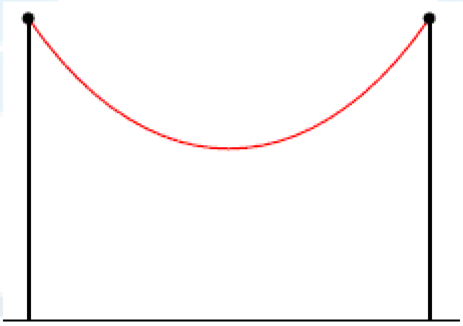
التوابع الشهيرة

درسنا سابقاً توابع تقليديّة : $\exp, \ln, \cos, \sin, \tan$, وسنضيف إلى مجموعتنا في هذا الفصل التّوابع الآتية : $\tanh$, $\sinh$, $\cosh$

$\mathrm{Argtanh}$, $\mathrm{Argcosh}$, $\mathrm{Argsinh}$,$\arctan$, $\arccos$, حيث إنّ هذه التّوابع، تظهر غالباً في حلول معادلات بسيطة, خاصّة ٍفي مسائل الفيزياء، فعلى سبيل المثال عندما يتدلّى خيط بين قطبين (أو طوق معلّق بين يدين)، يكون المنحنى في هذه الحالة على شكل سلسلة، وتكتب معادلتها على شكل جيب التّمام الزّائديّ، ومتغيّر a (يعتمد على طول السّلسلة، والتّباعد بين القوائم).

$$y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$



الشّكل (1)

1. التّابع الثابت :

التّابع الثابت هو تابع معرّف على $I = \mathbb{R}$ كما يلي :

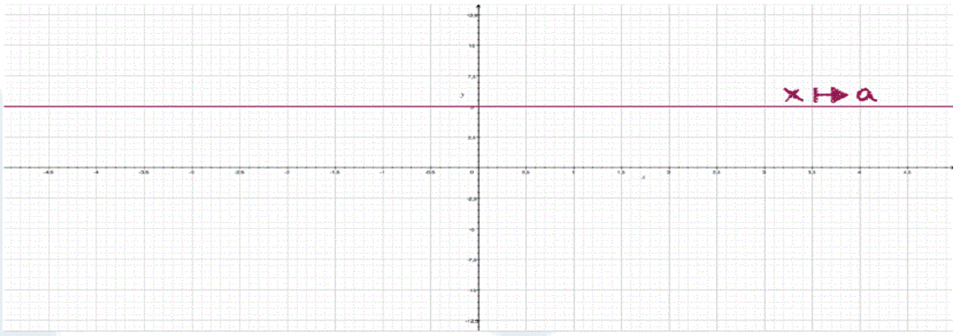
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto a$$

حيث a عدد حقيقيّ.

يمكننا ببساطة أن نبيّن أنّ :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = a$$



الشّكل (2) : التّابع الثّابت $f(x) = a$

2. التّابع المطابق :

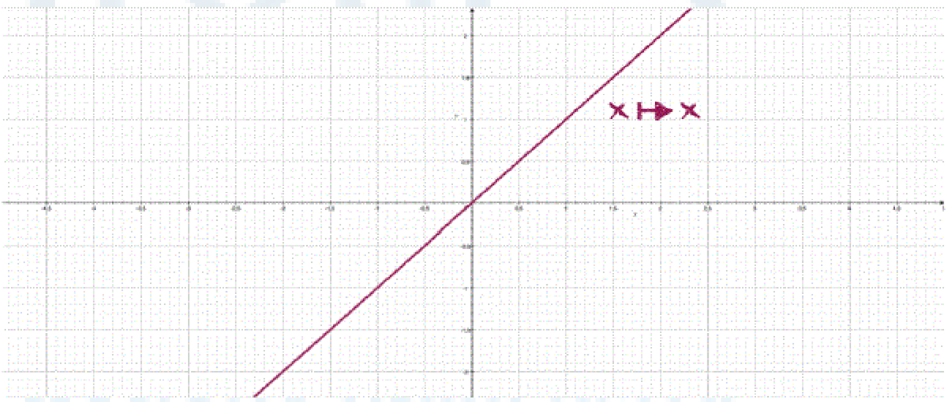
التّابع المطابق هو تابع معرّف على $I = \mathbb{R}$ كما يلي :

$$Id: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x$$

في الواقع التّابع المطابق ما هو إلا التّابع الخطّي $f(x) = mx$، حيث $m = 1$، نذكر أنه بالقيام بإزاحة على التّابع الخطّي $x \mapsto mx$ بمقدار p (إما للأعلى إذا كان p موجباً أو للأدنى إذا كان p سالباً) سنحصل على التّابع الخطّي $x \mapsto mx + p$ ، و بإمكاننا أن نرى بسهولة أن :

$$\lim_{x\to+\infty} Id\,(x) = +\infty \quad , \qquad \lim_{x\to-\infty} Id(x) = -\infty$$



الشّكل (3): التّابع المطابق

3. تابع القيمة المطلقة :

