جامعة المنارة
قسم الهندسة المعلوماتية

الدارات الكهربائية والالكترونية

Electrical and Electronic Circuits

الدكتورالمهندس
علاء الدين أحمد حسام الدين

7

التوابع الدورية

PERIODIC FUNCTIONS

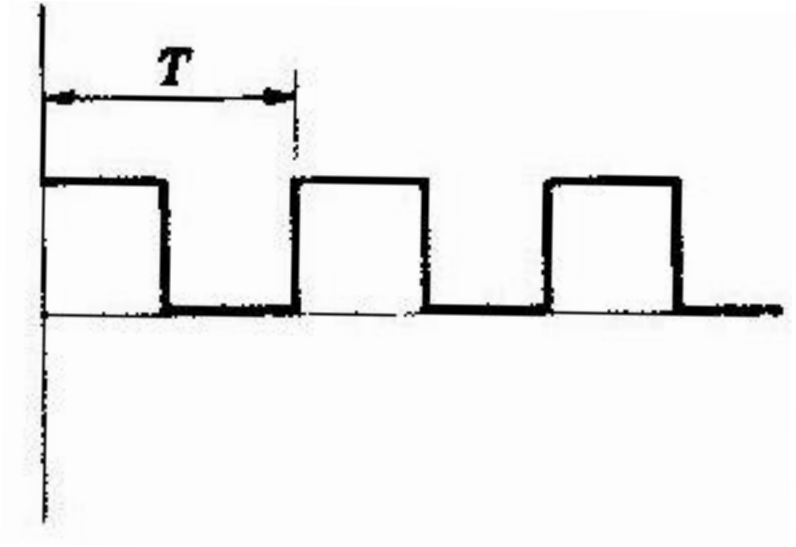
يُعرّف التابع الدوري f(t) بأنه تابع متغيّر مع الزمن، ويأخذ القيم نفسها بعد مرور فترات زمنية متساوية T، أي:

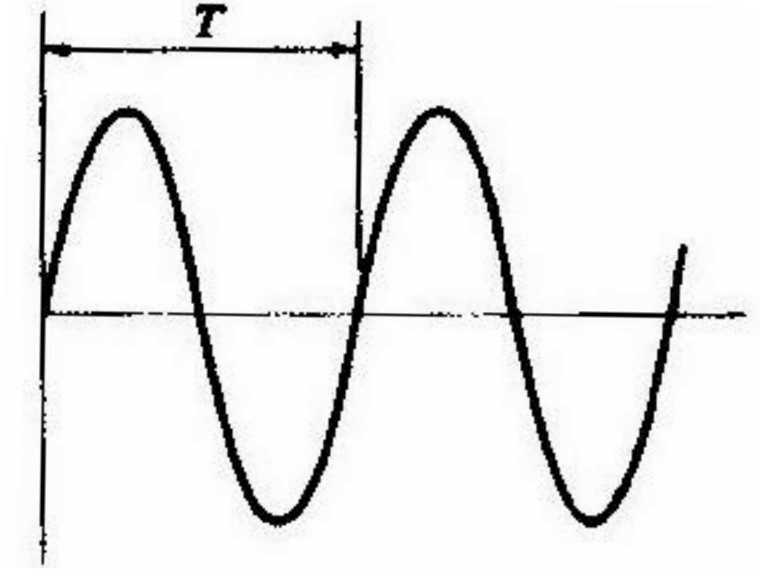
$$f(t) = f(t+T) + f(t+2T) + \ldots + f(t+nT)$$

