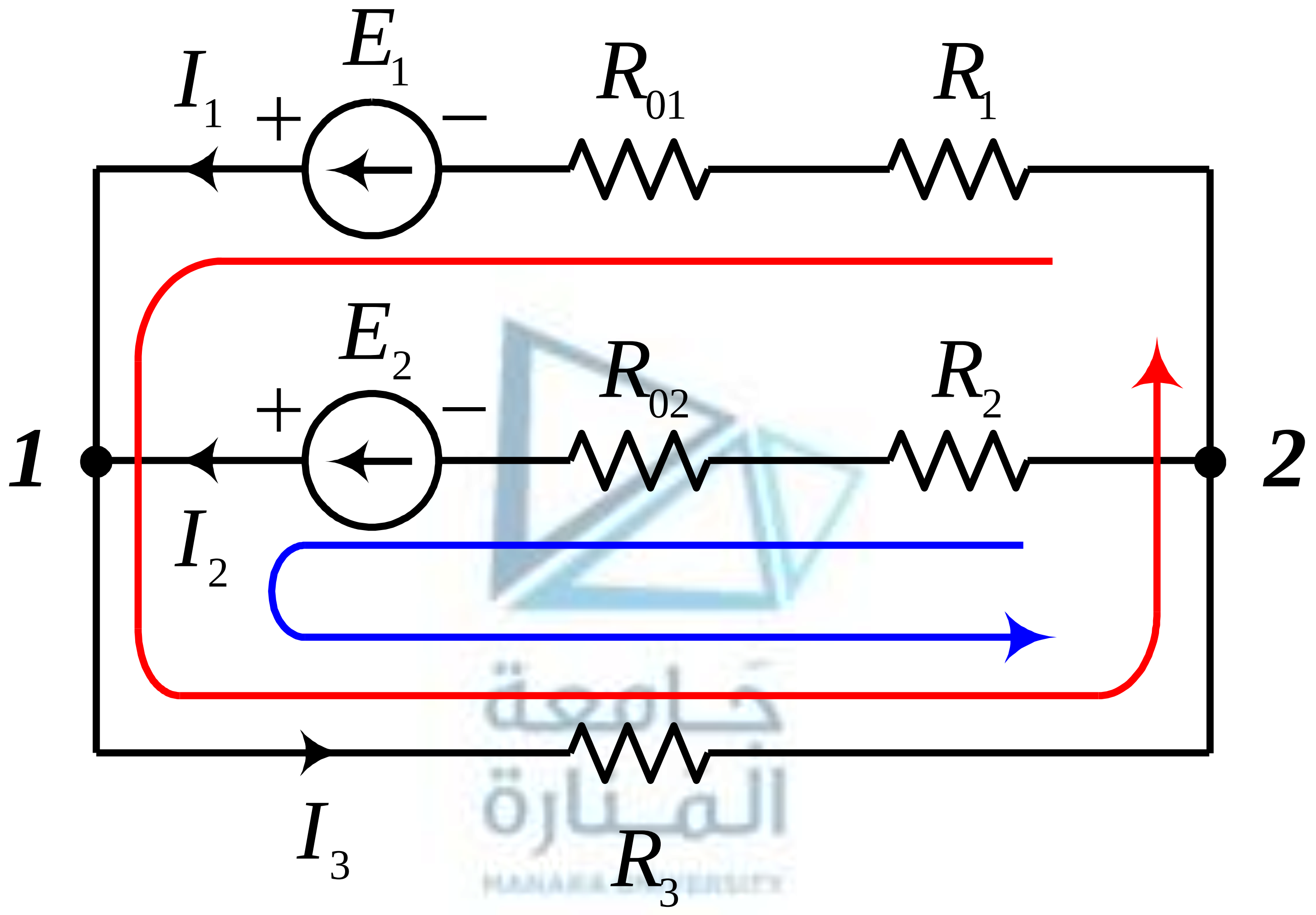
$E_1 = 1.8\ [V]$, $E_2 = 1.2\ [V]$

$R_1 = 0.6\ [\Omega]$, $R_{01} = 0.2\ [\Omega]$

$R_2 = 0.4\ [\Omega]$, $R_{02} = 0.3\ [\Omega]$

$R_3 = 0.8\ [\Omega]$

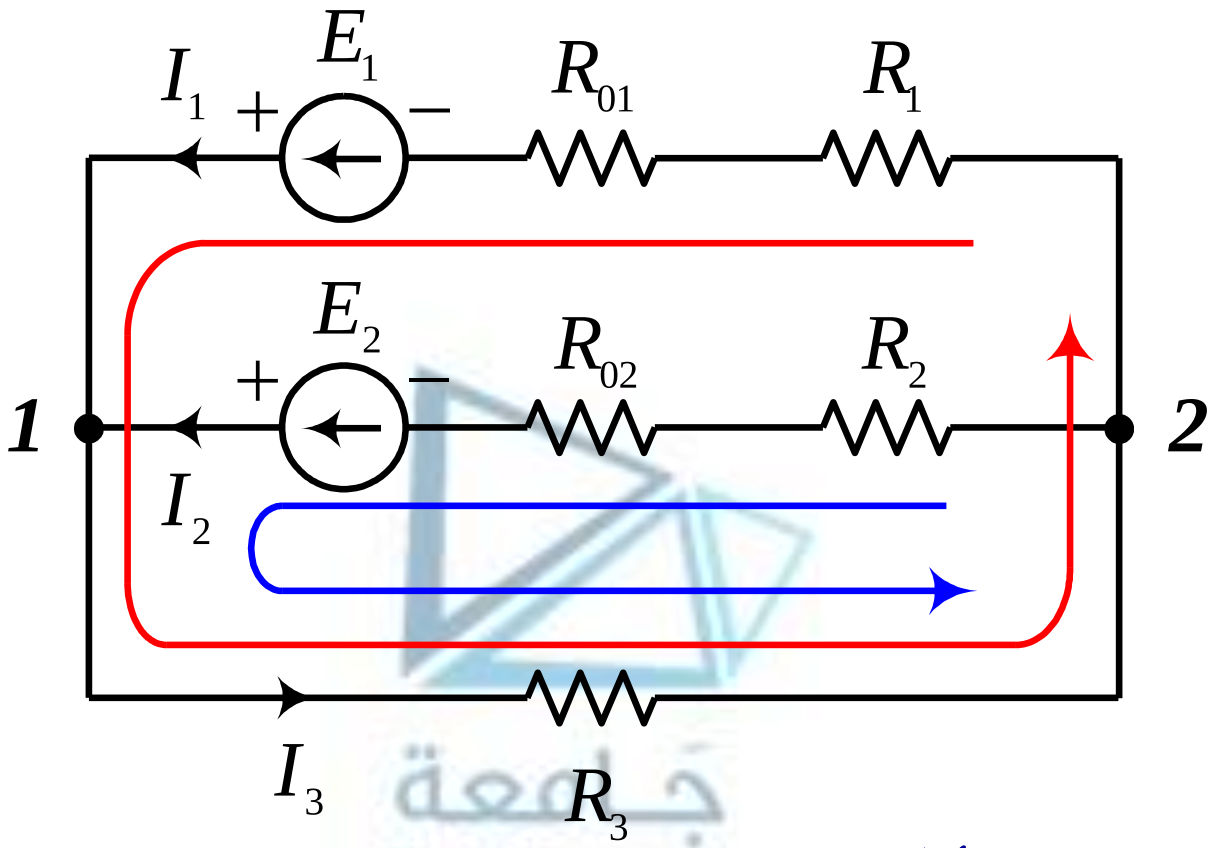




عدد العقد: $N = 2$ $\Leftarrow$ عدد العقد المستقلة: $P = N - 1 = 2 - 1 = 1$

عدد الفروع: $L = 3$ $\Leftarrow$ عدد الحلقات المستقلة $B = (L - N) + 1 = (3 - 2) + 1 = 2$

عدد المعادلات: $Z = P + B = 1 + 2 = 3$



حسب قانون كيرشوف الأول في العقدة 1:

$$I_3 = I_1 + I_2 \qquad (1)$$

حسب قانون كيرشوف الثاني على الحلقة الخارجية يكون:

$$E_1 = I_1 \cdot (R_1 + R_{01}) + I_3 \cdot R_3 \Rightarrow 1.8 = 0.8 I_1 + 0.8 I_3 \qquad (2)$$

حسب قانون كيرشوف الثاني على الحلقة السفلية يكون:

$$E_2 = I_2 \cdot (R_2 + R_{02}) + I_3 \cdot R_3 \Rightarrow 1.2 = 0.7 I_2 + 0.8 I_3 \qquad (3)$$

نعوض (1) في (2)، فيكون:

$$1.8 = 0.8I_1 + 0.8I_1 + 0.8I_2 = 1.6I_1 + 0.8I_2$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{1.8 - 0.8I_2}{1.6} \qquad (4)$$

نعوض في (**3**) قيمة **I_3** من (**1**) وقيمة **I_1** من (**4**)، فيكون:

$$1.2 = 0.8I_1 + 0.8I_2 + 0.7I_2 = 0.8I_1 + 1.5I_2$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{1.2 - 0.8I_1}{1.5} = \frac{1.2 - 0.8(\frac{1.8 - 0.8I_2}{1.6})}{1.5}$$

$$1.5I_2 = 1.2 - \frac{1.44}{1.6} + \frac{0.64}{1.6}I_2 = 1.2 - 0.9 + 0.4I_2$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{0.3}{1.1} = 0.273\,[A]$$