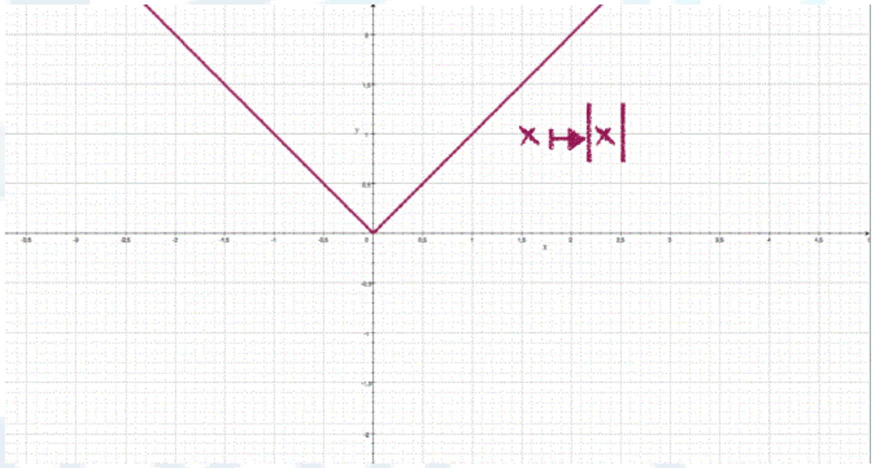
تابع القيمة المطلقة هو تابع معرّف على $I = \mathbb{R}$ كما يلي :

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & if \quad x \geq 0 \\ -x & if \ x < 0 \end{cases}$$

يمكننا ببساطة إيجاد أنّ :

$$\lim_{x \to +\infty} |x| = \lim_{x \to -\infty} |x| = +\infty$$



الشّكل (4) : تابع القيمة المطلقة

الخاصّة الآتية من الخصائص المهمّة لتابع القيمة المطلقة :

خاصّة :

ليكن التّابع f المعرّف على المجال $I \subseteq \mathbb{R}$. يقال عن التّابع f، إنّه محدود على المجال I إذا كان التّابع الآتي محدوداً :

$$|f|: x \mapsto |f(x)| \quad ; \forall x \in I$$

4. تابع الجزء الصّحيح :

تابع الجزء الصّحيح الّذي نرمزله E، هو التّابع المعرّف بالشّكل :

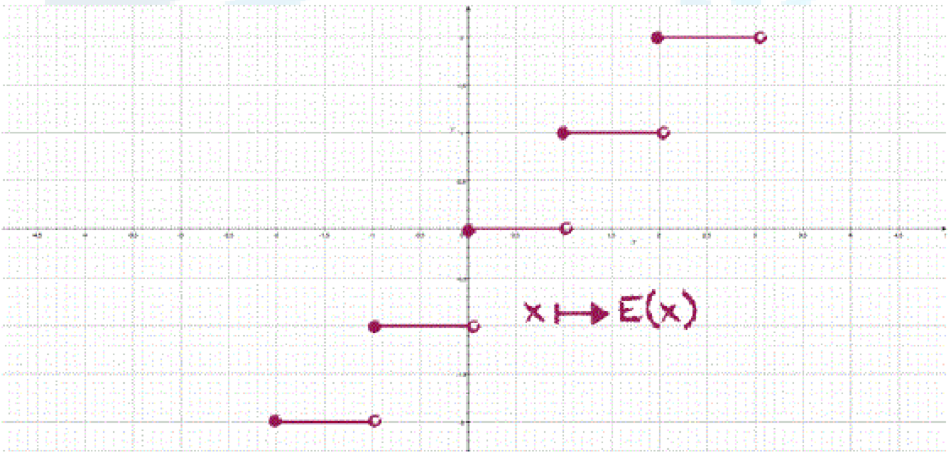
$$E: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto E(x)$$

حيث من أجل كلّ $x \in \mathbb{R}$, يوجد عدد حقيقيّ، وحيد، صحيح, يُدعى الجزء الصّحيح للعدد x، ويُرمزله $E(x)$، ويحقّق :

$$E(x) \leq x \leq E(x) + 1$$

التّابع E متزايد على $\mathbb{R}$، وثابت على كافّة المجالات ذات الشّكل $[n, n+1]$ حيث $n \in \mathbb{Z}$, كما يمكن أن نلاحظ أنّ بيان التّابع E متقطّع درجي.



الشّكل (5) : تابع الجزء الصّحيح

5. تابع القوى الصّحيحة :

لنبدأ بتذكر تعريف قوة العدد الصّحيح :

تعريف :

ليكن $a \in \mathbb{R}$ عدداً حقيقيّاً غير معدوم، وn عدداً طبيعيّاً, تعرف قوّة العدد a من الدّرجة n بالشّكل :

$$a^n = a \times a \times a \times \ldots \times a$$

حيث a مضروب بنفسه n مرّة)، عندما $n = 0$، يكون $a^0 = 1$.

