

## Lecture 3

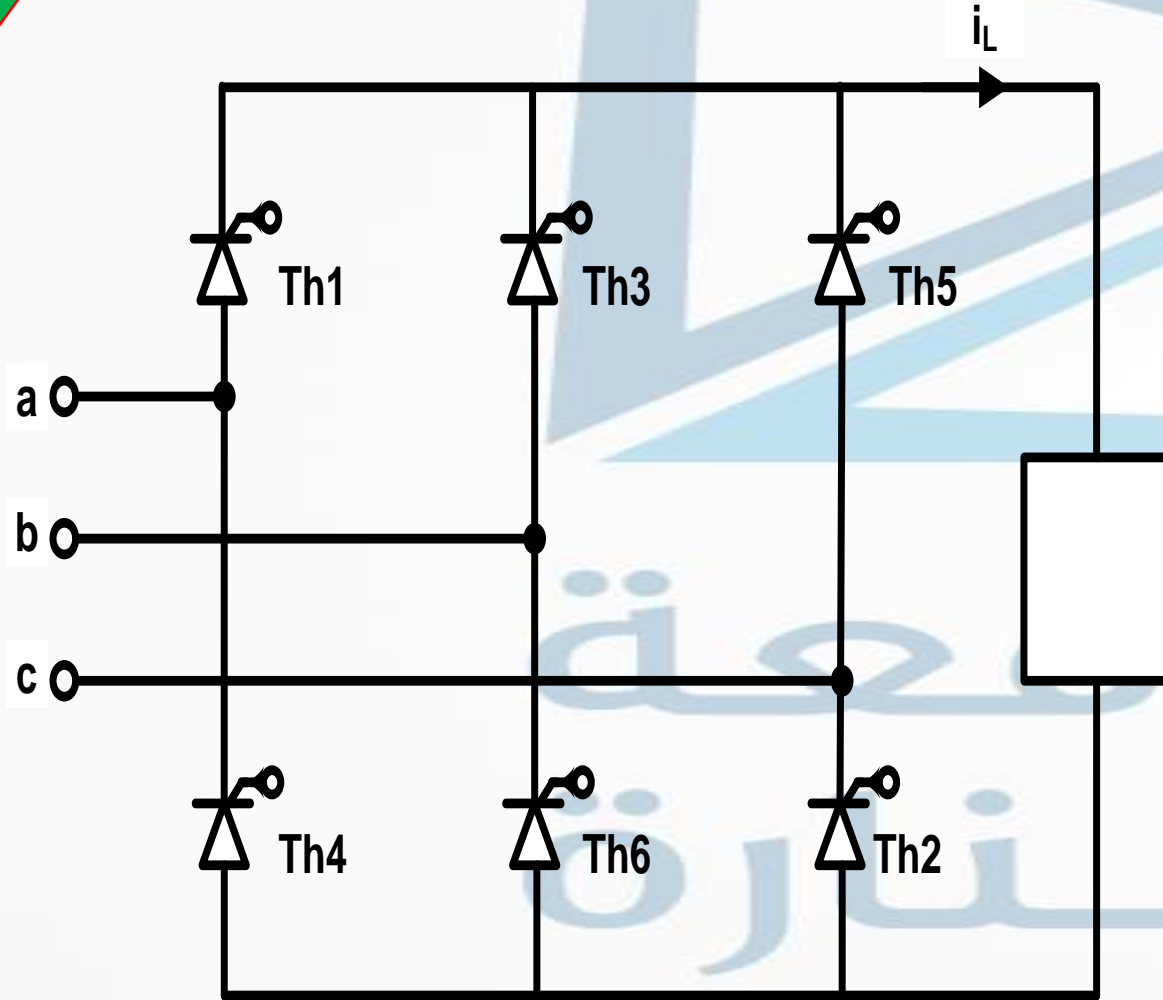
### دارات التحويل الجسرية ثلاثية الأطوار

THREE-PHASE, FULL-WAVE

CONTROLLED BRIDGE RECTIFIER CIRCUITS

( RESISTIVE LOAD AND IDEAL SUPPLY )