نعوض في (4):

$$I_1 = \frac{1.8 - (0.8 \times 0.273)}{1.6} = 0.99\ [A]$$

نعوض قيمة I_1 و I_2 في (1)، فيكون:

$$I_3 = 0.273 + 0.99 = 1.26\ [A]$$

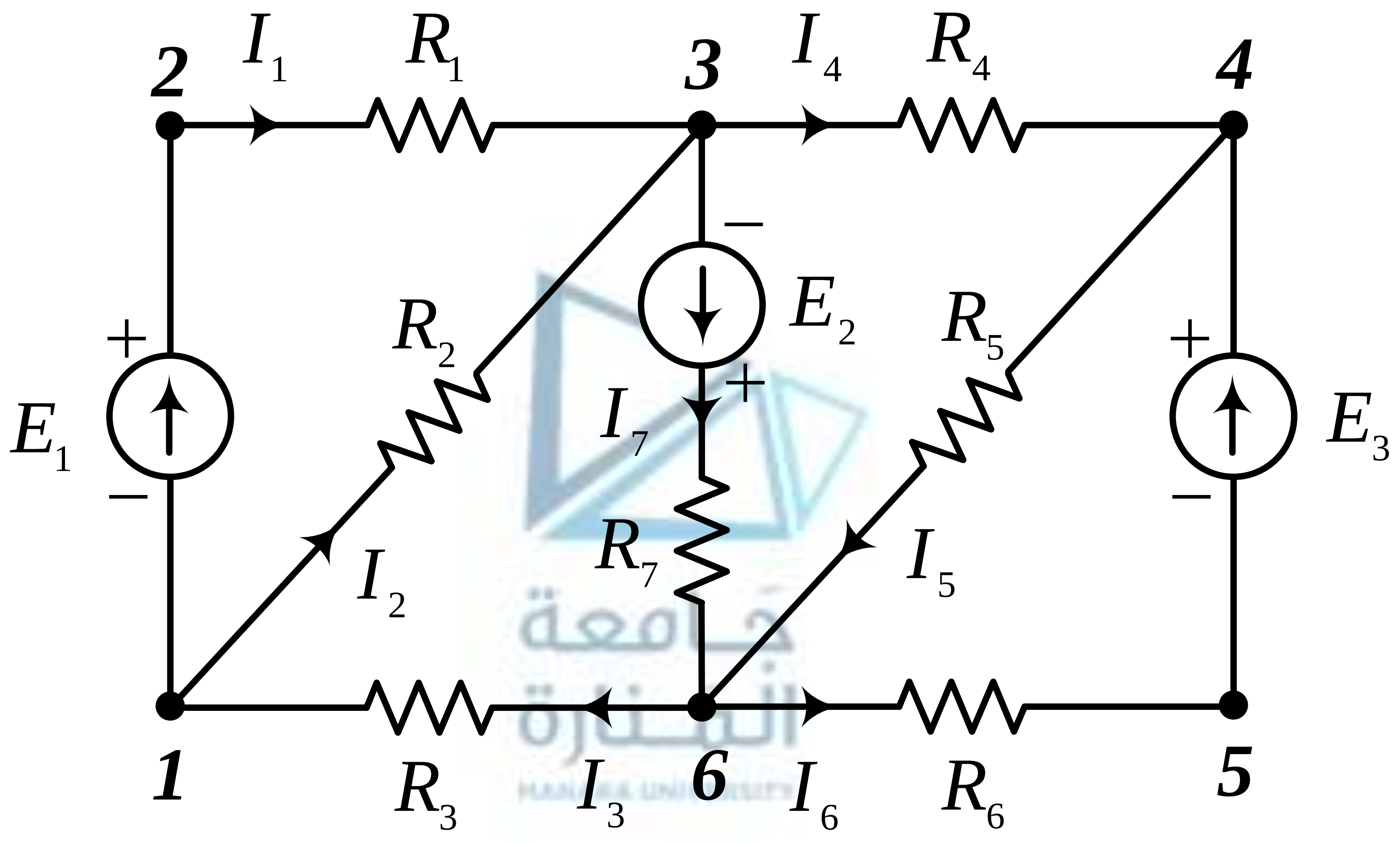
طريقة التيارات الحلقية (تيارات ماكسويل):

Mesh Currents method

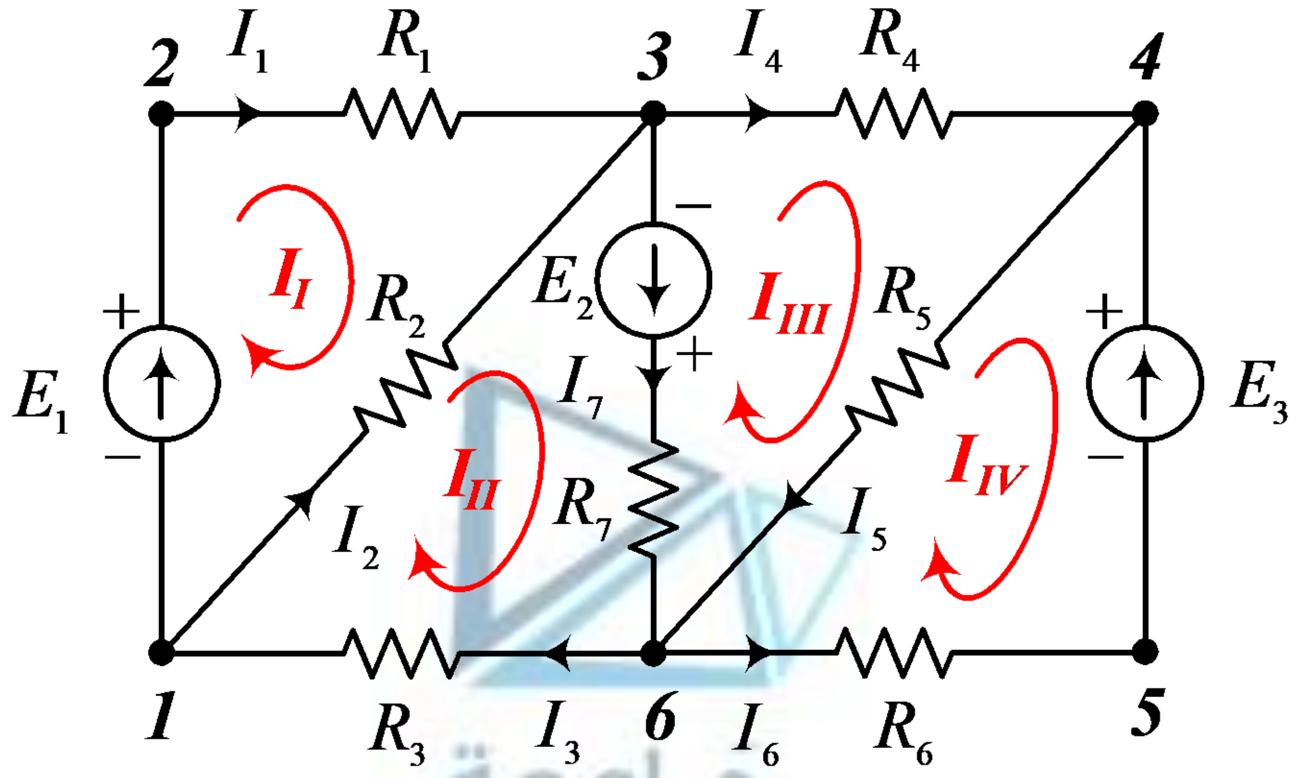
لحساب الدارة باستخدام قانوني كيرشوف نحتاج كما وجدنا سابقاً لحل جملة معادلات عددها مساوٍ لعدد المجاهيل. وتُعد هذه الطريقة عامة وسيئتها الحاجة إلى وقت كبير في الحساب.

استخدام طريقة التيارات الحلقية يسمح بحل المسألة نفسها بأقل عدد من المعادلات، إذا نحتاج فقط إلى B (عدد الحلقات المستقلة) معادلة بدلاً من Z معادلة.

وفقاً لهذه الطريقة نحتاج إلى معرفة عدد الحلقات المستقلة في الدارة، حيث نضع في كل حلقة مستقلة اتجاه افتراضي للتيار، يمثّل التيار الحلقي الخاص بهذه الحلقة، والذي يعبّر عن قيمة حسابية تكون واحدة من أجل جميع عناصر الحلقة، كما في الدارة التالية.

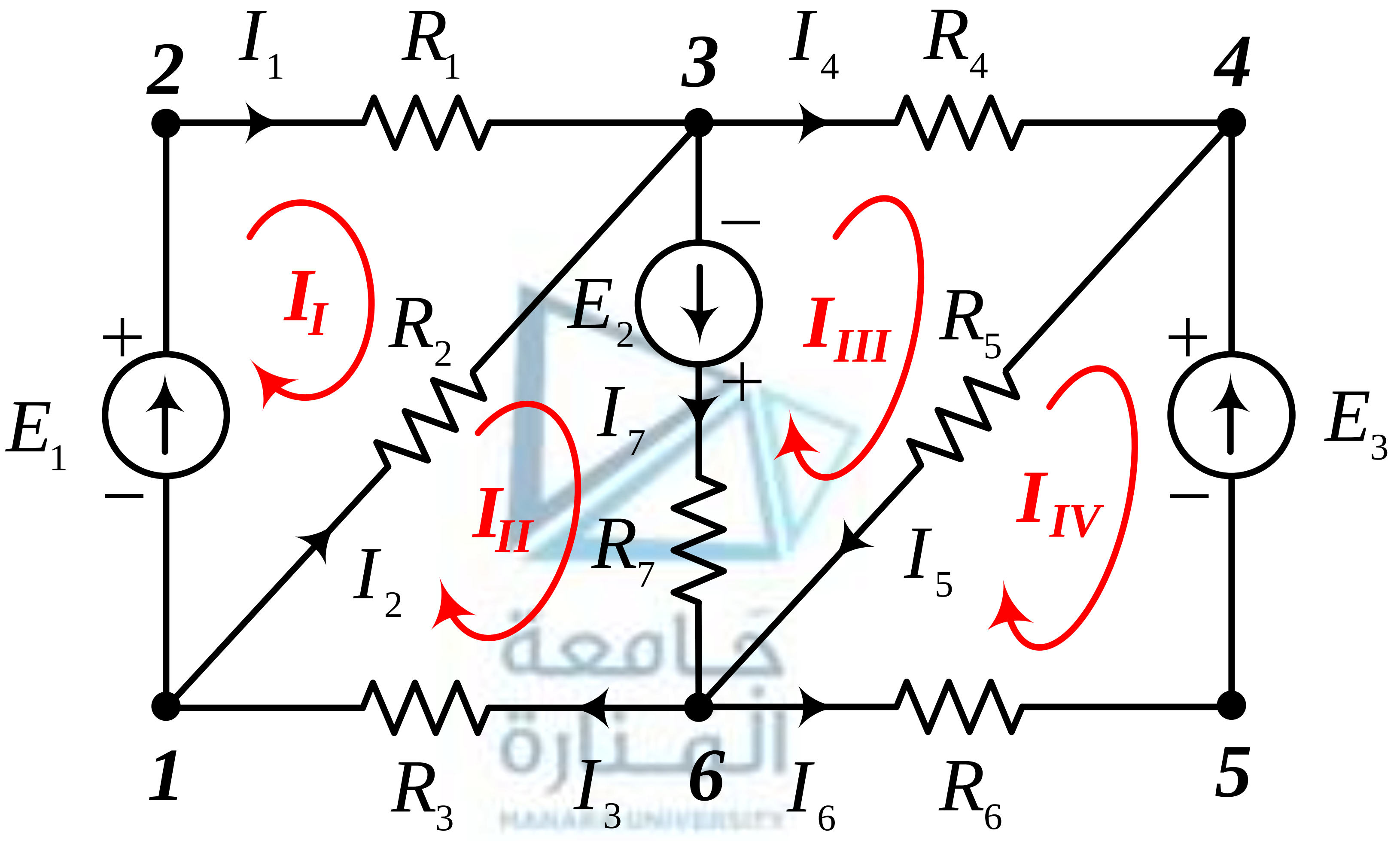


نفرض تيارات حلقية داخل الحلقات المستقلة.