خاصة :

ليكن a, b عددين حقيقيّين، وليكن n, p عددين طبيعيّين. الخصائص الآتية محقّقة :

$$a^n \cdot a^n = a^{n+p} \ , \ (a^n)^p = a^{np} \, , \ a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

عندما $b \neq 0$ يكون :

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n , \quad b^n = \frac{1}{b^{-n}}$$

والآن لنعرّف تابع القوى الصّحيحة بالشّكل الآتي :

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^n$$

نميز الحالات الآتية :

- عندما $n = 0$، نحصل على التّابع الثّابت.
- عندما $n = 1$، نحصل على التّابع المطابق.
- عندما n زوجيّ، يكون التّابع f زوجيّاً.
- عندما n فرديّ، يكون التّابع f فرديّاً.
- إذا كان n سالباً، علينا الانتباه إلى أنّ مجموعة تعريف التّابع f، تكون $\mathbb{R}^*$.
- عندما $n = -1$، نحصل على تابع المقلوب .

$$f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$$

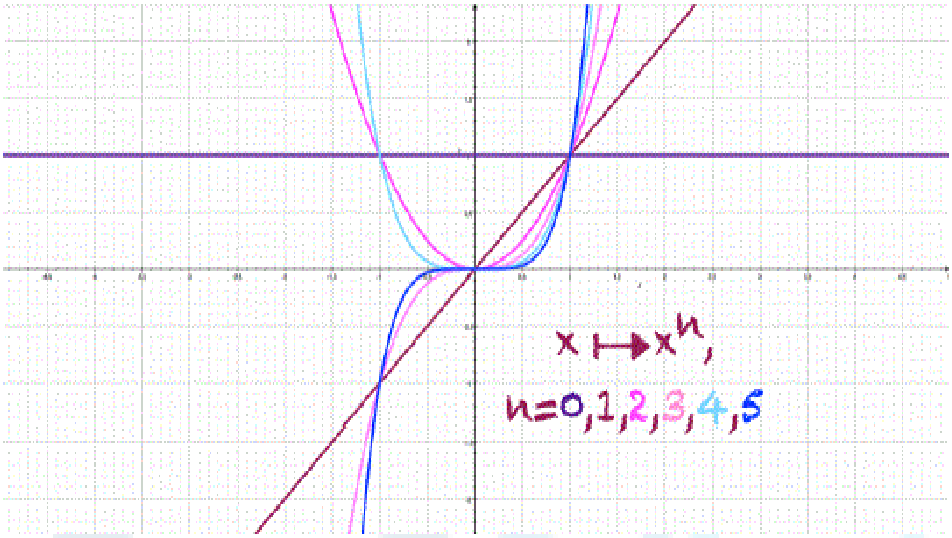
$$x \mapsto \frac{1}{x}$$

6. تابع كثيرات الحدود :

نعرّف تابع كثيرة الحدود الّذي نرمز له بـ p بالشّكل :

$$p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$



الشّكل (6)

حيث $a_0, a_1, \dots, a_n$ أعداد حقيقيّة، (قد تكون معدومة)، تدعى أمثال كثيرة الحدود.

ملاحظة :

قد يكون من الأفضل استخدام رمز المجموع $\sum$، لنبسط كتابة كثيرة الحدود :

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$$

إذ تقرأ : مجموع من $i = 0$ إلى $i = n$ لـ a_ix^i.

7. تابع الجذر النّوني – تابع القوى الكسريّة.

قد تكون القوى غير صحيحة؛ أي أنّها قد تكون كسريّة. وبكلام آخر: قد تكون من الشّكل , $\frac{p}{q};\ p \in \mathbb{Z}$ $q \in \mathbb{Z}^*$.

لنعرّف القوة الكسريّة للعدد الحقيقيّ الموجب تماماً بالشّكل :

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

ملاحظات :

- عندما $q = 2$, $p = 1$, و$a > 0$، نحصل على تابع الجذر التّربيعيّ.
- عندما $q = 3$, $p = 1$, وعندما $a \in \mathbb{R}$، نحصل على تابع الجذر التّكعيبيّ.
- في حال كان p سالباً، يجب الانتباه إلى أن تكون a غير معدومة.

وعليه, لنعرّف الآن تابع الجذر النّونيّ بالشّكل الآتي :

إذا كان n زوجيّاً :

$$f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

إذا كان n فرديّاً :

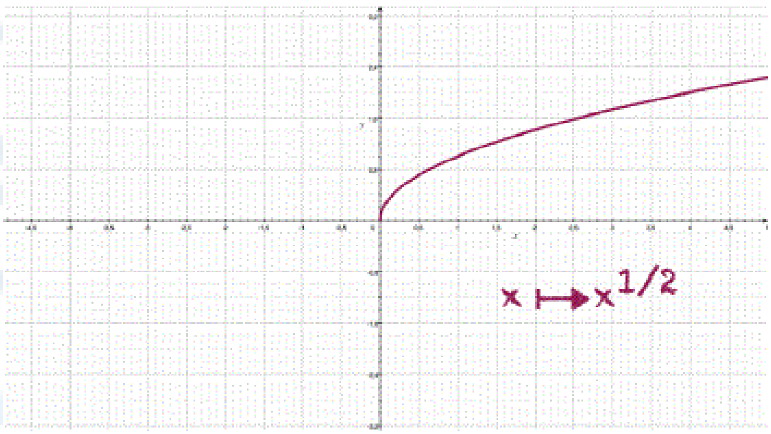
$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