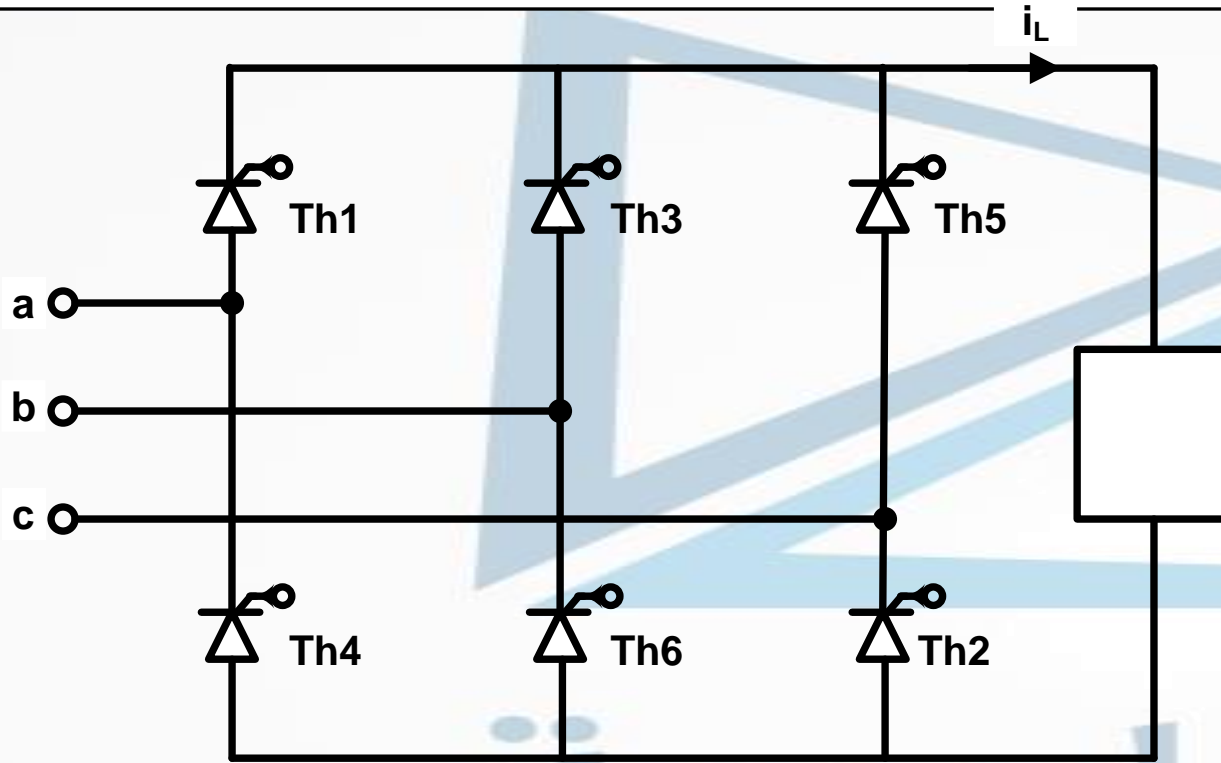
العمل على حمولة أومية ومنبع مثالي



يبين الشكل تمثيل دائرة المبدلة الجسرية الثلاثية الأطوار. يتم تشغيل المبدلة بحيث تكون نبضات التحكم للثايرستورات (Th1; Th3; Th5) التي تشكل المجموعة المهبطية والواقعة في المبدلة ذات النقطة المشتركة الأولى متقدمة عن نبضات التحكم للثايرستورات (Th4; Th6; Th2) التي تشكل المجموعة المصعدية والواقعة في المبدلة ذات النقطة المشتركة الثانية بزمن  $\left(\frac{T}{2}\right)$  أو بزاوية  $(180^\circ)$ .

يتشكل جهد الخرج للمبدلة ( $e_L$ ) من مجموع جهود الخرج للمبدلات المشكلة لها. سوف نقوم لاحقاً بتحليل عمل المبدلة الجسرية عند الفرضيات التالية:

1. جميع العناصر (المفاتيح) الإلكترونية المستخدمة في دائرة المبدلة (الشكل 1.7) ذات خصائص واحدة ومن نوع واحد (ثايرستورات من نوع SCR) وذات ممانعة مهملة.
2. دائرة المبدلة مغذاة من منبع جهد ثلاثي متزن:



جهود الاطوار

$$e_{aN} = E_m \sin(\omega t)$$

$$e_{bN} = E_m \sin(\omega t - 120^\circ)$$

$$e_{cN} = E_m \sin(\omega t - 240^\circ)$$

جهود الخطوط

$$e_{ab} = e_{aN} - e_{bN} = \sqrt{3}E_m \sin(\omega t + 30^\circ)$$

$$e_{bc} = \sqrt{3}E_m \sin(\omega t - 90^\circ)$$

$$e_{ca} = \sqrt{3}E_m \sin(\omega t - 120^\circ)$$

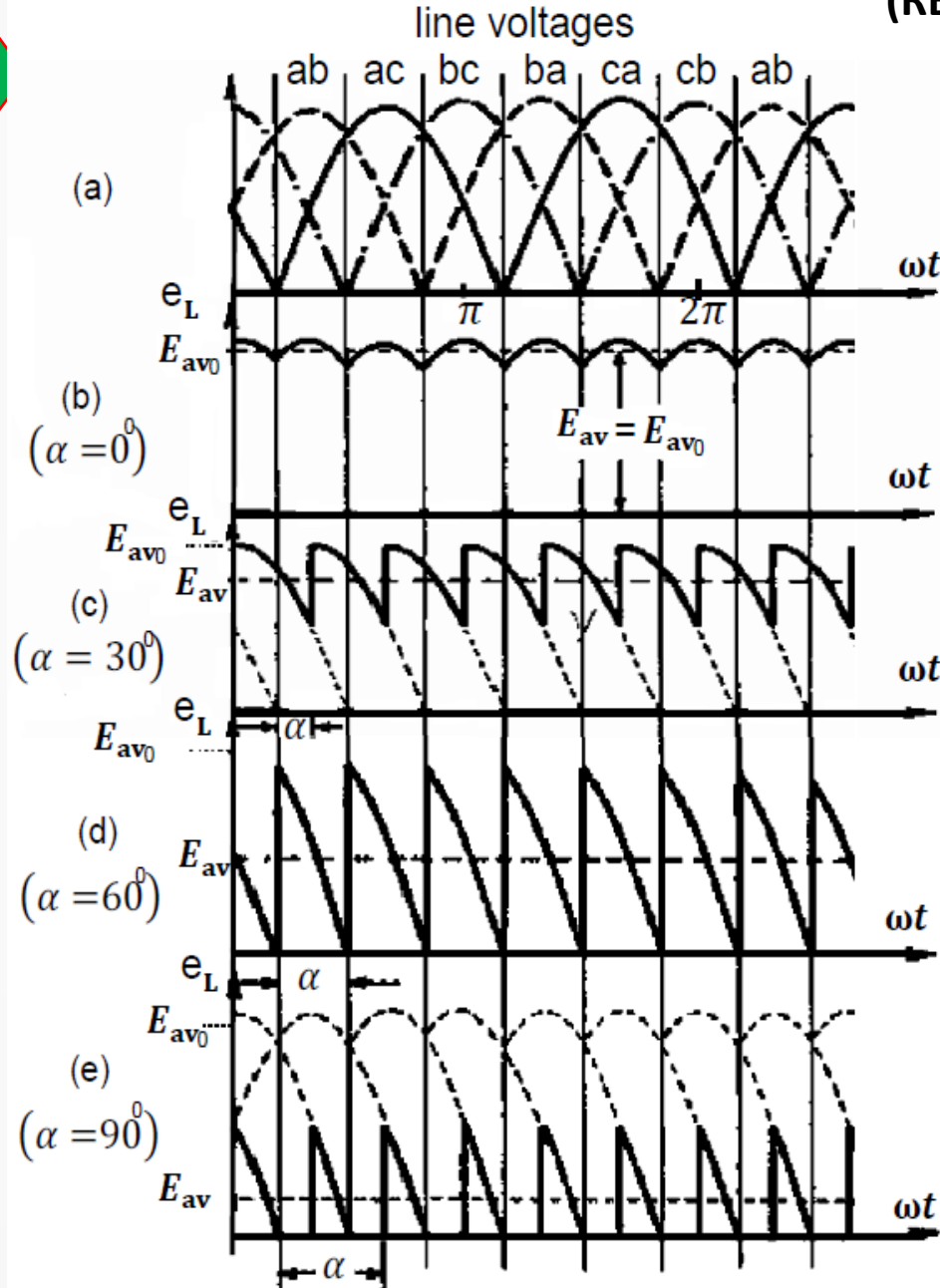
يتم تشكيل نبضات التحكم على بوابات الثايرستورات حسب تسلسل أرقامها وبفارق صفحة بين كل ثايرستورين متتاليين تعادل  $(60^\circ)$ . عند عمل الجسر على زاوية تأخير  $(\alpha)$  تتراح نبضات التحكم على جميع بوابات الثايرستورات بزاوية تعادل زاوية التأخير  $(\alpha)$ .

يتشكل جهد الخرج للجسر من ست حالات تشغيل مختلفة خلال الدور الواحد بتوصيل أحد ثايرستورات طور المجموعة المهبطية مع أحد ثايرستورات المجموعة المصعدية للأطوار الأخرى. يعادل المجال الزمني لكل حالة

من الحالات الستة زمناً قدره  $(\frac{T}{6})$ ، والذي يوافق زاوية  $(\frac{\pi}{3} \text{ rad}; 60^\circ)$ .

## (RESISTIVE LOAD AND IDEAL SUPPLY)

1. العمل على حمولة أومية ومنبع مثالي :



يكون نظام عمل المبدلة الجسرية عند العمل على زاوية تأخير ( $\alpha = 0$ ) مشابهاً لنظام عمل دائرة التقويم الجسرية الذي تم دراسته سابقاً.

يتم تشكيل نبضات التحكم على بوابات الثايرستورات حسب تسلسل أرقامها وبفرق صفحة بين كل ثايرستورين متتاليين تعادل ( $60^\circ$ ). عند عمل الجسر على زاوية تأخير ( $\alpha$ ) تزاح نبضات التحكم على جميع بوابات الثايرستورات بزواوية تعادل زاوية التأخير ( $\alpha$ ).

يتشكل جهد الخرج للجسر من ست حالات تشغيل مختلفة خلال الدور الواحد بتوصيل أحد ثايرستورات طور المجموعة المهبطية مع أحد ثايرستورات المجموعة المصعدية للأطوار الأخرى. يعادل المجال الزمني لكل حالة من الحالات الستة زمناً قدره ( $\frac{T}{3}$ )، والذي يوافق زاوية ( $\frac{2\pi}{3}$  rad;  $120^\circ$ ).