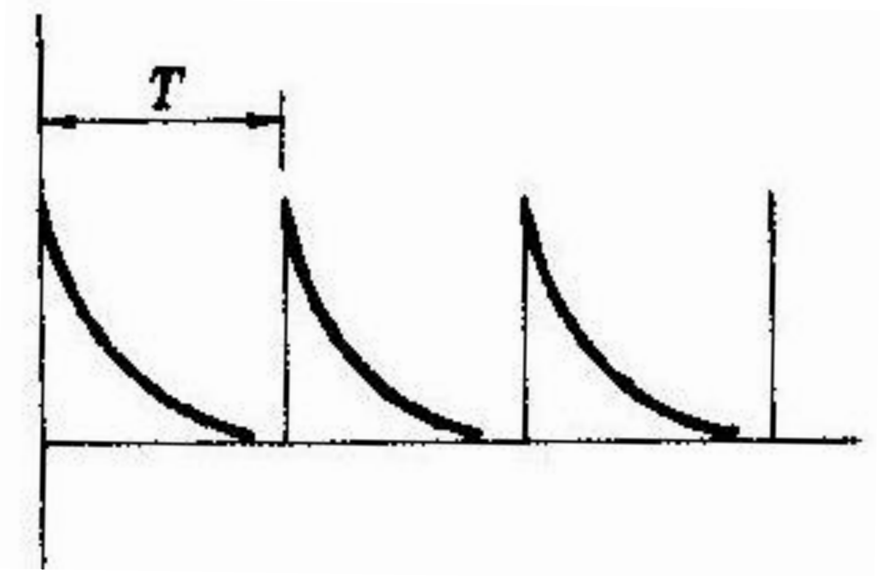
حيث:

n - عدد صحيح.

T - دور التابع، ويُعرّف بأنه أصغر فترة زمنية يبدأ عندها التابع برسم نفسه من جديد.







نماذج لتوابع موجيّة دوريه.

التردد (Frequency): هو عدد الأدوار في الثانية الواحدة، ويرمز له بالرمز (f)، وهو قيمة تساوي مقلوب الدور، أي:

$$f = \frac{1}{T}$$

$$[f] = \frac{1}{[T]} = [\frac{1}{s}] = [s^{-1}] = [Hz]$$

يسمّى جداء التردد بالمقدار (2π) بالتردد الزاوي، ويرمز له بالرمز (ω)

$$\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega T = 2\pi$$

القيمة اللحظية (الآنية) (Instantaneous Value): هي القيمة التي يأخذها التابع في كل لحظة زمنية t ، ويُرمز لها عادةً بحرف صغير، فالقيمة اللحظية للتيار هي i، وللجهد v، وللاستطاعة p، ... وهكذا.

القيمة العظمى (الأعظمية) (المطال) (Amplitude):

هي أكبر قيمة لحظية يأخذها التابع الدوري خلال دور واحد، ويُرمز لها عادةً بحرف كبير مع دليل m (max)، فالقيمة العظمى للتيار هي I_m، وللجهد V_m، ... وهكذا.

خصائص التوابع الدورية:

1- القيمة الفعّالة (المنتجة) Effective Value:

تُسمى أيضاً (Root Mean Square Value) الجذر التربيعي لمتوسط مربع القيمة (rmsv)، ويرمز لها عادةً بحرف كبير، فمثلاً القيمة الفعّالة للتيار هي I، وللجهد V، وللقوة المحركة الكهربائية E،... وهذه القيمة هي التي تعطيها أجهزة القياس، وهي التي توضع على اللوحات الاسمية للتجهيزات. تُعرّف القيمة الفعّالة للتيار المتناوب بأنها قيمة التيار المستمر المكافئ الذي لو مرّ عبر المقاومة نفسها التي تعترض مسار التيار المتناوب لسبّب في انتشار كمية الحرارة نفسها (سخونة) فيها خلال دور واحد. كمية الحرارة التي ينشرها التيار المتناوب عند وجود مقاومة R خلال زمن صغير ومتناهي في الصغر dt هي:

$$dW = i^2 \cdot R \cdot dt$$

أما خلال دور واحد T فتكون كمية الحرارة مساوية:

$$W_T = \int_0^T dW = \int_0^T i^2 \cdot R \cdot dt$$

بمساواة العلاقة السابقة مع كمية الحرارة المنتشرة في المقاومة R نفسها عند مرور تيار مستمر I فيها، وذلك خلال دور واحد T والمساوية $I^2.R.T$ يكون:

$$I^2 \cdot R \cdot T = \int_0^T i^2 \cdot R \cdot dt$$

قيمة المقاومة في الطرفين R هي نفسها، وهي كمية ثابتة، وبالتالي:

$$I^2 \cdot T = \int_0^T i^2 \cdot dt \Rightarrow I^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2 \cdot dt \Rightarrow I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 \cdot dt}$$