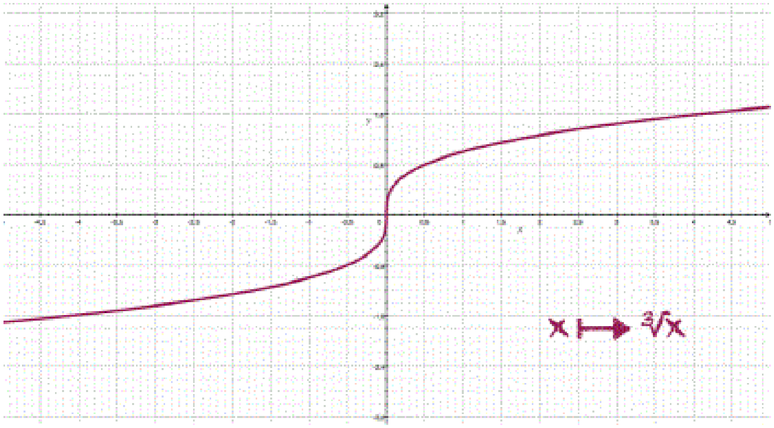
من جهة ثانية, لنعرّف تابع القوة الكسريّة من أجل $q \in \mathbb{Z}^*$, $p \in \mathbb{Z}$ بالشّكل :

$$f: {\mathbb{R}^*}_+ \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^{\frac{p}{q}}$$



الشّكل (7)



الشّكل (8)

8. التّابع اللوغاريتمي :

يمكن بناء التّابع اللوغاريتمي النيبري ذي الرمز $\ln$ بعدة طرق؛ منها :

- التّابع الأصليّ لتابع المقلوب $x \mapsto \frac{1}{x}$ (لم نعطِ بعد تعريف مفهوم التّابع الأصليّ، ولا التّكامل في كتابنا هذا إلّا أنّ هذه المفاهيم، ليست غريبة عنك، فقد تعلّمتها في دراستك الثّانويّة).
- التّقابل العكسيّ للتابع الأسيّ.

لندع جانباً كيفية حصولنا على التّابع اللوغاريتمي، ولنعطي الاقتراح الآتي الّذي سنعرف من خلاله هذا التّابع بشكل جيّد :

مبرهنة 1 :

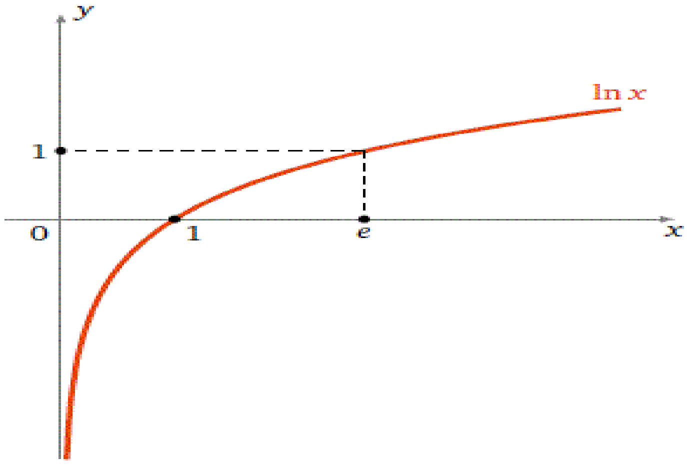
يوجد تابع وحيد، يرمز له $\ln:]0, +\infty[\to \mathbb{R}$، بحيث :

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \;\; ; \;\; (\forall x > 0) \quad and \quad \ln(1) = 0$$

كذلك يحقّق هذا التّابع من أجل كلّ من $a, b > 0$:

1. $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$.
2. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.
3. $\ln(a^n) = n\ln(a) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$.
4. $\ln$ تابع مستمرّ، ومتزايد تماماً، ويملك تقابلاً عكسيّاً من $]0, +\infty[$ إلى $\mathbb{R}$.

5. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.
6. التّابع $\ln$ مقعّر، ويحقّق $\ln x \le x - 1$، وذلك $\forall x > 0$.



الشّكل (9)

ملاحظة :

$\ln$ يدعى التّابع اللوغاريتمي الطّبيعيّ أو النيبري, حيث $\ln e = 1$, نعرّف اللوغاريتم بالأساسي a،
ورمزه $\log_a$ كالآتي :

$$\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

و $\log_a(a) = 1$

وعندما يكون $a = 10$، نحصل على اللوغاريتم العشري $\log_{10}$ الّذي يحقّق $\log_{10}(10) = 1$،
ويكون $\log_{10}(10^n) = n$

نستخدم التكافؤ الآتي في التّطبيقات كثيراً :

$$x = 10^y \Leftrightarrow y = \log_{10} x$$

مبرهنة 2 : التّابع اللوغاريتمي والنّهايات

ليكن x عدداً حقيقيّاً موجباً تماماً

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$$

كذلك :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0 \qquad \lim_{x\to0^+}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^p}=0\,;p\in\mathbb{R}^*{}_+$$