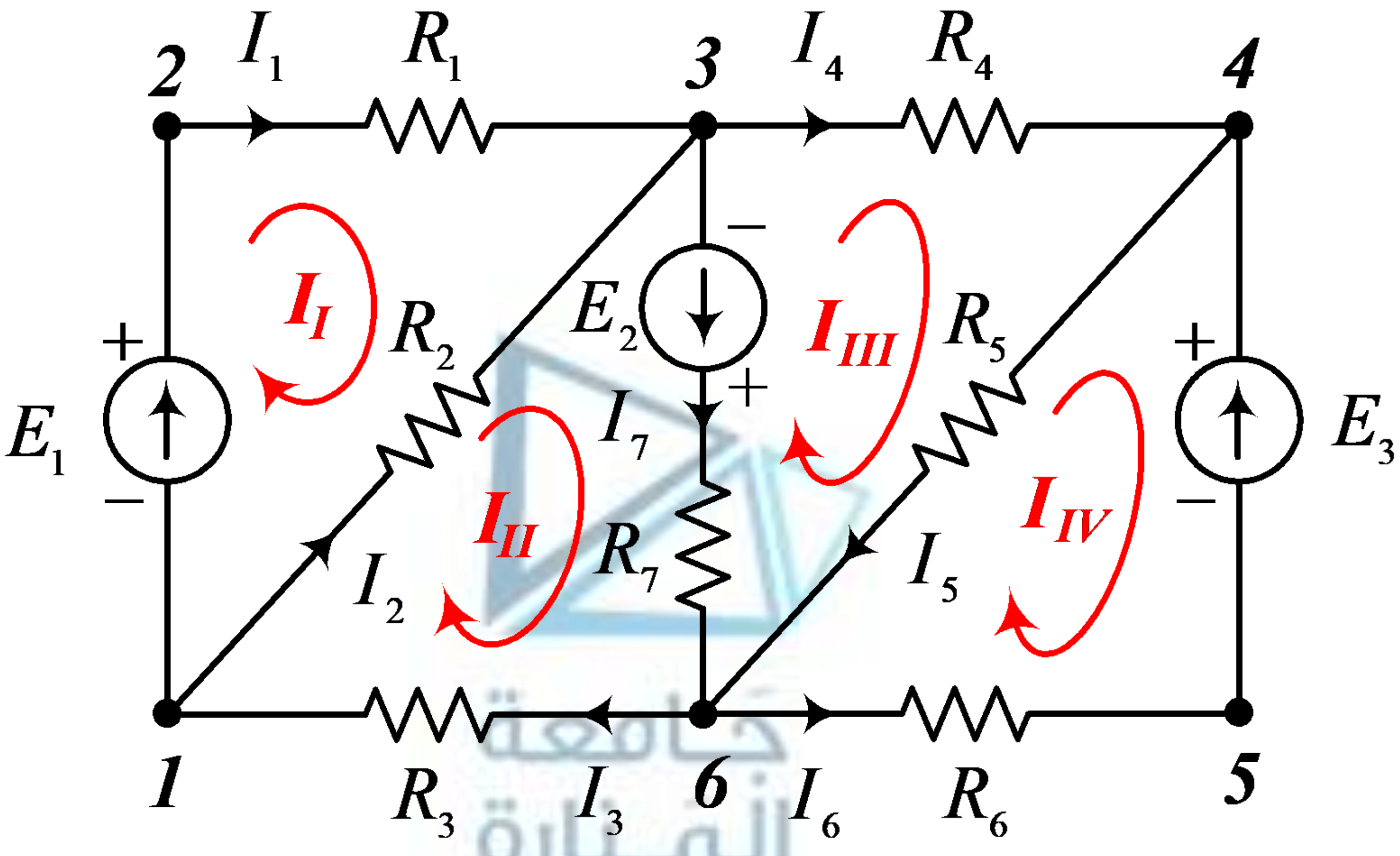
يمكن من خلال الشكل ملاحظة أن الفروع المستقلة في الدارة تكون مشتركة بين حلقتين متجاورتين، وبالتالي تتحد القيمة الفعلية للتيار في مثل هذه الفروع من خلال الجمع الجبري للتيارات الحلقية المتجاورة في الحلقات المشتركة بهذا الفرع. مثلاً: يدخل الفرع 3-1 ذي المقاومة R_2 في مجال الحلقتين المتجاورتين I و II، فالتيار الفعلي I_2 الذي يسري في هذا الفرع يساوي المجموع الجبري للتيارات الحلقية للحلقتين I و II، أي:

$$I_2 = I_{II} - I_I$$



التيار الفعلي المار في المقاومة R_1 هو قيمة التيار الحلقي II نفسه، أي:

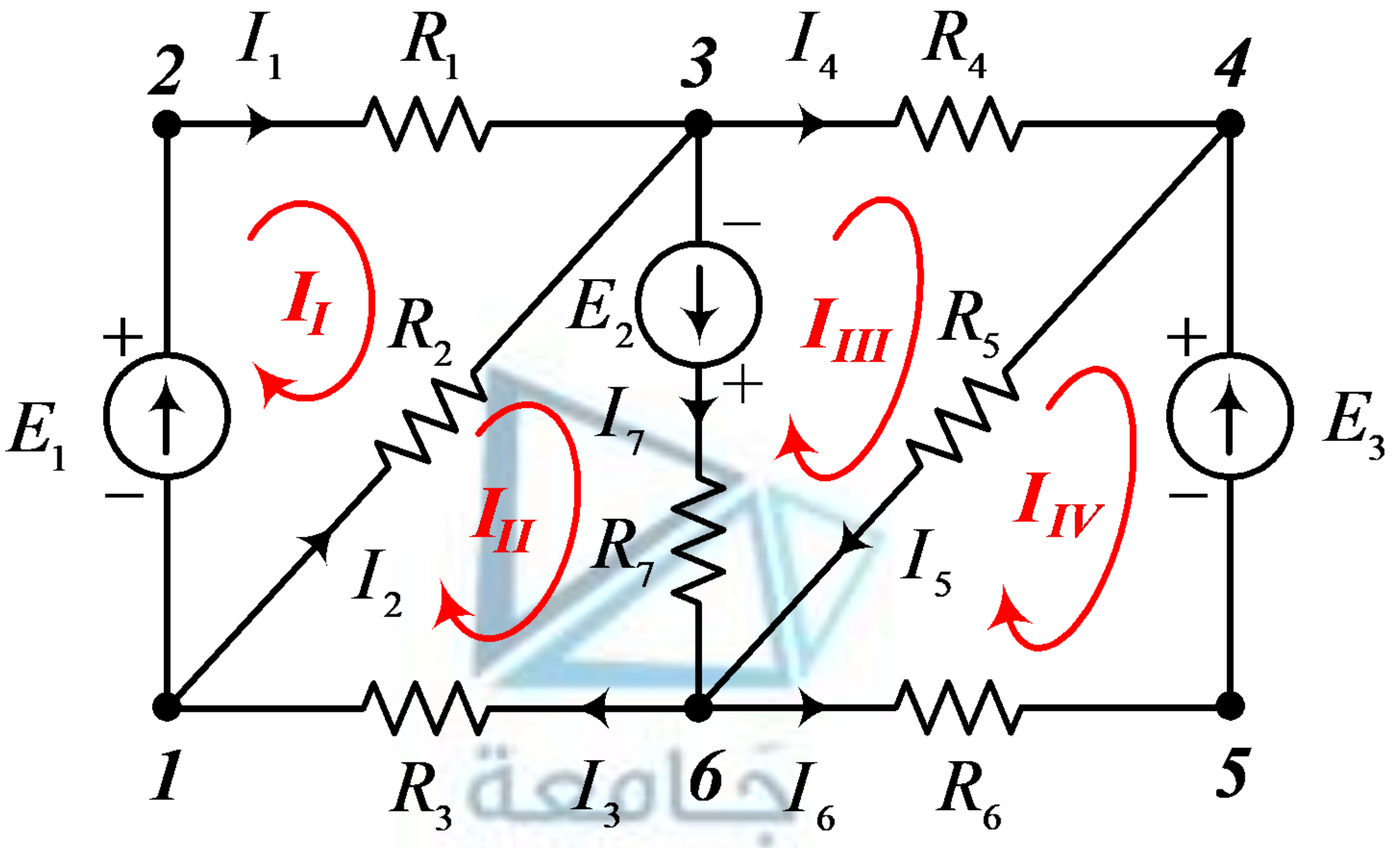
$$I_1 = I_I$$



ويتم بالطريقة نفسها تحديد باقي التيارات في الفروع، فنجد أن:

$$I_3 = I_{II} \quad , \quad I_4 = I_{III} \quad , \quad I_5 = I_{III} - I_{IV}$$

$$I_6 = -I_{IV} \quad , \quad I_7 = I_{II} - I_{III} .$$



تُكتب المعادلات المعتمدة على التيارات الحلقية وفق قانون كيرشوف الثاني كما يأتي:

في الحلقة I: $$E_1 = I_I \cdot (R_1 + R_2) - I_{II} \cdot R_2$$

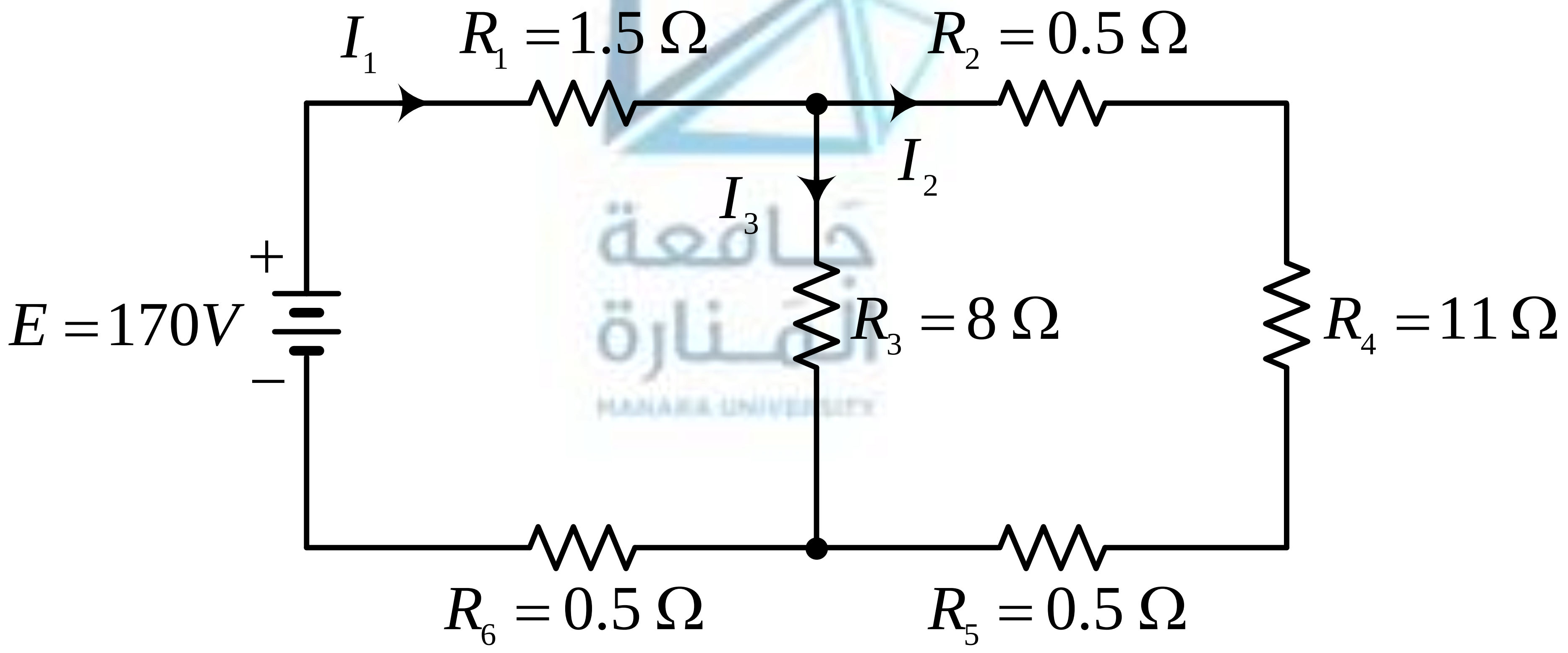
في الحلقة II: $$E_2 = -I_I \cdot R_2 + I_{II} \cdot (R_2 + R_3 + R_7) - I_{III} \cdot R_7$$

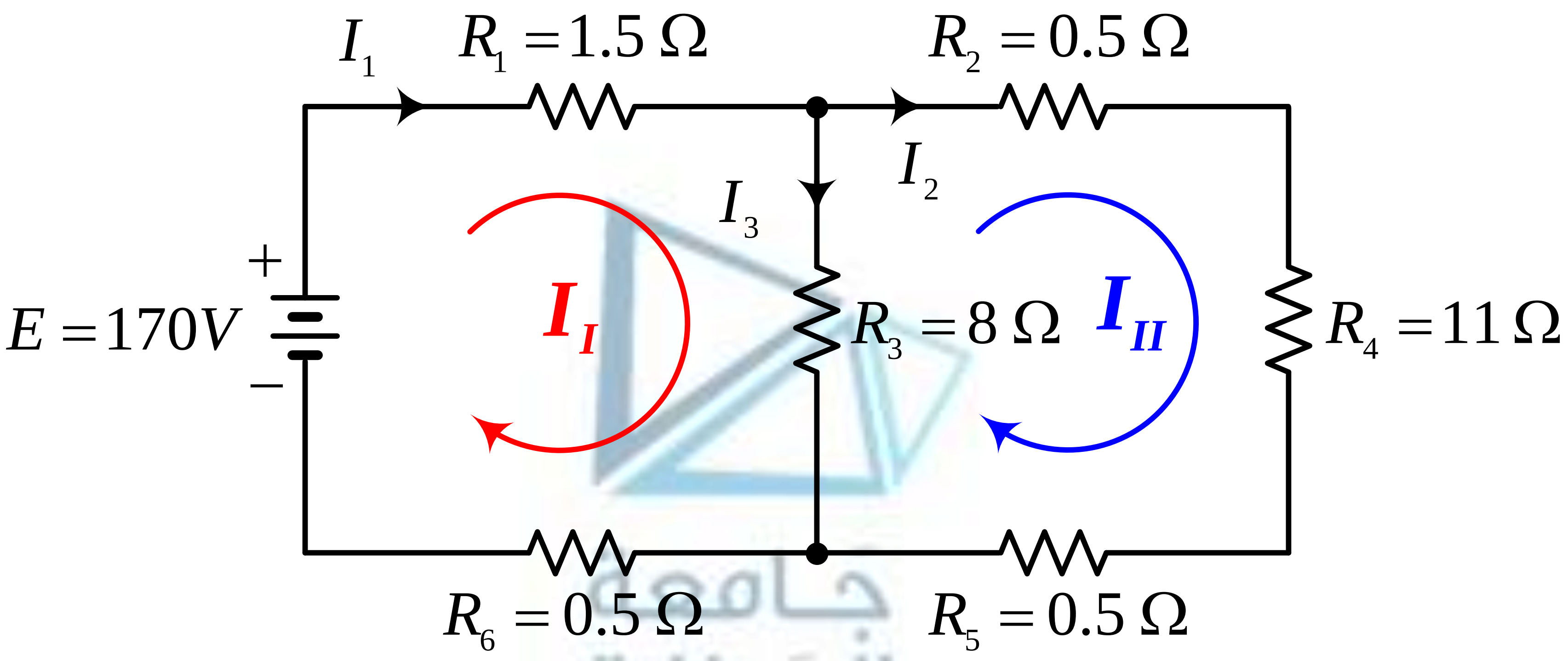
في الحلقة III: $$-E_2 = -I_{II} \cdot R_7 + I_{III} \cdot (R_4 + R_5 + R_7) - I_{IV} \cdot R_5$$

في الحلقة IV: $$-E_3 = I_{IV} \cdot (R_5 + R_6) - I_{III} \cdot R_5$$

مثال:

احسـب قـيم التيـارات في الـدارة المبينـة بالشـكل، وذلـك باسـتخدام طريقـة التيارات الحلقية (ماكسويل).

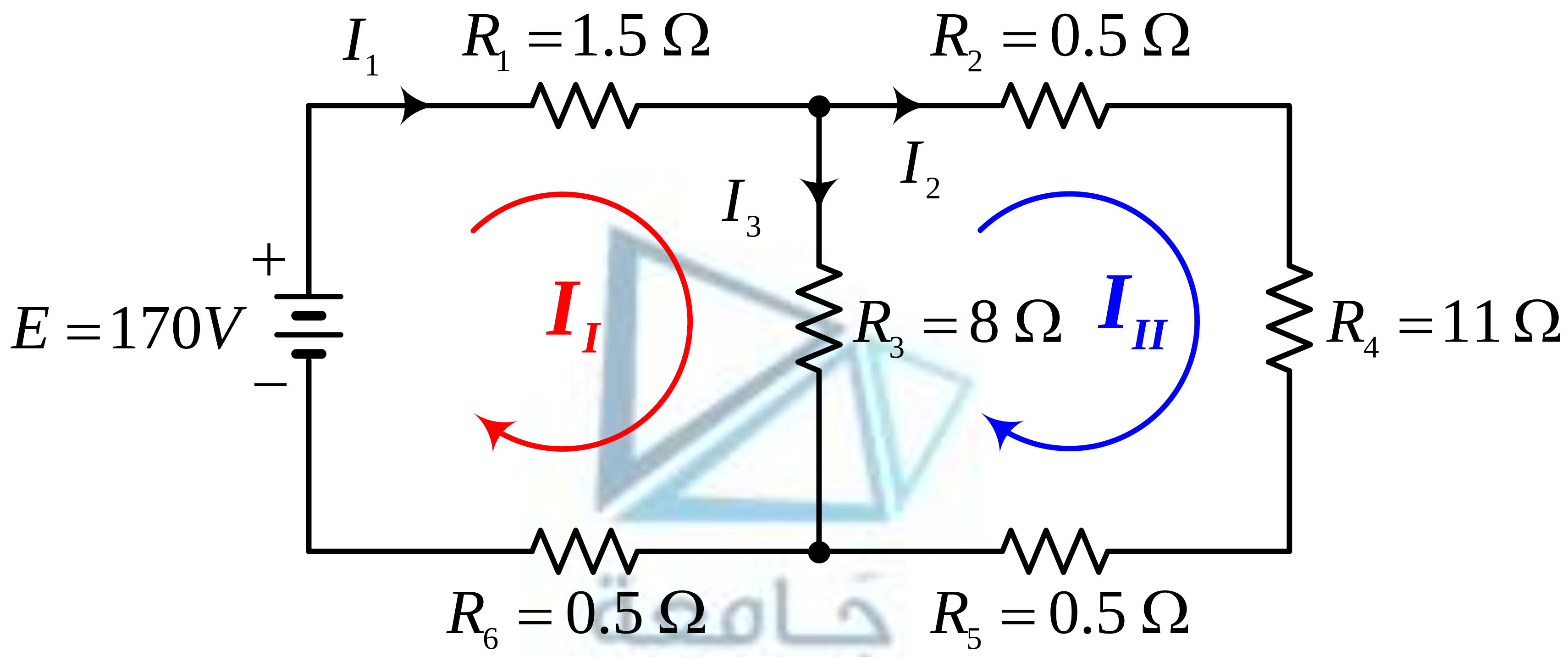




معادلة الحلقة الأولى I:

$$E = I_I \cdot (R_1 + R_3 + R_6) - I_{II} \cdot R_3$$

$$170 = 10 I_I - 8 I_{II} \qquad (1)$$



معادلة الحلقة الثانية II:

$$0 = I_{II} \cdot (R_2 + R_3 + R_4 + R_5) - I_I \cdot R_3$$

$$0 = 20 I_{II} - 8 I_I \Rightarrow I_I = \frac{20}{8} \cdot I_{II} \qquad (2)$$

$$170 = 10I_I - 8I_{II} \qquad (1)$$

$$0 = 20I_{II} - 8I_I \Rightarrow I_I = \frac{20}{8} \cdot I_{II} \qquad (2)$$

نعوض (2) في (1):

$$170 = 10 \cdot \frac{20}{8} \cdot I_{II} - 8I_{II} \Rightarrow I_{II} = \frac{170}{17} = 10\,[A] \Rightarrow I_2 = 10\,[A]$$