وهي علاقة القيمة الفعّالة للتيار. وبشكل عام:

$$\boxed{Y_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T y^2 \cdot dt}}$$

إذا تغيّر التيار وفق تابع جيبي $i = I_m \cdot Sin\omega t$ تحسب القيمة الفعّالة له كما يأتي:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 \cdot dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \cdot Sin^2 \omega t \cdot dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{T}\int_0^T Sin^2 \omega t \cdot dt}$$

$$I = \sqrt{\frac{I_m^2}{T} \cdot \frac{T}{2}} = \sqrt{\frac{I_m^2}{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0.707 \cdot I_m$$

2- القيمة المتوسطة Average Value:

$$\text{القيمة المتوسطة للتابع} = \frac{\text{المساحة الواقعة تحت منحني التابع خلال دور واحد}}{\text{الدور } T}$$

$$i = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow Q = \int i \cdot dt$$

تعطى القيمة المتوسطة للتيار حسب التعريف السابق وخلال دور واحد بالعلاقة:

$$I_{av} = \frac{Q}{T} \Rightarrow I_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T i \cdot dt$$

$$i = I_m \cdot Sin\omega t \quad \Rightarrow$$

$$I_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T I_m \cdot Sin\omega t \cdot dt = -\frac{I_m}{\omega \cdot T} \cdot \left(Cos\,\omega t\Big|_0^T\right)$$

$$I_{av}=-\frac{I_m}{\omega\cdot T}\cdot(Cos\,2\pi-Cos\,0)=-\frac{I_m}{\omega\cdot T}\cdot(1-1)=0$$

أما خلال نصف الدور فتعطى القيمة المتوسطة للتيار بالعلاقة:

$$I_{av}=\frac{2\cdot Q}{T}=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}i\cdot dt$$

$$I_{av}=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}I_m\cdot Sin\omega t\cdot dt=-\frac{2\cdot I_m}{\omega\cdot T}\cdot\left(Cos\,\omega t\Big|_0^{\frac{T}{2}}\right)$$

$$I_{av}=-\frac{2\cdot I_m}{2\pi}\cdot\left(Cos\frac{\omega\cdot T}{2}-Cos\,0\right)=-\frac{I_m}{\pi}\cdot(Cos\,\pi-Cos\,0)$$

$$I_{av}=-\frac{I_m}{\pi}\cdot(-1-1)=\frac{2}{\pi}\cdot I_m\approx 0.637\cdot I_m$$

3- عامل الشكل Form Factor:

يُعرّف عامل الشكل بأنه النسبة بين القيمة الفعّالة والقيمة المتوسطة للشكل الموجي، ويرمز له بالرمز FF، فإذا كان التابع جيبياً فإن:

$$FF = \frac{Y}{Y_{av}} = \frac{Y_m / \sqrt{2}}{2 \cdot Y_m / \pi} = \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{2}} = 1.11$$

4- عامل المطال Amplitude Factor:

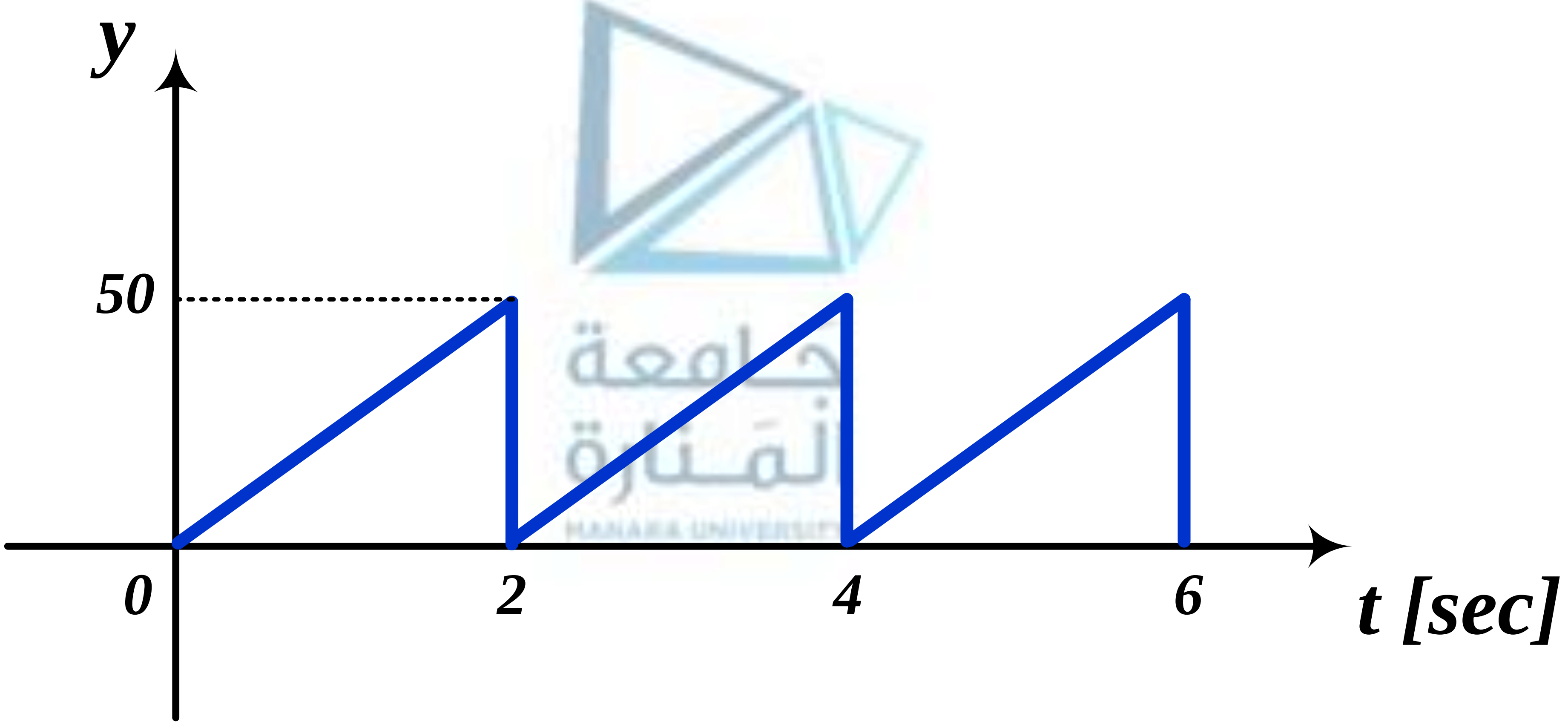
يُعرّف عامل المطال بأنه النسبة بين مطال التابع الدوري وبين قيمته الفعّالة، ويرمز له بالرمز AF، فإذا كان التابع جيبياً فإن:

$$AF = \frac{Y_m}{Y} = \frac{Y_m}{\frac{Y_m}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