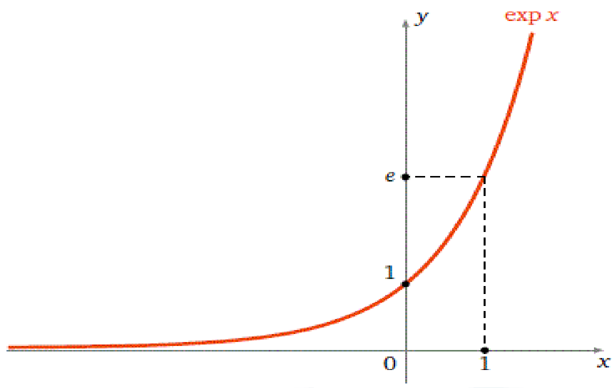
8. التّابع الأسيّ :

التّقابل العكسي للتابع $\ln:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$، يدعى التّابع الأسيّ، ونرمز له :

$$\exp:\mathbb{R}\to]0,+\infty[$$

من أجل كلّ $x\in\mathbb{R}$، نرمز كذلك للتابع $\exp x$ بالرمز e^x.

من الجدير بالذّكر أنّ التّابع الأسيّ، يأخذ قيماً موجبة تماما دوماء



الشّكل (10)

مبرهنة 3 :

يحقّق التّابع الأسيّ العلاقات الآتية :

- $\ln(\exp x)=x\,;\ \forall x\in\mathbb{R}$ و $\exp(\ln x)=x\ ;\ \forall x>0$
- $(\forall a,b\in\mathbb{R})\ \exp(a+b)=\exp a\times\exp b$.
- $\exp(nx)=(\exp x)^n$.
- $\exp:\mathbb{R}\to]0,+\infty[$ تابع مستمرّ، ومتزايد تماماً، ويحقّق : $\lim_{x\to+\infty}\exp\ x=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\exp\ x=0$.
- التّابع الأسيّ قابل للاشتقاق، و $\exp'\ x=\exp\ x\ \ ;\ \ \forall x\in\mathbb{R}$

وكذلك $\exp\ x\geq1+x$.

ملاحظة : التّابع الأسيّ هو التّابع الوحيد الّذي يحقّق أن

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp' x = \exp x$، ويحقّق $\exp(1) = e$, حيث $e \approx 2.718$ ويحقّق $\ln e = 1$.

البرهان : يتمّ البرهان بالاعتماد على أنّ التّابع الأسيّ، يمثّل التّقابل العكسيّ للتابع اللوغاريتمي . فعلى سبيل المثال : لدينا $\ln(\exp x) = x$, باشتقاق المعادلة نحصل على $\exp' x \,.\, \ln'(\exp x) = 1$ ، وبذلك $\exp' x \,.\, \frac{1}{\exp x} = 1$ ، ومنه $\exp' x = \exp x$.

تعريف :

بالتّعريف, من أجل $a > 0$ و $b \in \mathbb{R}$ يكون :

$$a^b = \exp(b \ln a)$$

ملاحظة :

- $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} = \exp\left(\frac{1}{2} \ln a\right)$
- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln a\right)$
- التّابع $x \longmapsto a^x$، يمكن كتابته بالشّكل $a^x = \exp(x \ln a)$

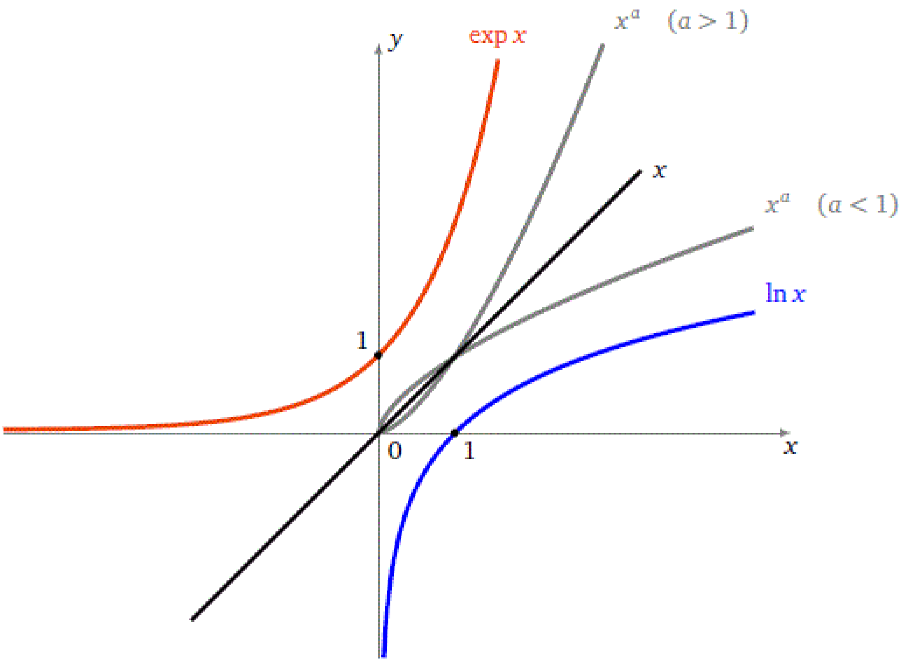
مبرهنة 4 :

من أجل أيّ عددين $a, b \in \mathbb{R}$ و $x, y > 0$، يكون :