تتراح حالات التشغيل المختلفة للمبدلة الجسرية خلال الدور الواحد عن حالات التشغيل المختلفة لدائرة التقويم الجسرية بزواوية التأخير ( $\alpha$ ).

يتحدد تيار شبكة التغذية من أربع حالات تشغيل مختلفة. يبين الشكل (7.3) الحالات الأربعة المشكلة لتيار شبكة التغذية ( $i_a$ ). يتشكل تيار شبكة التغذية ( $i_a$ ) من الحالات التي يكون فيها أحد الثايرستوران (Th1, Th4) في حالة توصيل حيث تتشكل نصف الموجة الموجبة لإشارة هذا التيار من حالات توصيل الثايرستور (Th1)، بينما تتشكل نصف الموجة السالبة لإشارة هذا التيار من حالات توصيل الثايرستور (Th4).



يتحدد تيار شبكة التغذية من أربع حالات تشغيل مختلفة.

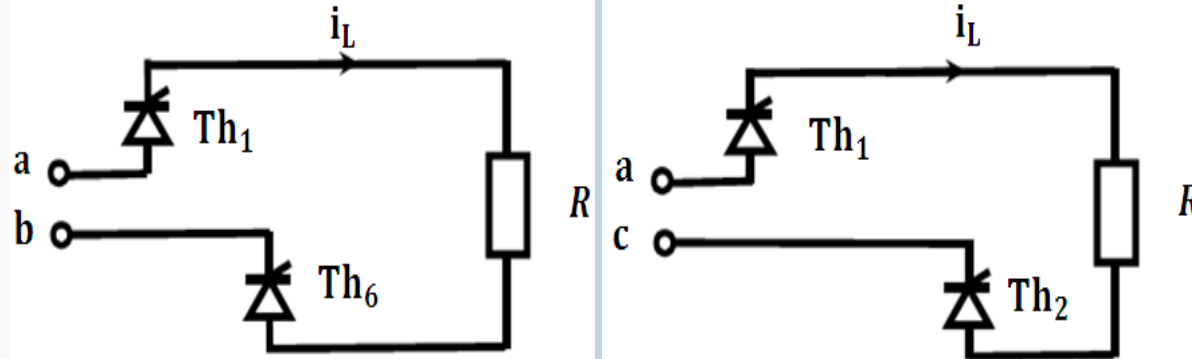
يبين الشكل الحالات الأربعة المشكلة لتيار شبكة التغذية  $(i_a)$ .

يتشكل تيار شبكة التغذية  $(i_a)$  من الحالات التي يكون فيها أحد الثايرستوران (Th1, Th4) في حالة توصيل، حيث تتشكل نصف الموجة الموجبة لإشارة هذا التيار من حالات توصيل الثايرستور (Th1)، بينما تتشكل نصف الموجة السالبة لإشارة هذا التيار من حالات توصيل الثايرستور (Th4).

يختلف نظام عمل المبدلة الجسريه على حمولة أومية حسب زاوية التأخير  $(\alpha)$ :

• نظام العمل بتيارات حمولة مستمرة  $(0 < \alpha < \frac{\pi}{3})$ .

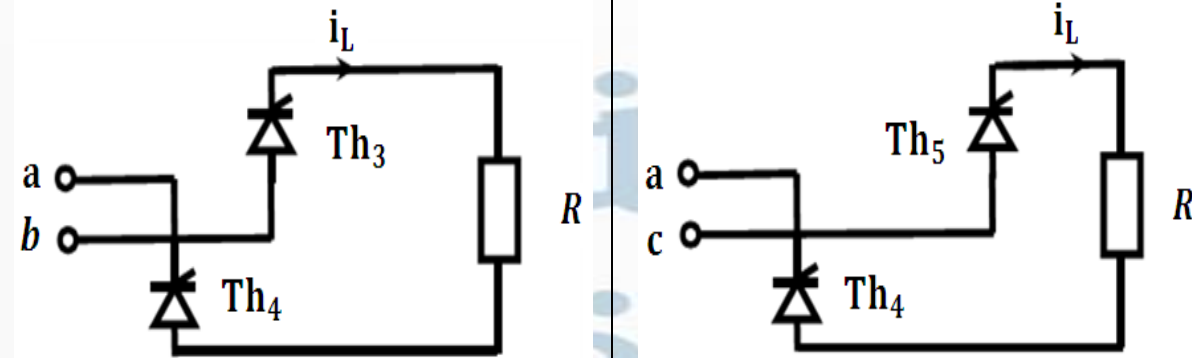
• نظام العمل بتيارات حمولة متقطعة  $(\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{2\pi}{3})$ .