نعوض في (2):

$$I_I = \frac{20}{8} \times 10 = \frac{200}{8} = 25\,[A] \Rightarrow I_1 = 25\,[A]$$

التيارفي الفرع المشترك I_3 يساوي:

$$I_3 = I_I - I_{II} = 25 - 10 = 15\,[A]$$

نظرية التنضّد Superposition Theorem:

يُستخدم مبدأ التنضّد لحساب الدارات الكهربائية الحاوية على منابع قدرة مختلفة التردد، ويكون مناسباً جداً عند وجود عدد قليل من المنابع في الدارة.

بالمقارنة ببقية طرق حساب الدارات الكهربائية فإن نظرية التنضّد تتمتع بمزايا جيدة في تلك الحالات عندما لا يُطلب حساب الدارة بشكل كامل، وإنما يطلب حساب قيمة التيارات في أجزاء الدارة الحاوية على منابع تغذية فقط، مثلاً.

تتلخّص نظرية التنضّد في أن تأثير عدة منابع تغذية (منابع جهد، تيار،..) في الدارة الكهربائية يكافئ تأثيرات كل منبع من هذه المنابع على حده.

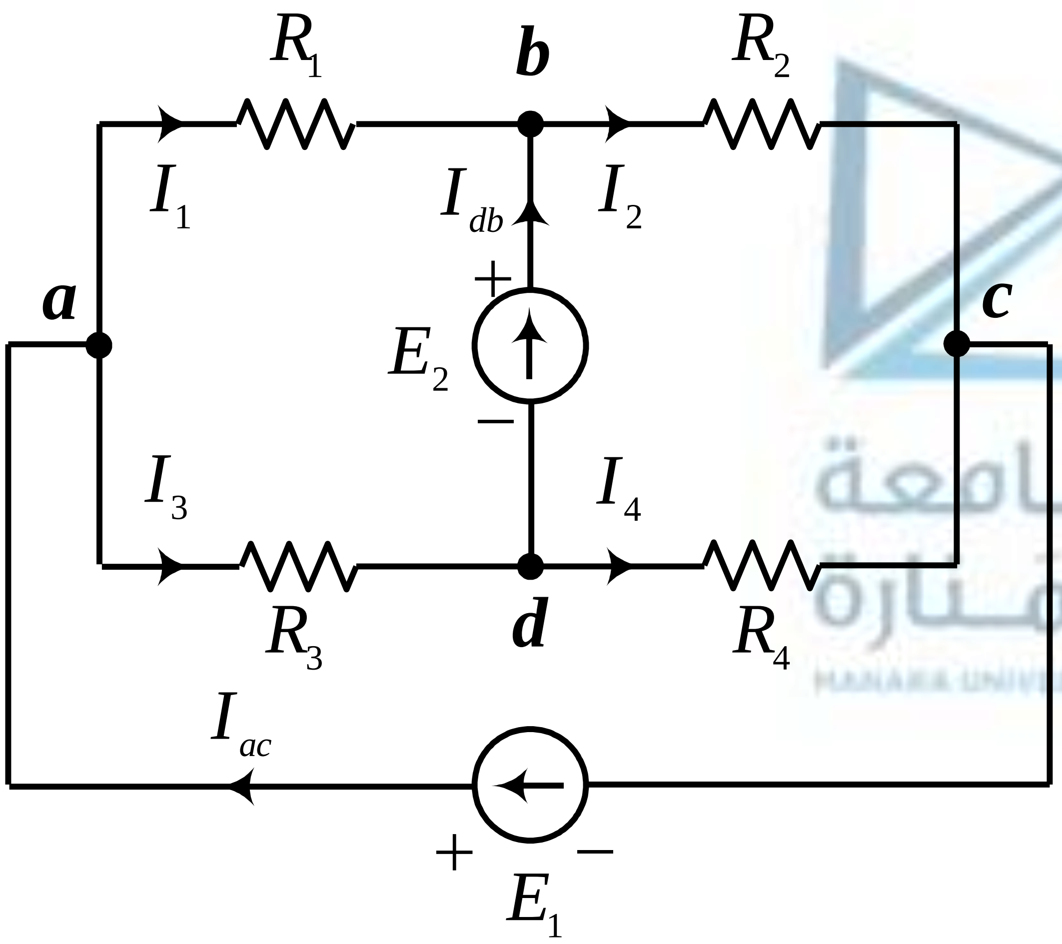
نظرية التنضّد Superposition Theorem:

أثناء إجراء الحساب باستخدام مبدأ التنضّد للدارة المدروسة ذات عدة منابع تغذية يتم استبدالها بعدة دارات حسابية كهربائية كلٍ منها تعمل بمنبع تغذية واحد من المنابع الموجودة في الدارة الأساسية. أي أن عدد الدارات التي سندرسها يساوي عدد منابع التغذية في الدارة الأساسية. في هذه الحالة يتم قصر (**Short Circuit**) منابع الجهد الموجودة وغير المدروسة في الدارة (استبدالها بسلك عديم المقاومة)، في حين يتم حذف منابع التيار غير المدروسة بفتح الدارة (**An Open Circuit**) في مكان وجوده (مقاومة لا نهائية)، ويبقى في الدارة فقط المنبع الذي نريد دراسة تأثيره فيها.

نظرية التنضّد Superposition Theorem:

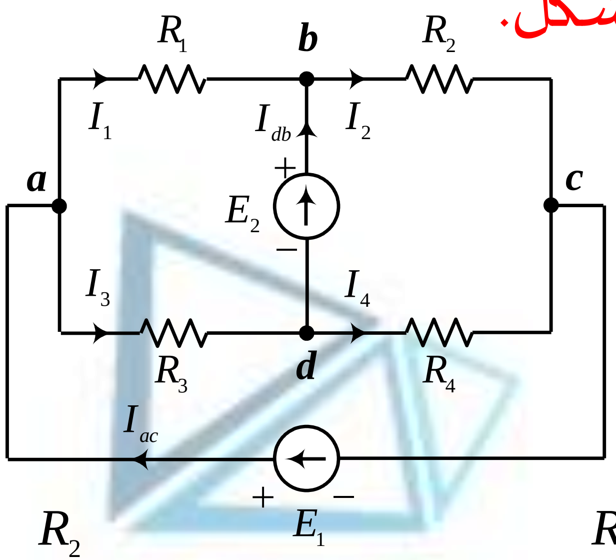
نتيجة الحساب فإن كل دارة من الدارات الحاوية على منبع واحد تعطي مركبة التيارات الناتجة عن المنبع بمفرده. وتتحدّد قيم التيارات الفعلية بالجمع الجبري لمركبات التيارات في كل فرع من الدارات الحاوية على المنابع المنفردة.

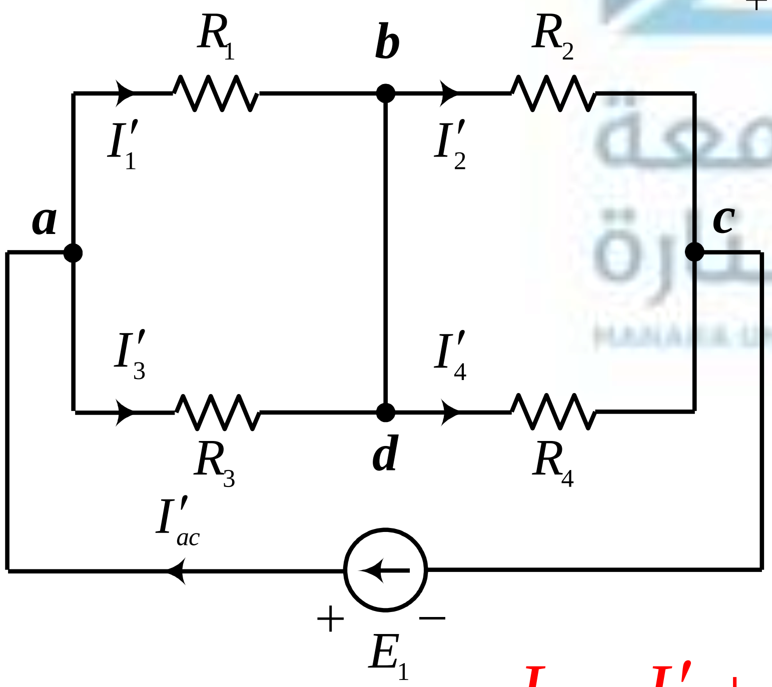
نظرية التنضّد Superposition Theorem:

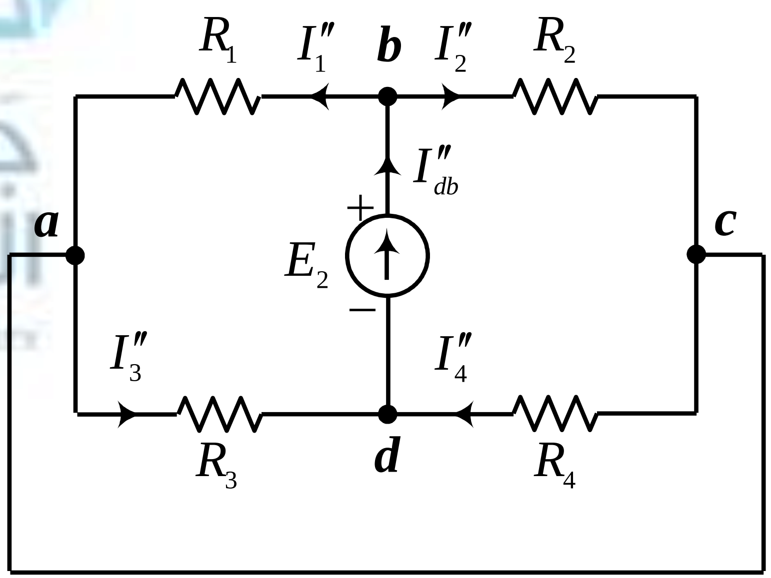


فمن أجل الدارة المبينة بالشكل الحاوية على منبعي تغذية، فإن الدارة تتحول إلى دارتين كلٍ منهما تحتوي على منبع تغذية واحد، أما الثاني فيتم قصره واستبعاده من الدارة.