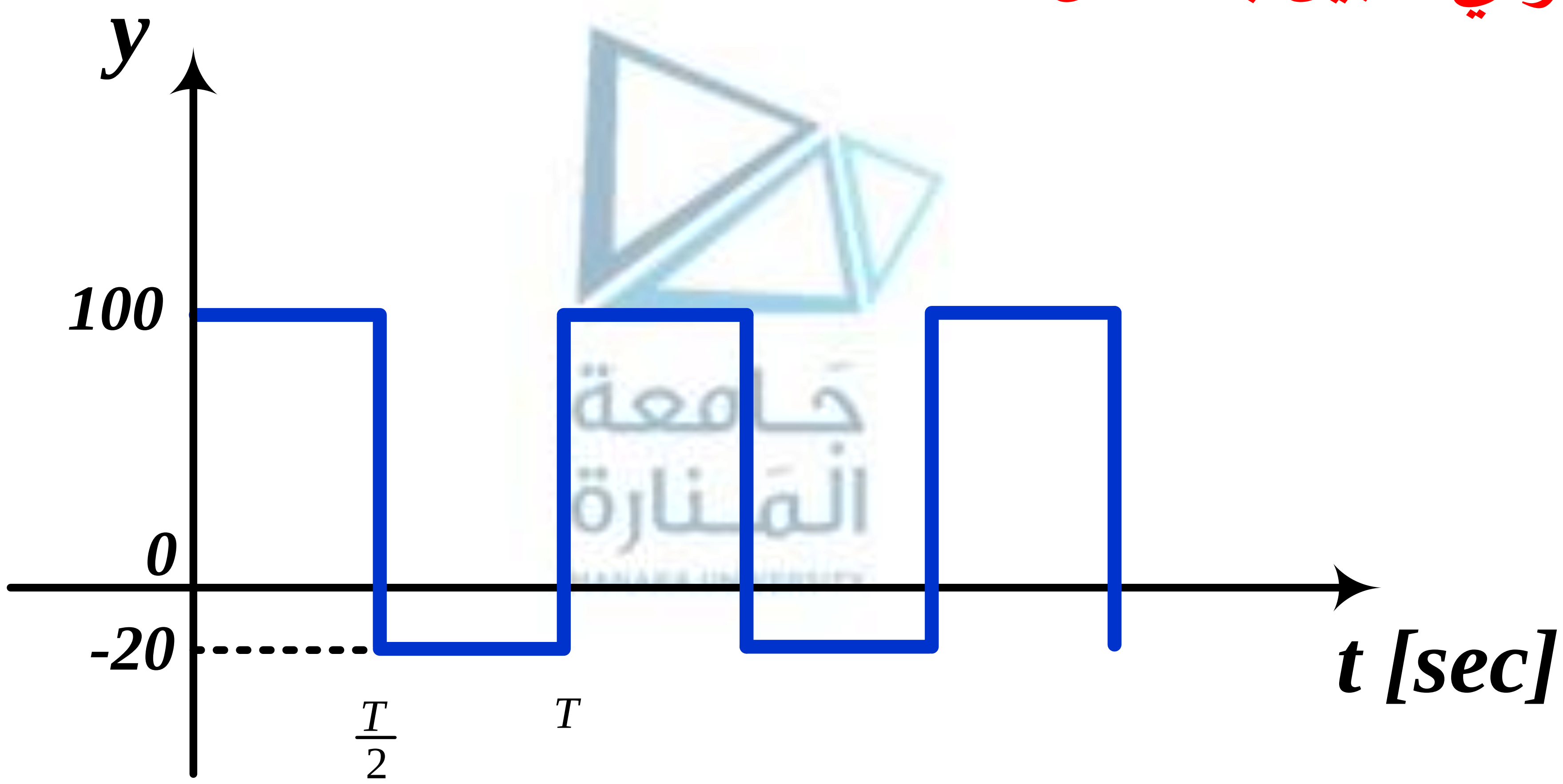
مسائل

1. أوجد القيمة المتوسطة والقيمة الفعّالة وعامل الشكل وعامل المطال للموجة المربّعة المبينة بالشكل.