(a)  
 $(60^\circ \leq \omega t \leq 120^\circ)$

(b)  
 $(120^\circ \leq \omega t \leq 180^\circ)$

الدارات المكافئة خلال نصف الموجة الأول



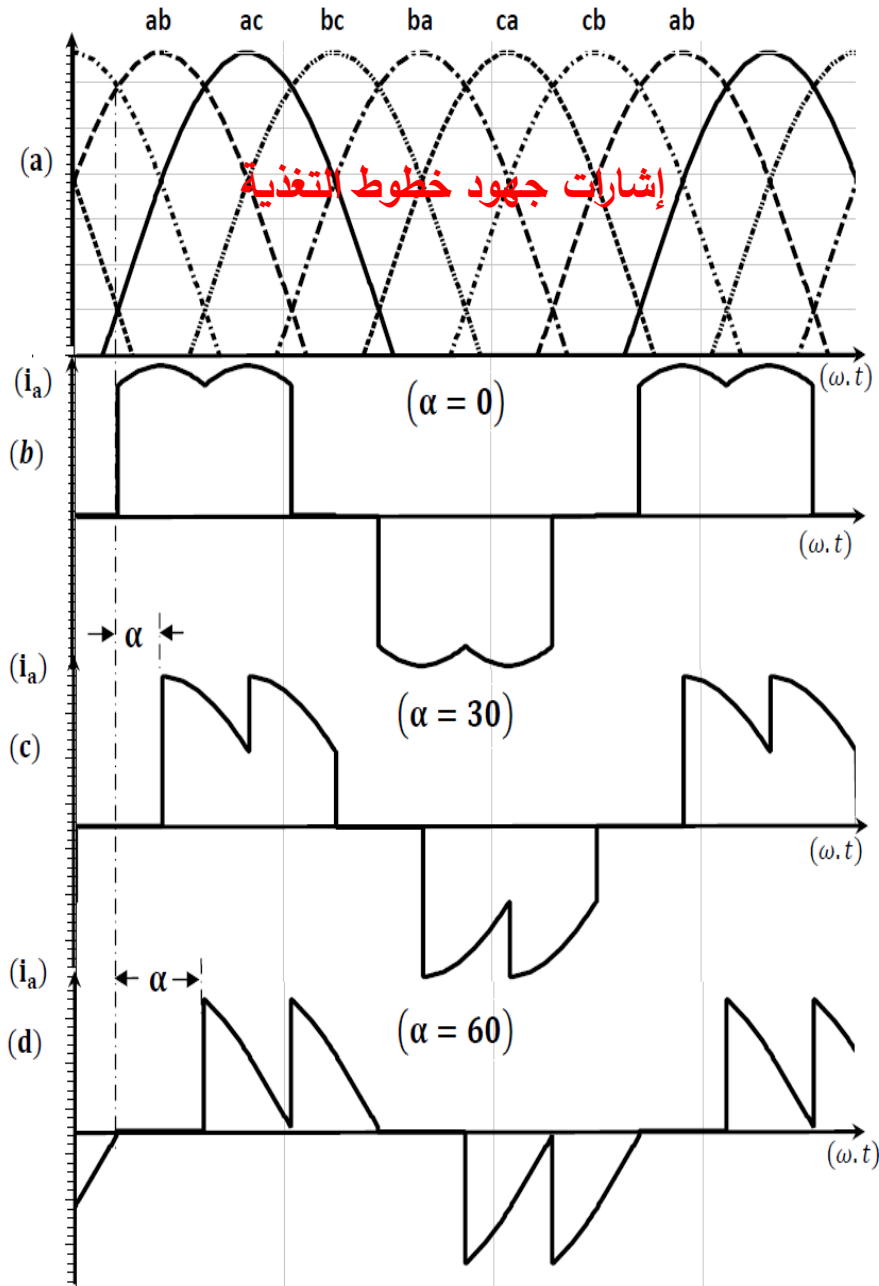
(c)  
 $(240^\circ \leq \omega t \leq 300^\circ)$

(d)  
 $(300^\circ \leq \omega t \leq 360^\circ)$

الدارات المكافئة خلال نصف الموجة الثاني

الشكل	المجال	ثايرستورات التوصيل	الجهد اللحظي للحمل
(a)	$(60^\circ \leq \omega t \leq 120^\circ)$	(Th <sub>1</sub> , Th <sub>6</sub> on)	(e <sub>ab</sub> )
(b)	$(120^\circ \leq \omega t \leq 180^\circ)$	(Th <sub>1</sub> , Th <sub>2</sub> on)	(e <sub>ac</sub> )
(c)	$(240^\circ \leq \omega t \leq 300^\circ)$	(Th <sub>3</sub> , Th <sub>4</sub> on)	(e <sub>ba</sub> )
(d)	$(300^\circ \leq \omega t \leq 360^\circ)$	(Th <sub>5</sub> , Th <sub>4</sub> on)	(e <sub>ca</sub> )

الدارات المكافئة لحالات عمل الجسر على حمولة أومية بزاوية تأخير  $\alpha = 30^\circ$



إشارات جهود الحمل والتيار التغذية ( $i_a$ ) للمبدلة الجسرية عند عملها على حمولة أومية بزوايا تأخير مختلفة ( $\alpha = 0; 30; 60$ )

محددات طرف الحمل (Load-Side Quantities):

يتم تحديد كميات طرف الحمل حسب نظام العمل:

• نظام العمل بتيارات حمولة مستمرة ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$ ):