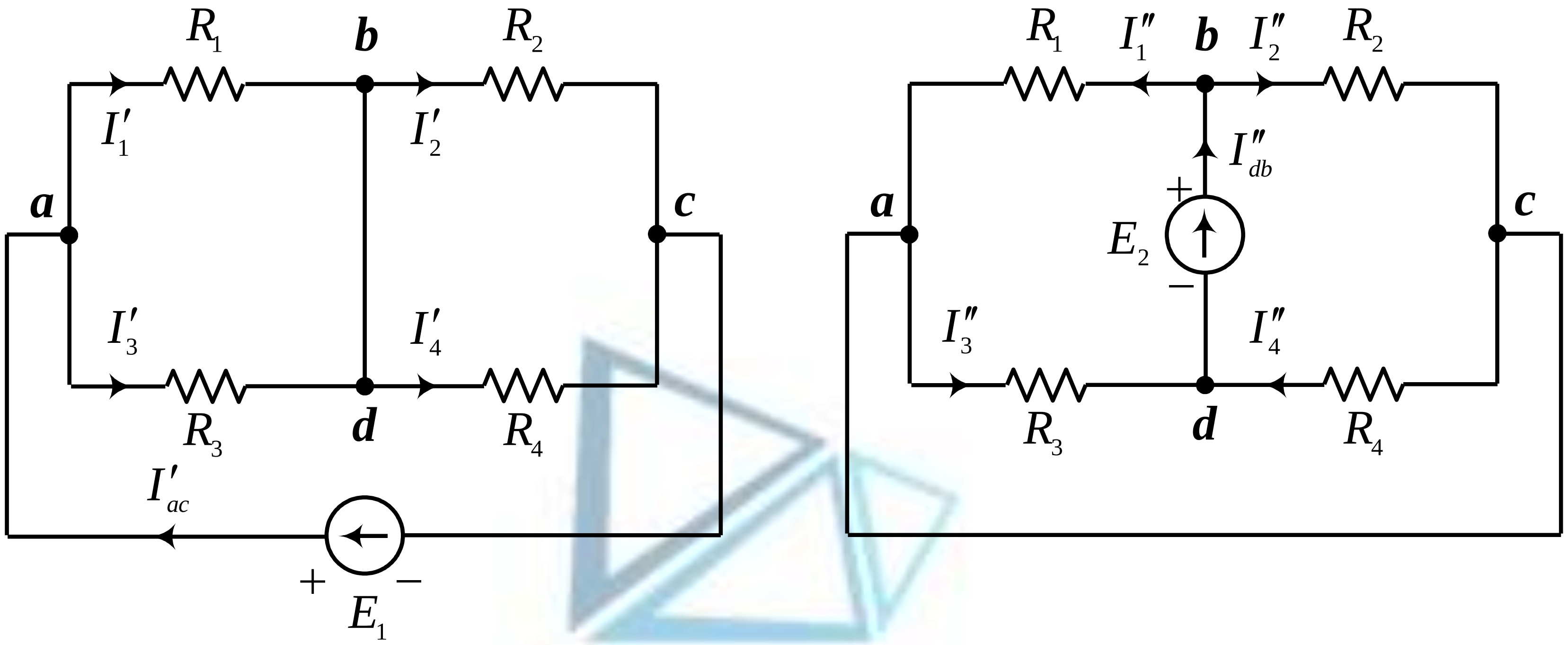
لحساب الدارة وفق مبدأ التنضّد يتم إنشاء دارتين من الدارة الأساسية (حسب عدد منابع التغذية) كل منهما بمنبع تغذية واحد، كما في الشكل.







$$I_3 = I'_3 + I''_3 \quad , \quad I_2 = I'_2 + I''_2 \quad , \quad I_1 = I'_1 - I''_1$$

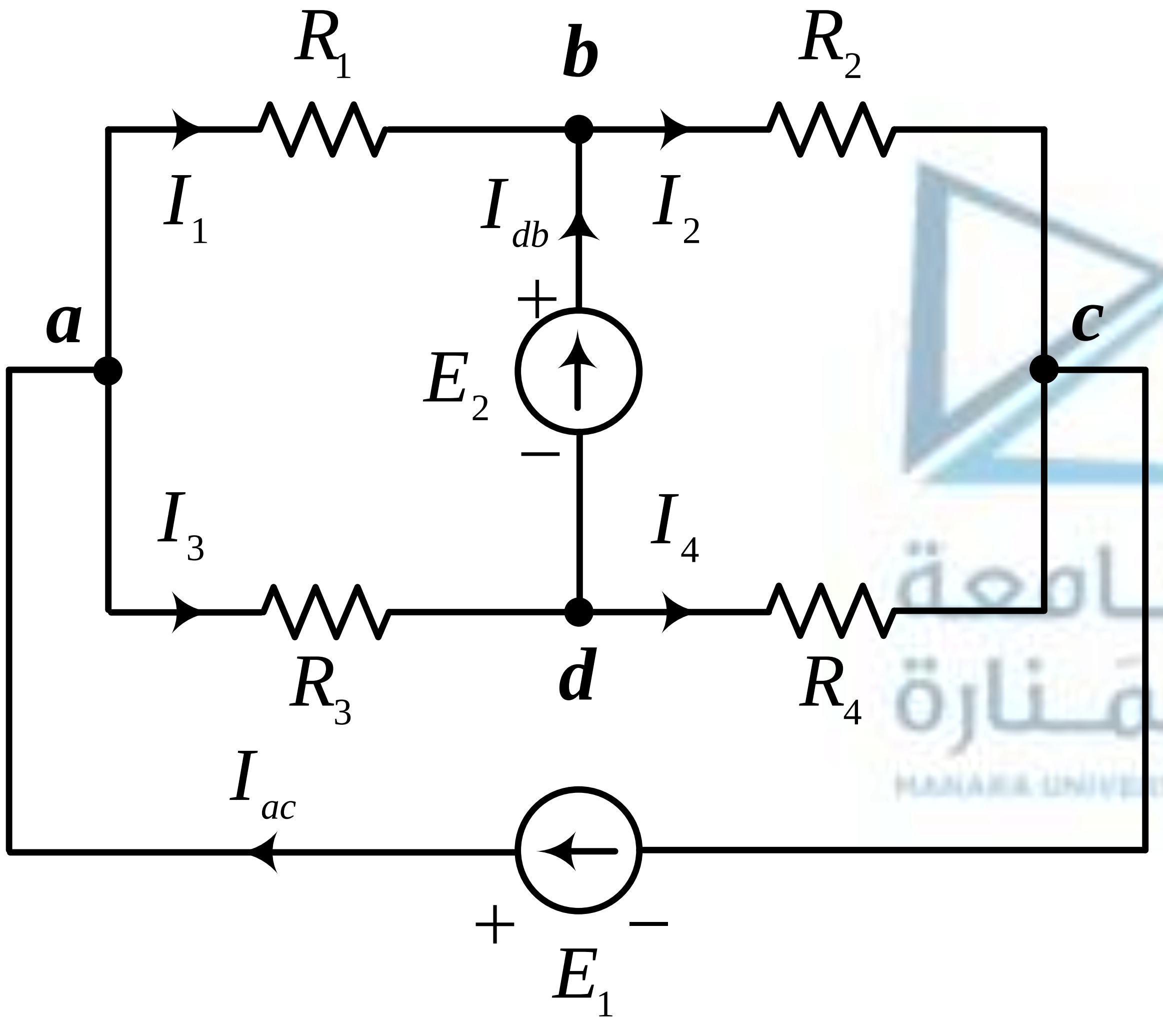


يتم حساب كل دارة من الدارات الفرعية الحاوية على منبع تغذية واحد فقط باستخدام طرق التبسيط المعروفة سابقاً. بعد ذلك تتحدّد التيارات في كل فرع من فروع الدارة الأساسية بالجمع الجبري للتيارات الجزئية للفرع نفسه، مثلاً:

$$I_3 = I_3' + I_3'' \quad , \quad I_2 = I_2' + I_2'' \quad , \quad I_1 = I_1' - I_1''$$

مثال:

احسـب قيمـة التيـارات في الدارة المبينة بالشكل، وذلك باستخدام نظريـة التنضّـد، علماً بأن:



$$E_1 = 120[V]$$

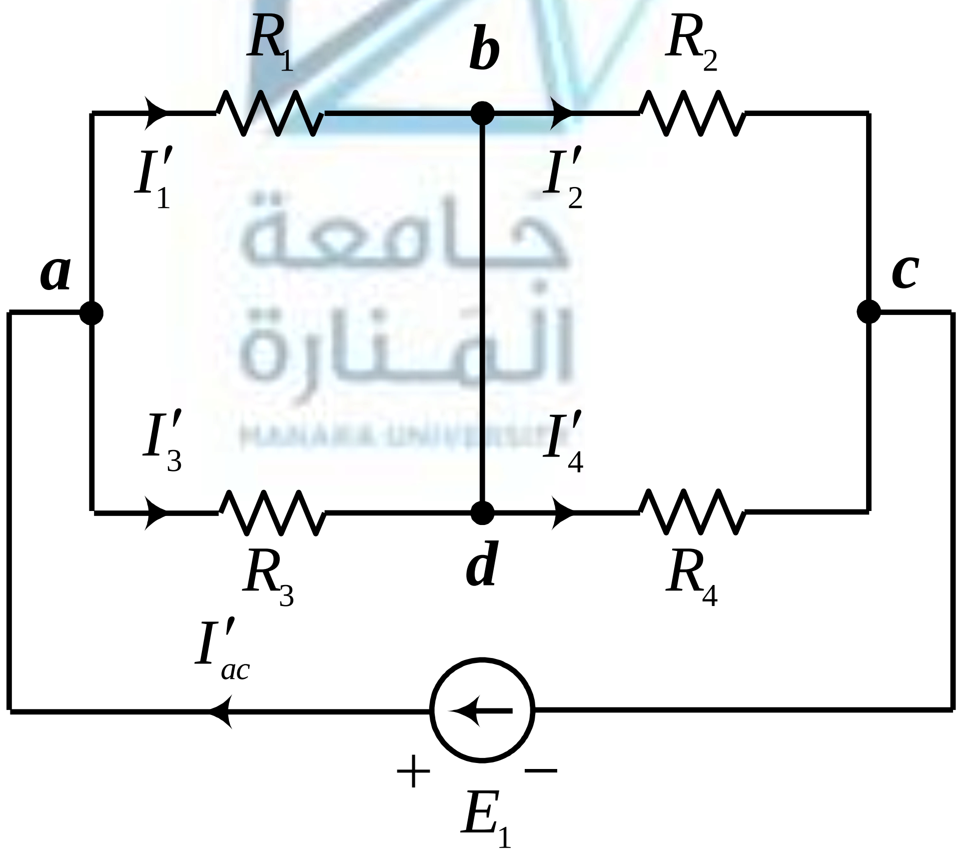
$$E_2 = 100[V]$$

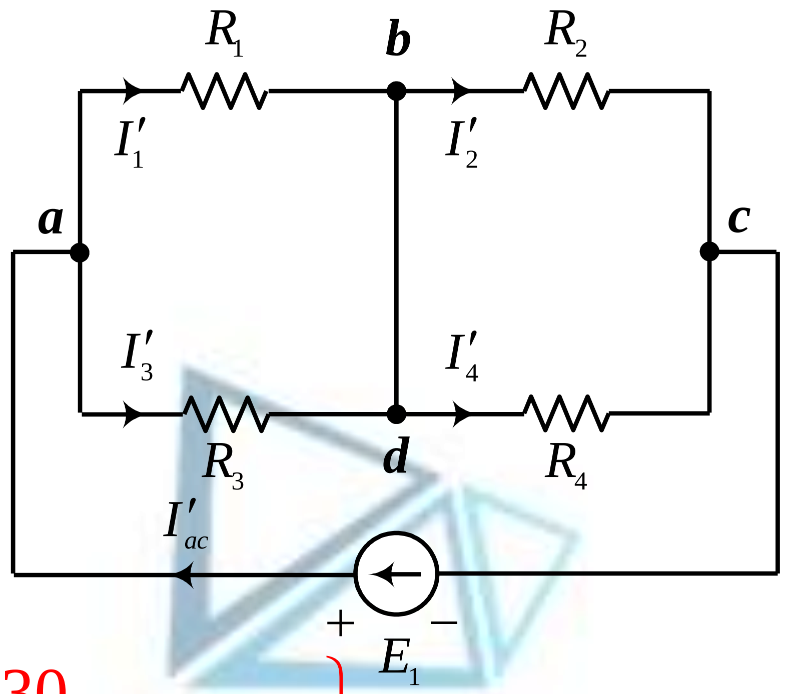
$$R_1 = R_2 = 20\ [\Omega]$$

$$R_3 = R_4 = 30\ [\Omega]$$

الحل:

كما ذكرنا سابقاً، بما أن الدارة تحوي منبعي جهد، فسنشكل منها دارتين كل منها بمنبع جهد واحد، حيث سندرس تأثيركل منبع على حده في الدارة. نَجعل في الدارة الأولى $E_2=0$ وندرس تأثير المنبع E_1، أي نحسب التيارات الناتجة عن تأثيرهذا المنبع:

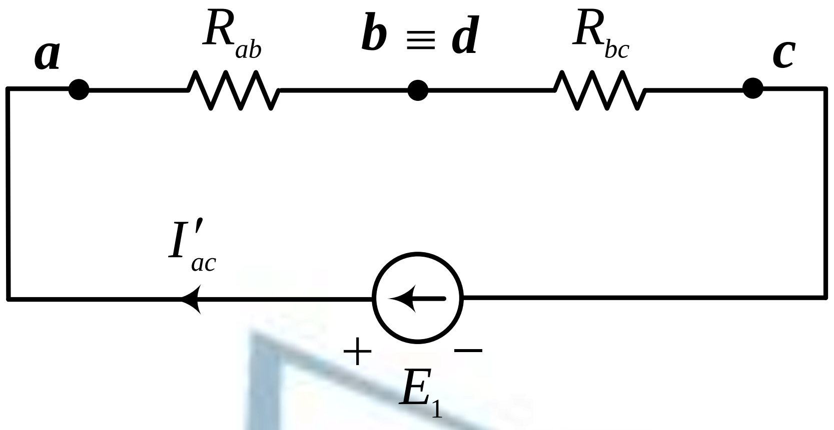


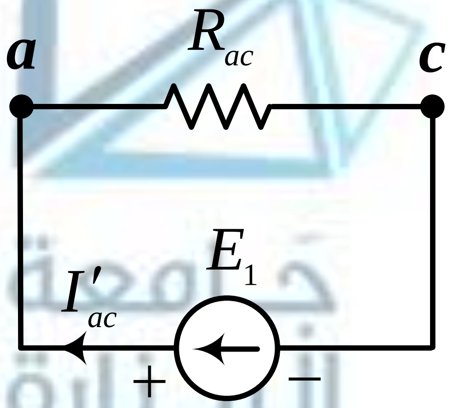


$$\left.\begin{aligned} R_{ab} &= \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3} = \frac{20 \times 30}{20+30} = 12\ [\Omega] \\ R_{bc} &= \frac{R_2 \cdot R_4}{R_2 + R_4} = \frac{20 \times 30}{20+30} = 12\ [\Omega] \end{aligned}\right\} \Rightarrow R_{ac} = R_{ab} + R_{bc} = 12 + 12 = 24\ [\Omega]$$

$$\Rightarrow I'_{ac} = \frac{E_1}{R_{ac}} = \frac{120}{24} = 5\ [A].$$

أي أن الدارة تصبح في هذه الحالة كما هو موضّح في الشكل التالي:





المقاومتان بين العقدتين a و b وبين b و c متساويتان ($12\ [\Omega]$)، ولذلك يكون الجهد بين العقدتين a و b وبين b و c متساويان أيضاً، أي:

$$V'_{ab} = V'_{bc} = I'_{ac} \cdot R_{ab} = I'_{ac} \cdot R_{bc} = 5 \times 12 = 60\ [V]$$

بالتالي تكون قيم التيارات في هذه الدارة كما يأتي:

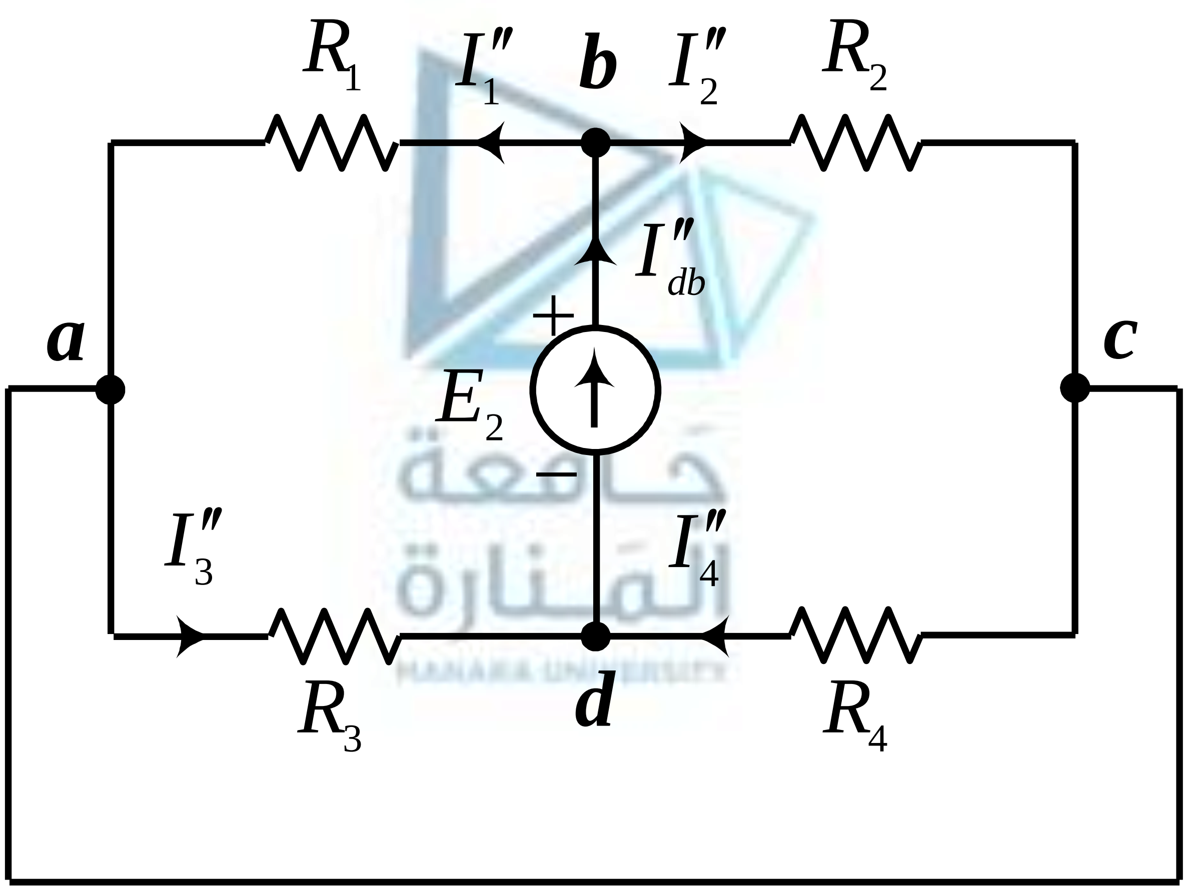
$$I_1' = \frac{V_{ab}'}{R_1} = \frac{60}{20} = 3\,[A]$$