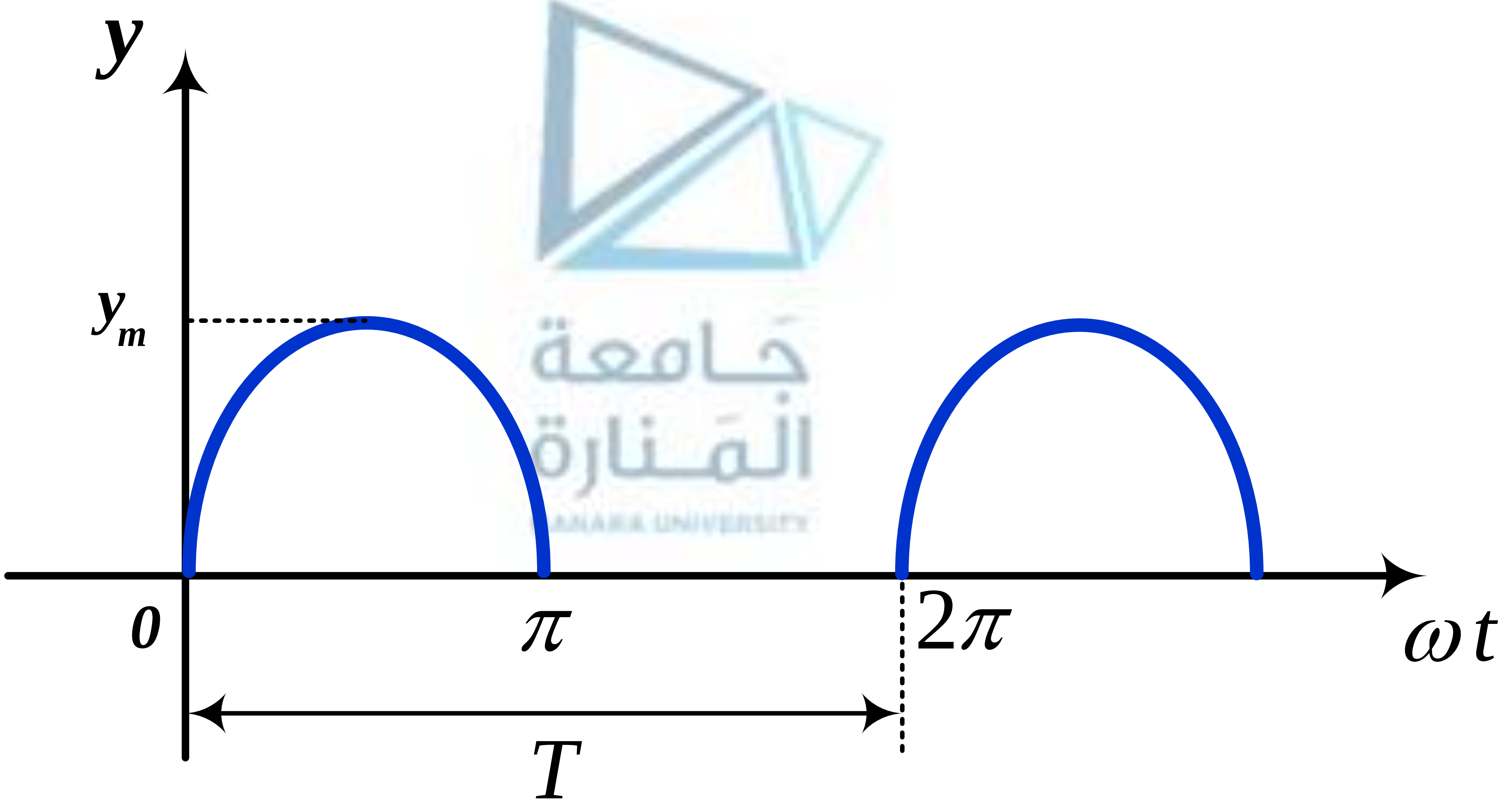
2. أوجد القيمة المتوسطة والقيمة الفعّالة وعامل الشكل وعامل المطال للشكل الموجي على هيئة سن منشار المبيّن بالشكل.