• إشارة جهد الخرج

$$e_L(\omega t) = \sqrt{3} E_m \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \Big|_{\alpha+\pi/6}^{\alpha+\pi/2}$$

• القيمة المتوسطة لجهد الخرج

$$E_{av} = \frac{3}{\pi} \int_{\alpha+\pi/6}^{\alpha+\pi/2} \sqrt{3} E_m \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) d\omega t = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} E_m \cos \alpha = E_{av0} \cos \alpha$$

$$E_{av0} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} E_m = 1.654 E_m$$

• القيمة المتوسطة لتيار الحمل

$$I_{av} = \frac{E_{av}}{R} = \frac{E_{av0}}{R} \cos \alpha$$

## • نظام العمل بتيارات حمولة متقطعة $(\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{2\pi}{3})$ .

$$e_L(\omega t) = \sqrt{3} E_m \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \Big|_{\alpha+\pi/6}^{5\pi/6}$$

القيمة اللحظية لإشارة جهد الخرج

$$E_{av} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} E_m [1 + \cos(\alpha + \pi/3)]$$

القيمة المتوسطة لإشارة جهد الخرج

نلاحظ أن القيم المتوسطة لجهد الخرج في النظامين تكون متساوية عند العمل على زاوية تأخير  $(\alpha = 60^\circ)$ ، وأن القيمة المتوسطة للنظام المتقطع تكون مساوية للصفر عند العمل على زاوية تأخير  $(\alpha = 120^\circ)$ .

كما نلاحظ أن إشارة جهد الخرج للنظامين تكرر نفسها ست مرات خلال الدور الواحد، وهذا يعني أن تردد إشارة تأرجح جهد الخرج تعادل ستة أضعاف تردد منبع التغذية.

$$I_L = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i_L^2(\omega t) d\omega t}$$

تحدد الاستطاعة المصروفة في الحمل من القيمة الفعالة لإشارة تيار الحمل

$$I_L \Big|_{0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3} E_m}{2R} \sqrt{\frac{2\pi + 3\sqrt{3} \cos 2\alpha}{\pi}}$$

$$I_L \Big|_{\frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3} E_m}{2R} \sqrt{\frac{4\pi - 6\alpha + 3 \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right)}{\pi}}$$

علاقات القيم الفعالة لإشارة تيار الحمل في النظامين:



المحدد	العمل على حمولة <u>أومية</u>	
القيمة اللحظية للحمل $e_L(\omega t)$	مستمر	$u_{ab} \begin{cases} \alpha + \pi/2 \\ \alpha + \pi/6 \end{cases}$
	متقطع	$u_{ab} \begin{cases} 5\pi/6 \\ \alpha + \pi/6 \end{cases}$
القيمة المتوسطة للحمل $(E_{av})$	مستمر	$\frac{3\sqrt{3}}{\pi} E_m \cos \alpha = E_{av0} \cos \alpha$
	متقطع	$\frac{3\sqrt{3}}{\pi} E_m [1 + \cos(\alpha + \pi/3)]$
القيمة الفعالة لتيار الحمل $(I_L)$	مستمر	$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$ $\frac{\sqrt{3}E_m}{2R} \sqrt{\frac{2\pi + 3\sqrt{3} \cos 2\alpha}{\pi}}$
	متقطع	$\frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{3}$ $\frac{\sqrt{3}E_m}{2R} \sqrt{\frac{4\pi - 6\alpha + 3 \sin(2\alpha - \frac{\pi}{3})}{\pi}}$
استطاعة الحمل $(P_L)$	مستمر	$\frac{3E_m^2}{4\pi R} (2\pi + 3\sqrt{3} \cos 2\alpha)$
	متقطع	$\frac{3E_m^2}{4\pi R} [4\pi - 6\alpha - 3 \sin(2\alpha - \frac{\pi}{3})]$

الاستطاعة المصروفة في الحمل لكلا النظامين:

$$P_L \left| 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3} = \frac{3E_m^2}{4\pi R} (2\pi + 3\sqrt{3} \cos 2\alpha) \right.$$

$$P_L \left| \frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{3} = \frac{3E_m^2}{4\pi R} [4\pi - 6\alpha - 3 \sin(2\alpha - \frac{\pi}{3})] \right.$$

ملخصاً لعلاقات محددات طرف الحمل للمبدلة الجسريه عند عملها على حمولة أومية :

محددات طرف التغذية (Supply-Side Quantities):

• نظام العمل بتيارات حمولة مستمرة ( $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$ ):

يبين الشكل إشارات تيار المنبع ( $i_a$ ) لعمل المبدلة في نظام تيارات حمولة مستمرة.