- $x^{a+b} = x^a . x^b$
- $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$
- $(x.y)^a = x^a . y^a$
- $(x^a)^b = x^{ab}$
- $\ln(x^a) = a . \ln x$

مبرهنة 5 :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$



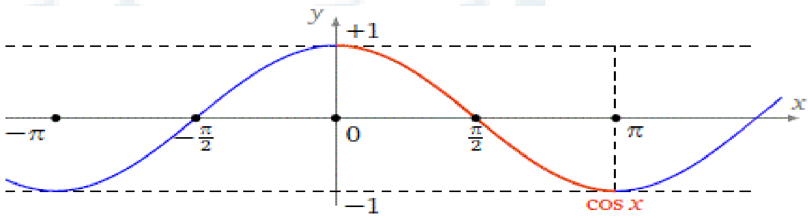
الشّكل (11)

10. التّوابع المثلّثيّة وتقابلاتها العكسيّة :

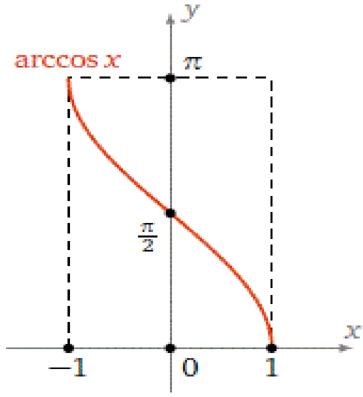
Arccosine (1-10) :

ليكن لدينا التّابع $\cos: \mathbb{R} \to [-1,+1]$: $x \mapsto \cos x$، حتّى يكون هذا التّابع تقابلاً, ينبغي أن نقصر التّابع على المجال $[0,\pi]$, حيث يكون التّابع مستمرّاً ومتزايداً تماماً، وبهذا التّابع : $\cos : [0,\pi] \to [-1,+1]$ تقابل، ويملك تقابلاً عكسيّاً $\arccos$ المعرّف بالشّكل :

$$\arccos x \; : [-1,+1] \to [0,\pi]$$



الشّكل (12)



الشّكل (13)

وبحسب تعريف التّقابل العكسيّ :

$$\cos(\arccos x) = x \quad , \ \forall x \in [-1, +1]$$

$$\arccos(\cos x) = x \quad , \ \forall x \in [0, \pi]$$

بكلام آخر:

$$\arccos(y) = x \iff \cos x = y \quad , \ \forall x \in [0, \pi]$$

وأخيراً : لنرى مشتقّ $\arccos$

$$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad ; \quad \forall x \in]-1, +1[$$

البرهان : لننطلق من العلاقة $\cos(\arccos x) = x$ ولنشتق :

$$-\arccos' x \times \sin(\arccos x) = 1$$

$$\arccos' x = \frac{-1}{\sin(\arccos x)}$$

$$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)}} \quad (*)$$

$$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

تفسير العلاقة $(*)$: نعلم أنّ $\cos^2 y + \sin^2 y = 1$، ونعوّض

$y = \arccos x$ ، فنحصل على

$\cos^2 \arccos x + \sin^2 \arccos x = 1$ ، ومنه :

$x^2 + \sin^2 \arccos x = 1$ وكذلك $\sin\ \arccos x = +\sqrt{1-x^2}$ (الإشارة موجبة كون $\arccos x \in [0,\pi]$، و $\sin\ \arccos x \geq 0$)

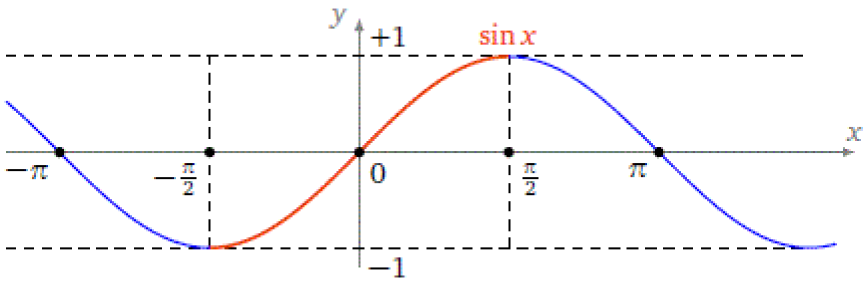
(2-10) **Arcsine**

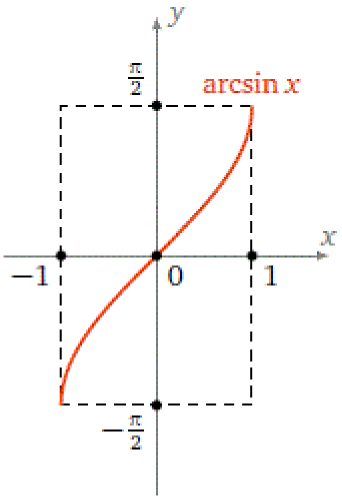
مقصور التّابع $\sin$ على المجال $\left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right]$ المعرّف بالشّكل :

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,+1]$$

يمثّل تقابلاً، وتقابله العكسيّ هو التّابع $\arcsin$

$$\arcsin\ : [-1,+1] \to \left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right]$$





الشّكل (14)