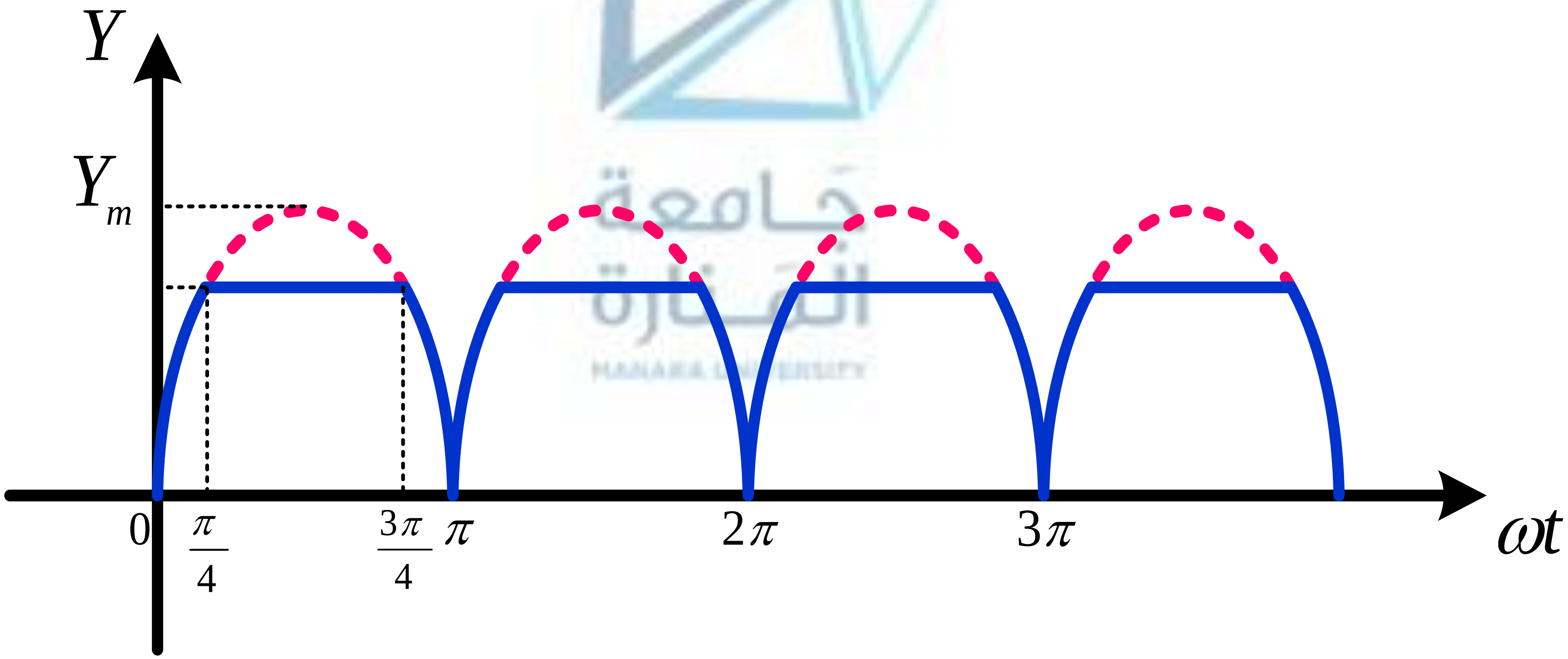
3. أوجد القيمة المتوسطة والقيمة الفعّالة وعامل الشكل وعامل المطال للشكل الموجي المبيّن بالشكل.



4. أوجد القيمة المتوسطة والقيمة الفعّال وعامل الشكل وعامل المطال للموجة الجيبية المقوّمة نصف تقويم المبيّنة بالشكل.



5. أوجد القيمة المتوسطة والقيمة الفعّالة وعامل الشكل وعامل المطال لموجة جيبية مقومة تقويماً كاملاً إذا قطع منها الجزء الأعلى عند $(\sqrt{2}/2)$ من قيمتها العظمى كما هو مبين بالشكل، علماً أن الدور يساوي (π).



6. أوجد القيمة الفعّالة لموجة التيار الموضّحة بالشكل علماً بأن التيار يمر عبر مقاومة قيمتها $2[\Omega]$. أوجد أيضاً الاستطاعة التي تحتاجها هذه المقاومة.