تكتب القيمة اللحظية لإشارة تيار المنبع ( $i_a$ ) بالمعادلة التالية:

$$i_a(\omega t) = \frac{\sqrt{3}E_m}{R} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \Bigg|_{\alpha + \frac{\pi}{6}}^{\alpha + \frac{\pi}{2}} + \frac{\sqrt{3}E_m}{R} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right) \Bigg|_{\alpha + \frac{\pi}{2}, \dots}^{\alpha + \frac{5\pi}{6}, \dots}$$

تحدد القيمة الفعالة لتيار المنبع بالعلاقة التالية:

$$I_a \left| 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}E_m}{\sqrt{2}R} \sqrt{\frac{2\pi + 3\sqrt{3}\cos 2\alpha}{\pi}}$$

$$i_a(\omega t) = \frac{\sqrt{3}E_m}{R} \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \Big|_{\alpha+\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} + \frac{\sqrt{3}E_m}{R} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right) \Big|_{\alpha+\frac{\pi}{2}}^{\alpha+\frac{7\pi}{6}}$$

• نظام العمل بتيارات حمولة متقطعة  $\left(\frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{3}\right)$

القيمة اللحظية لإشارة تيار المنبع :

$$I_a \left| \frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{3} = \frac{E_m}{\sqrt{2}R} \sqrt{\frac{4\pi - 6\alpha - 3\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right)}{\pi}}$$

تحدد القيمة الفعالة لتيار المنبع بالعلاقة التالية:

يمكن التعبير عن القيمة الفعالة لتيار المنبع بدلالة القيمة الفعالة لتيار الحمل في كلا النظامين بالعلاقة التالية:

$$I_L = \frac{\sqrt{3}}{2} I_a$$

$$PF = \frac{P_a}{3 \cdot E_a \cdot I_a}$$

عامل الاستطاعة (Operating Power Factor):

يمثل عامل الاستطاعة نسبة الاستطاعة المصروفة بالحمل إلى الاستطاعة المقدمة من المنبع:

عامل استطاعة الجسر لنظامي التيار المستمر والمتقطع

$$PF \left| 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3} = \sqrt{\frac{2\pi + 3\sqrt{3}\cos 2\alpha}{4\pi}}$$

$$PF \left| \frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{3} = \sqrt{\frac{4\pi - 6\alpha - 3\sin(2\alpha - \pi/3)}{4\pi}}$$

$$PF \left| \alpha = 0 = \sqrt{\frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{4\pi}} = 0.956$$

بتعويض  $(\alpha = 0^0)$

يبين الجدول المحددات الكاملة لعامل الاستطاعة لحالات العمل بنظام التيارات المستمرة والمتقطعة.

## Resistive Load

	Mode I ( $0 \leq \alpha \leq 60^\circ$ )	Mode II ( $0 \leq \alpha \leq 120^\circ$ )	Highly inductive load
Fourier coefficients of supply current			
$a_1$	$-\frac{3\sqrt{3}E_m}{2\pi R} \sin 2\alpha$	$-\frac{3E_m}{2\pi R} [1 + \cos(2\alpha - 60^\circ)]$	$-\frac{9}{\pi^2} \frac{E_m}{R} \sin 2\alpha$
$b_1$	$\frac{E_m}{2\pi R} (2\pi + 3\sqrt{3} \cos 2\alpha)$	$\frac{E_m}{2\pi R} [4\pi - 6\alpha - 3 \sin(2\alpha - 60^\circ)]$	$\frac{9}{\pi^2} \frac{E_m}{R} (1 + \cos 2\alpha)$
Fundamental rms supply current $I_1$		$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$
RMS current $I$	$\frac{E_m}{\sqrt{2R}} \sqrt{\frac{2\pi + 3\sqrt{3} \cos 2\alpha}{\pi}}$	$\frac{E_m}{\sqrt{2R}} \sqrt{\frac{4\pi - 6\alpha - 3 \sin(2\alpha - 60^\circ)}{\pi}}$	$\frac{3\sqrt{2}}{\pi} \frac{E_m}{R} \cos \alpha$
Current displacement factor ( $\cos \psi_1$ )	$\frac{2\pi + 3\sqrt{3} \cos 2\alpha}{\sqrt{27 + 4\pi^2 + 12\sqrt{3}\pi \cos 2\alpha}}$	$\frac{4\pi - 6\alpha - 3 \sin(2\alpha - 60^\circ)}{\sqrt{9[1 + \cos(2\alpha - 60^\circ)]^2 + [4\pi - 6\alpha - 3 \sin(2\alpha - 60^\circ)]^2}}$	$\cos \alpha$
Current distortion factor ( $I_1/I$ )	$\frac{27 + 4\pi^2 + 12\sqrt{3}\pi \cos 2\alpha}{4\pi(2\pi + 3\sqrt{3} \cos 2\alpha)}$	$-\frac{3\sqrt{3}E_m}{2\pi R} \sin 2\alpha$	$\frac{3}{\pi}$
Power factor	$\sqrt{\frac{2\pi + 3\sqrt{3} \cos 2\alpha}{4\pi}}$	$\sqrt{\frac{4\pi - 6\alpha - 3 \sin(2\alpha - 60^\circ)}{4\pi}}$	$\frac{3}{\pi} \cos \alpha$

تطبيق:

مبدلة جسرية تغذى من شبكة ثلاثية الأطوار مثالية (415 V; 50Hz) لتغذي حمل أومي ( $R = 100\Omega$ ). والمطلوب تحديد القيمة المتوسطة لجهد الحمل والاستطاعة المصروفة بالدارة عند العمل على زوايا تأخير ( $\alpha = 45^0; 90^0$ ).