لدينا حسب تعريف التّقابل العكسيّ :

$$\sin(\arcsin x) = x \quad , \ \forall x \in [-1, +1]$$

$$\arcsin(\sin x) = x \quad , \ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$$

وبكلام آخر :

$$\arcsin(y) = x \iff \sin x = y \quad , \ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$$

وأخيراً : لنرى مشتقّ arccos

$$\arcsin' x = \frac{+1}{\sqrt{1-x^2}} \quad ; \quad \forall x \in]-1, +1[$$

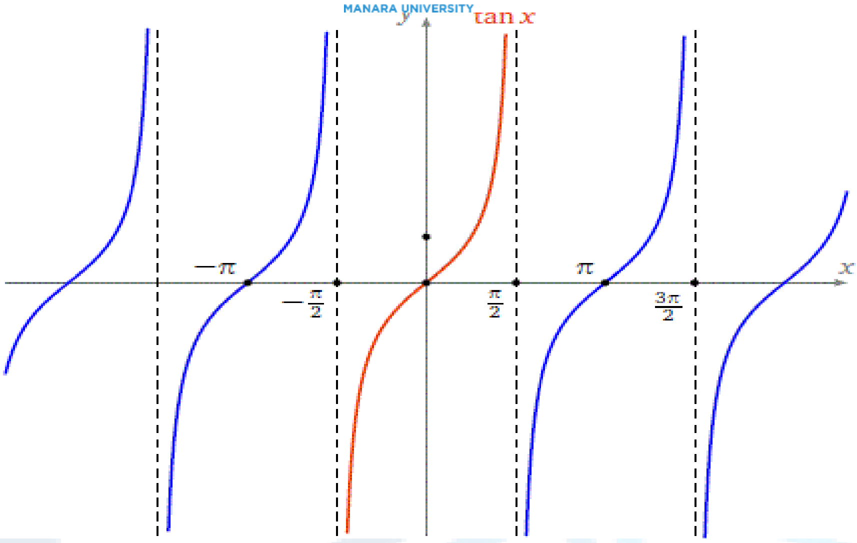
(3-10) Arctangent

مقصور التّابع tan على المجال $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ المعرّف بالشّكل :

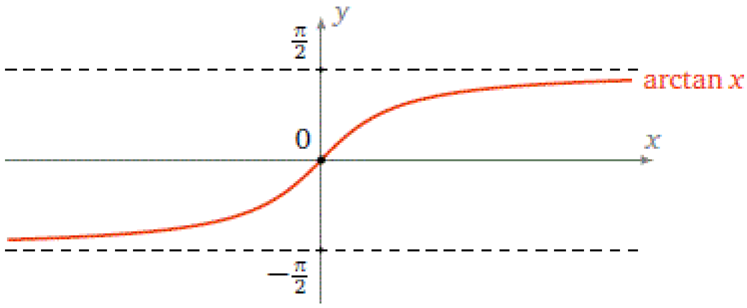
$$\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$$

يمثّل تقابلاً، وتقابله العكسيّ هو التّابع arctan

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$$



الشّكل (15)



الشّكل (16)

لدينا حسب تعريف التّقابل العكسيّ :

$$\tan(\arctan x) = x \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\arctan(\tan x) = x \quad , \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$$

وبكلام آخر:

$$\arctan(y) = x \Leftrightarrow \tan x = y \quad , \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$$

وأخيراً : لنرى مشتقّ $\arccos$

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

11. التّوابع الزّائديّة :

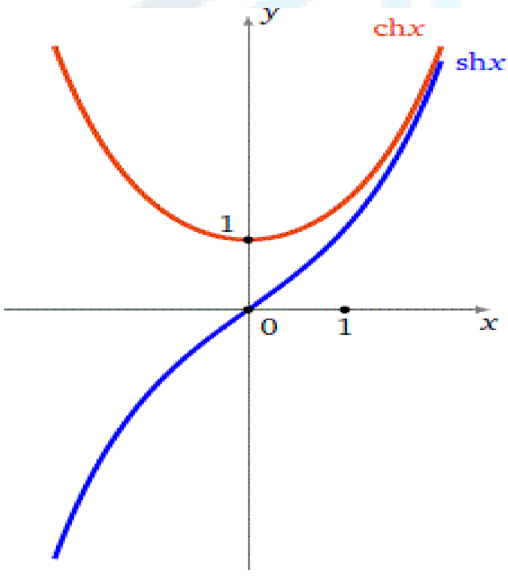
تعتمد هذه التّوابع في تعريفها على التّوابع الأسيّة، وتشبه في خواصّها إلى حدّ كبير خواصّ التّوابع المثلّثيّة، كذلك فإنّ مجال تطبيقاتها واسع.