$$I_2' = \frac{V_{bc}'}{R_2} = \frac{60}{20} = 3\,[A]$$

$$I_3' = \frac{V_{ab}'}{R_3} = \frac{60}{30} = 2\,[A]$$

$$I_4' = \frac{V_{bc}'}{R_4} = \frac{60}{30} = 2\,[A]$$

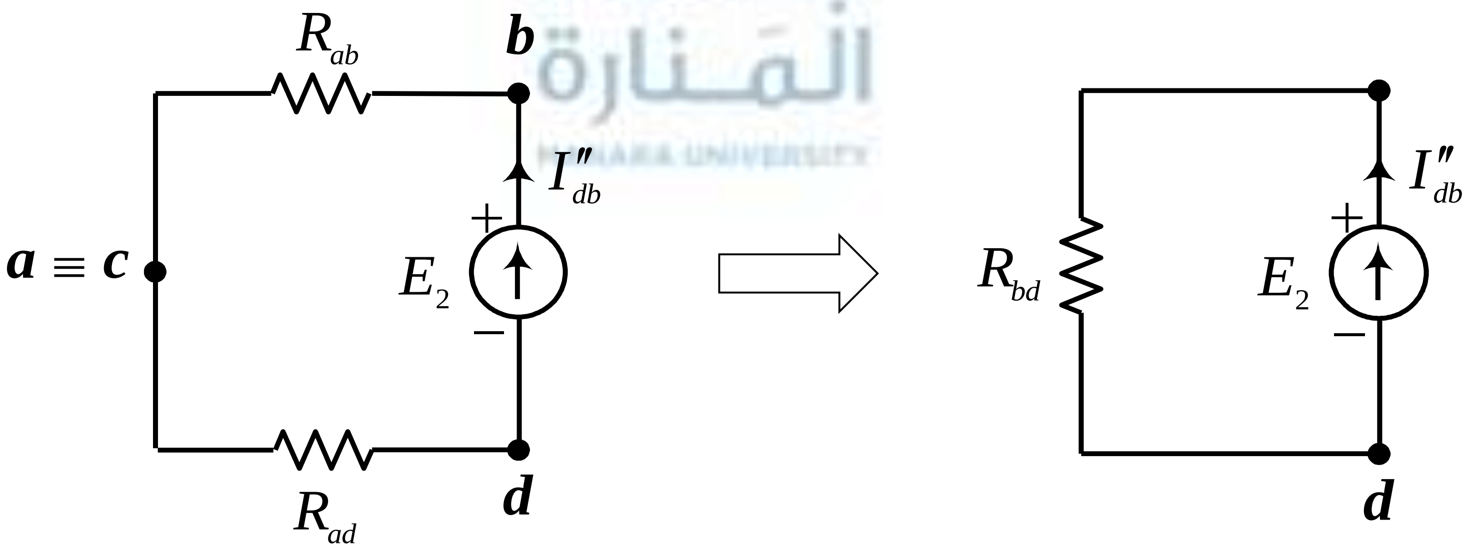
في الدارة الثانية نجعل $E_1=0$ وندرس تأثير المنبع E_2، أي نحسب التيارات الناتجة عن تأثير هذا المنبع:

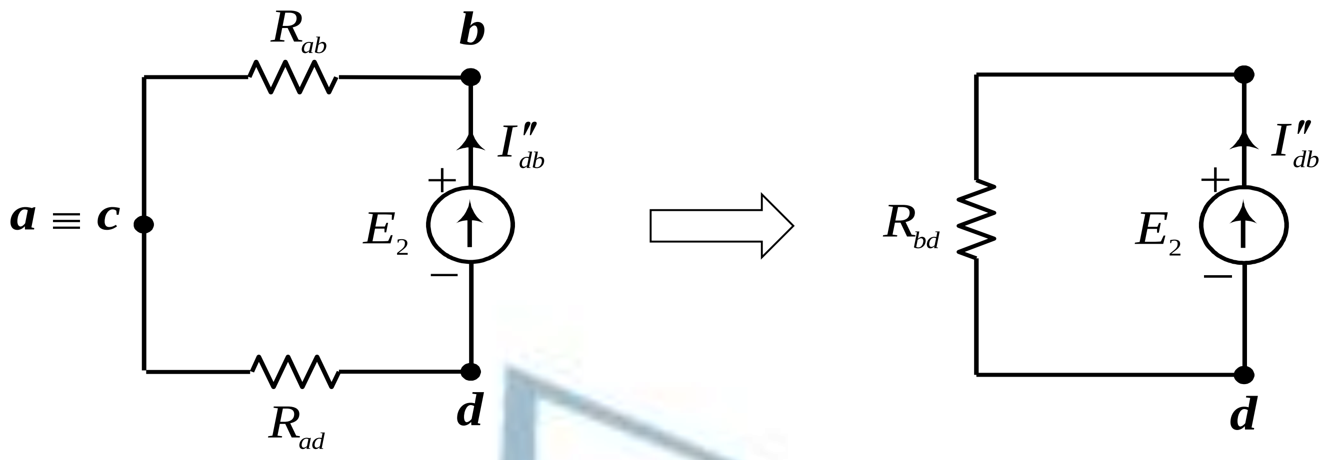


$$\left.\begin{aligned} R_{ab} &= \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{20\times 20}{20+20} = 10\ [\Omega] \\ R_{ad} &= \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4} = \frac{30\times 30}{30+30} = 15\ [\Omega] \end{aligned}\right\} \Rightarrow R_{db} = R_{ab} + R_{ad} = 10+15 = 25\ [\Omega]$$

$$\Rightarrow I''_{db} = \frac{E_2}{R_{db}} = \frac{100}{25} = 4\ [A].$$

أي أن الدارة تصبح في هذه الحالة كما هو موضّح في الشكل التالي:





الجهد بين العقدتين a و b:

$$V''_{ab} = I''_{db} \cdot R_{ab} = 4 \times 10 = 40\,[V]$$

الجهد بين العقدتين a و d:

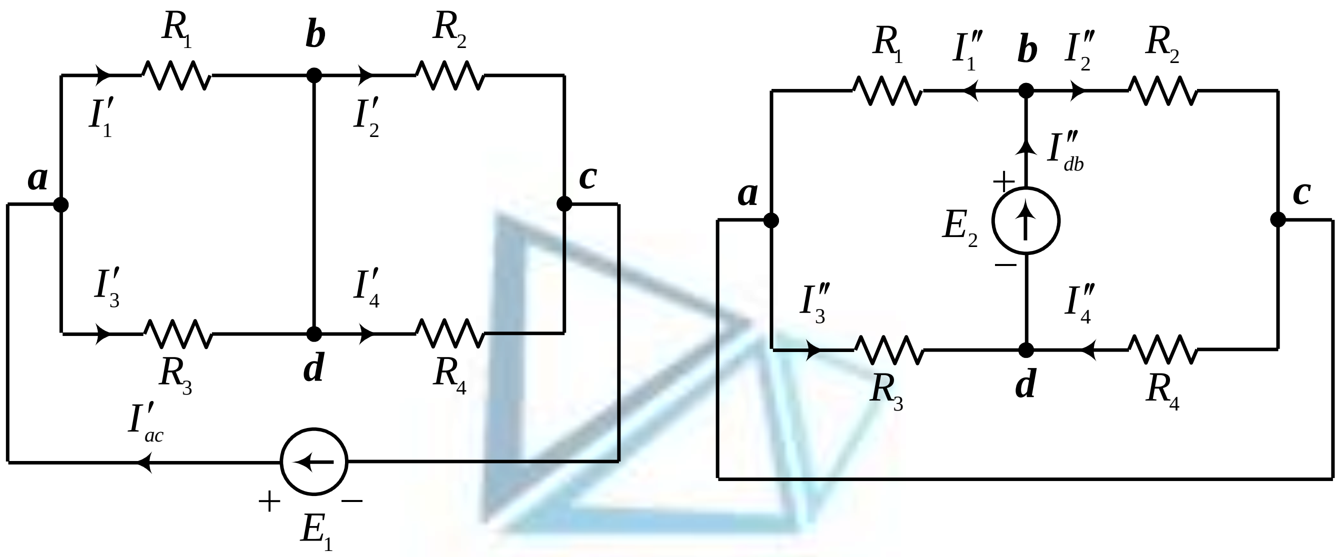
$$V''_{ad} = I''_{db} \cdot R_{ad} = 4 \times 15 = 60\,[V]$$

بالتالي تكون قيم التيارات في هذه الدارة كما يأتي:

$$I''_1 = \frac{V''_{ab}}{R_1} = \frac{40}{20} = 2\,[A] \quad , \quad I''_2 = \frac{V''_{ab}}{R_2} = \frac{40}{20} = 2\,[A]$$

$$I''_3 = \frac{V''_{ad}}{R_3} = \frac{60}{30} = 2\,[A] \quad , \quad I''_4 = \frac{V''_{ad}}{R_4} = \frac{60}{30} = 2\,[A]$$

وفقاً لذلك تكون قيم التيارات في الدارة الأساسية كما يأتي:



$$I_1 = I_1' - I_1'' = 3 - 2 = 1 \quad [A]$$

$$I_2 = I_2' + I_2'' = 3 + 2 = 5 \quad [A]$$

$$I_3 = I_3' + I_3'' = 2 + 2 = 4 \quad [A]$$

$$I_4 = I_4' - I_4'' = 2 - 2 = 0 \quad [A]$$

$$I_{ac} = I_{ac}' = 5\,[A]\;,\; I_{ac}'' = 0 \;\; [A]$$

$$I_{db} = I_{db}'' = 4\,[A]\;,\; I_{db}' = 0 \;\; [A]$$