الحل:

تحدد القيمة المتوسطة لجهد الحمل لنظام التيار المستمر من العلاقة التالية:

$$E_{av} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} E_m \cos\alpha = E_{av0} \cos\alpha \quad ; \quad E_m = 415 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

عند العمل على زاوية تأخير ( $\alpha = 45^0$ ):

$$E_{av0} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} 415 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 396 \text{ V}$$

تكون القيمة المتوسطة لجهد الحمل

كما تتحدد الاستطاعة المصروفة لنظام التيار المستمر بالعلاقة التالية:

$$P_L = \frac{3E_m^2}{4\pi R} (2\pi + 3\sqrt{3} \cos 2\alpha) = \frac{3}{4\pi} \frac{415^2}{100} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2\pi = 1722 \text{ W}$$

عند العمل على زاوية تأخير ( $\alpha = 90^0$ ) تكافئ العمل بنظام تيار متقطع:

$$E_{av} = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} E_m \left[ 1 + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) \right] = \frac{3\sqrt{3}}{\pi} 415 \sqrt{\frac{2}{3}} \left[ 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = 75.1 \text{ V}$$

$$P_L = \frac{3E_m^2}{4\pi R} \left[ 4\pi - 6\alpha - 3 \sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \right] = \frac{3}{4\pi} \frac{415^2}{100} \frac{2}{3} \left[ 4\pi - 3\pi - 3 \frac{\sqrt{3}}{2} \right] P_L = \frac{415^2}{200\pi} [\pi - 2.589] = 149 \text{ W}$$

أوجد عامل التموج لتيار حمل مبدلة جسرية تغذى من شبكة ثلاثية الأطوار مثالية **لتغذي حمل أومي** بزاوية تأخير  $(\alpha = 60^\circ)$  وقارن النتيجة مع حالة العمل على زاوية  $(\alpha = 0^\circ)$ .

**الحل:** تتحدد نسبة القيمة الفعالة إلى القيمة المتوسطة لتيار الحمل حسب نظام عمل المبدلة الجسرية بالعلاقات التالية:

$$\frac{I_L}{I_{av}} = \frac{\frac{\sqrt{3}E_m}{2R} \sqrt{\frac{2\pi + 3\sqrt{3}\cos 2\alpha}{\pi}}}{\frac{3\sqrt{3}}{\pi R} E_m \cos \alpha} = \frac{\pi}{6} \sqrt{\frac{2\pi + 3\sqrt{3}\cos 2\alpha}{\pi \cdot \cos^2 \alpha}}$$

نظام التيار المستمر:

$$\frac{I_L}{I_{av}} = \frac{\frac{\sqrt{3}E_m}{2R} \sqrt{\frac{4\pi - 6\alpha + 3\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right)}{\pi}}}{\frac{3\sqrt{3}}{\pi R} E_m [1 + \cos(\alpha + \pi/3)]} = \frac{\pi}{6} \sqrt{\frac{4\pi - 6\alpha + 3\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right)}{\pi [1 + \cos(\alpha + \pi/3)]^2}}$$

نظام التيار المتقطع  $60 \leq \alpha \leq 120$ :

$$\frac{I_L}{I_{av}} = 1.134 \quad ; \quad RF = \sqrt{\left(\frac{I_L}{I_{av}}\right)^2 - 1} = 0.535$$

بتعويض  $(\alpha = 60)$  في المعادلة السابقة نجد:

$$\frac{I_L}{I_{av}} = \frac{\pi}{6} \sqrt{\frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{\pi}} = \frac{\pi}{6} 1.9115 = 1.001$$

بينما يتحدد عامل التموج (ripple factor) عند  $(\alpha = 0)$  وفق النسبة:

ومنه يكون عامل التموج (ripple factor) عند  $(\alpha = 0)$  مساوياً للصفر.

تطبيق:

أوجد عامل الاستطاعة لدارة مبدلة جسرية تغذى من شبكة ثلاثية الأطوار مثالية لتغذي حمل أومي ( $R = 100\Omega$ ) بزاويا تأخير  $(\alpha = 45^0; 90^0)$ .

الحل:

نحدد عامل استطاعة المبدلة عند  $(\alpha = 45^0; 90^0)$  باستخدام العلاقات التالية:

✓ عند  $(\alpha = 45^0)$  نظام التيار المستمر:

$$PF = \sqrt{\frac{2\pi + 3\sqrt{3}\cos 90^0}{4\pi}} = \sqrt{0.5} = 0.707$$

✓ عند  $(\alpha = 90^0)$  نظام التيار المتقطع:

$$PF = \sqrt{\frac{4\pi - 3\pi - 3\sin(2\pi/3)}{4\pi}} = \sqrt{\frac{\pi - 3\sqrt{3}/2}{4\pi}} = 0.21$$