(1-11) جيب التّمام الزّائديّ Hyperbolic Cosine وتابعه العكسيّ :

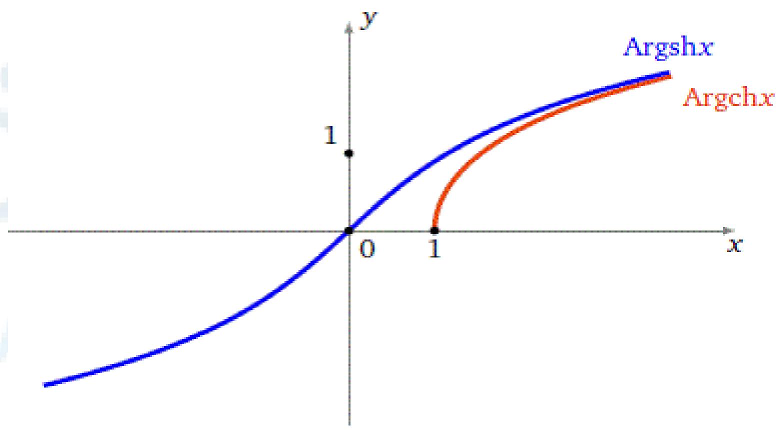
من أجل كلّ $x \in \mathbb{R}$, يعرّف جيب التّمام الزّائديّ بالشّكل :

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

إذا قصرنا التّابع $\cosh$ كما يلي : $\cosh: [0, +\infty[\to [1, +\infty[$، نحصل على تقابل، ويكون تقابله العكسيّ $\text{Argcosh}: [1, +\infty[\to [0, +\infty[$.



الشّكل (17)



الشّكل (18)

(2-11)الجيب الزّائديّ Hyperbolic sine وتابعه العكسيّ :

من أجل كلّ $x \in \mathbb{R}$, يعرف الجيب الزّائديّ بالشّكل :

$$\sinh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

التّابع $\text{sh}(x)$:$\sinh: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ مستمرّ وقابل للاشتقاق ومتزايد تماماً، ويحقّق

$$lim_{x\to-\infty} \sinh(x) = -\infty, \quad \text{و} \; lim_{x\to+\infty} \sinh(x) = +\infty,$$

وبذلك التّابع تقابل وتقابله العكسيّ : $\text{Argsinh}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

مبرهنة 6 :

1. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
2. $\sinh' x = \cosh \; x$ و $\cosh' x = \sinh \; x$
3. $\text{Argsinh}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ متزايد تماماً ومستمرّ.
4. Argsinh قابل للاشتقاق، ومشتقّه : $\text{Arginsh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
5. $\text{Argsinh} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

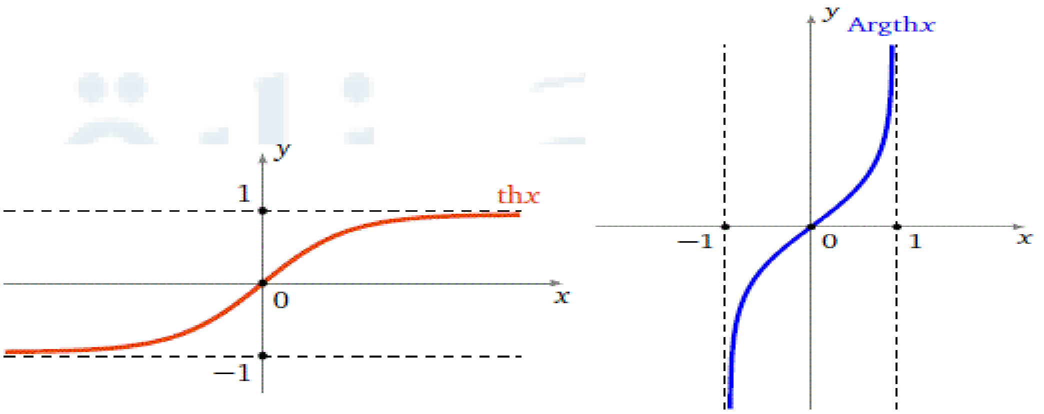
(3-11) الظلّ الزّائديّ Hyperbolic tangent، وتابعه العكسيّ :

من أجل كلّ $x \in \mathbb{R}$, يعرّف الظلّ الزّائديّ بالشّكل :

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

التّابع : $\tanh: \mathbb{R} \to]-1, +1[$ تقابل، وتقابله العكسيّ :

$\text{Argtanh}: \mathbb{R} \to]-1, +1[$.



الشّكل (19)

بعض العلاقات الزّائديّة :

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

$$\cosh(a+b) = \cosh a \cosh b + \sinh a \operatorname{shin} b$$

$$\cosh(2a) = \cosh^2 a + \sinh^2 a = 2\cosh^2 a - 1 = 1 + 2\sinh^2 a$$

$$\sinh(a+b) = \sinh a \cosh b + \sinh b \cosh a$$

$$\sinh(2a) = 2\sinh a \cosh a$$

$$\tanh(a+b) = \frac{\tanh a + \tanh b}{1 + \tanh a \tanh b}$$

$$\cosh' x = \sinh x$$

$$\sinh' x = \cosh x$$

$$\tanh' x = 1 - \tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$\operatorname{Argcosh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}; \quad (x > 1)$$

$$\operatorname{Argsinh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\operatorname{Argtanh}' x = \frac{1}{1 - x^2}; \quad |x| < 1$$

$$\operatorname{Argcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \ ; \ (x \geq 1)$$

$$\operatorname{Argsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) \ ; \ (x \in \mathbb{R})$$

$$\operatorname{Argtanh} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \ ; \ (-1 < x < +1)$$