جامعة المنارة

قسم الهندسة المعلوماتية

الدارات الكهربائية والالكترونية

Electrical and Electronic Circuits

الدكتور المهندس

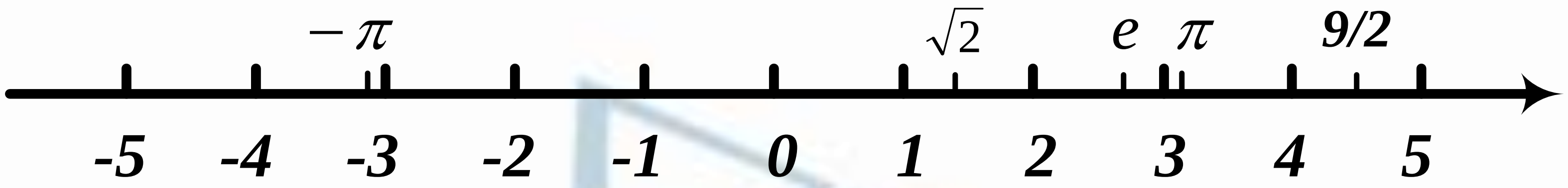
علاء الدين أحمد حسام الدين

9

التمثيل العقدي لبارامترات دارات التيارالمتناوب

الأعداد المركبة والتمثيل العقدي:

1. الأعداد الحقيقية Real Numbers:



2. الأعداد التخيّلية Imaginary Numbers:

يسمّى الجذر التربيعي لعدد حقيقي سالب عدداً تخيّلياً نقياً، مثل:

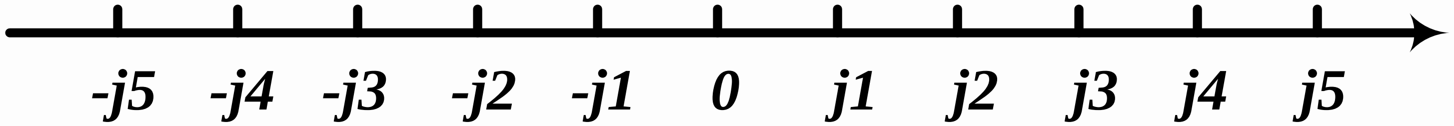
$$\sqrt{-12}\ ,\ \sqrt{-7}\ ,\ \sqrt{-2}\ ,\ \sqrt{-1}$$

فإذا فرضنا أن $j=\sqrt{-1}$ فإن:

$$\sqrt{-2}=j\sqrt{2}\ ,\ \sqrt{-5}=j\sqrt{5}\ ,\ \ldots$$

ويكون:

$$j^2=-1 \quad , \quad j^3=j^2\times j=-1j\ ,\ \ldots.$$



3. الأعداد المركبة Complex Numbers:

$Z_1 = 5$

$Z_2 = 3 + j3$

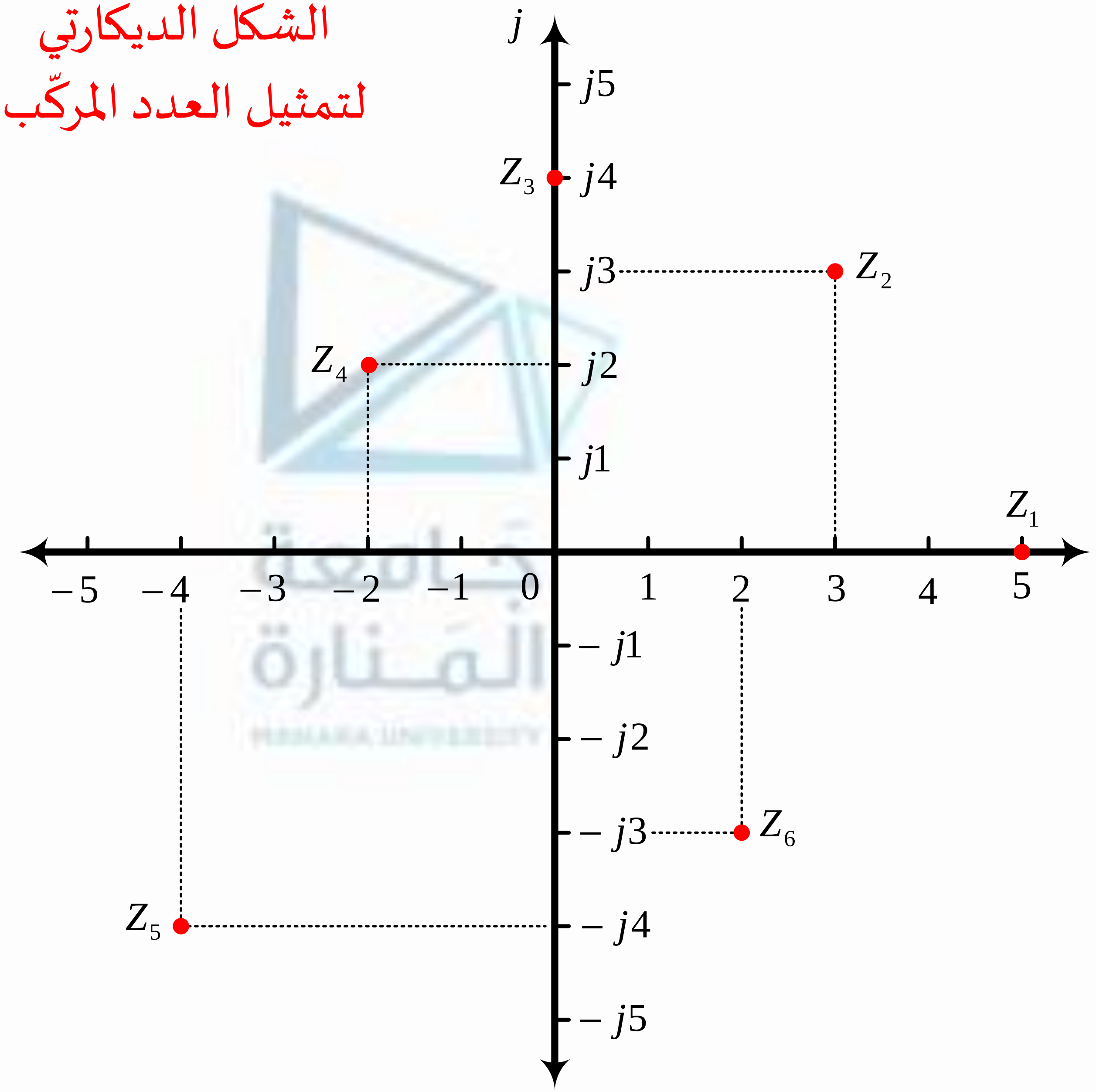
$Z_3 = j4$

$Z_4 = -2 + j2$

$Z_5 = -4 - j4$

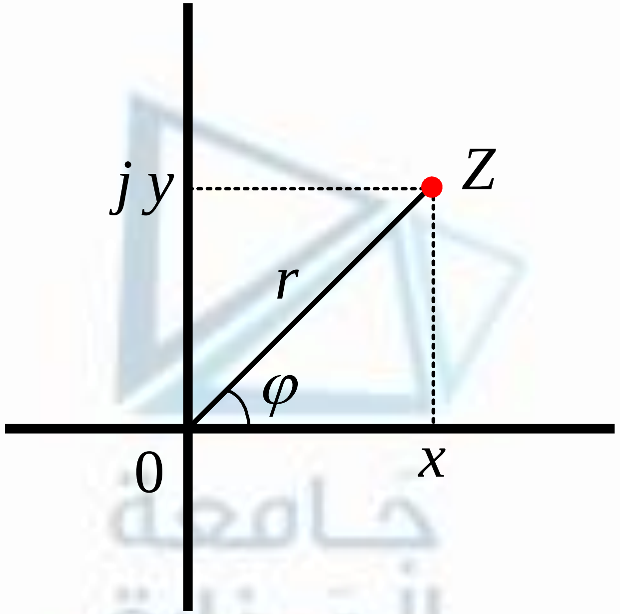
$Z_6 = 2 - j3$

الشكل الديكارتي
لتمثيل العدد المركّب



4. أشكال أخرى لتمثيل الأعداد المركبة:

أ- صيغة حساب المثلثات:



$$Z = x + jy = r \cdot Cos\varphi + j\,r \cdot Sin\varphi = r \cdot (Cos\varphi + j\,Sin\varphi)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad tg\,\varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \varphi = arc\,tg\,(\frac{y}{x})$$

ب- الصيغة الأسّيّة:

$$e^{j\varphi} = Cos\varphi + j\,Sin\varphi$$

$$Z = r\cdot(Cos\varphi + j\,Sin\varphi) = r\cdot e^{j\varphi}$$

ج- الصيغة القطبية:

$$Z = r\cdot\angle\varphi$$

حيث يُعبّر عن الزاوية φ عادةً بالدرجات.

5. مرافق العدد المركّب:

مرافق $Z = x + j\,y$ هو $Z^* = x - j\,y$

مرافق $Z = r \cdot e^{j\varphi}$ هو $Z^* = r \cdot e^{-j\varphi}$

مرافق $Z = r \cdot \angle\varphi$ هو $Z^* = r \cdot \angle -\varphi$

مرافق $Z = r \cdot (Cos\varphi + j\,Sin\varphi)$ هو $Z^* = r \cdot (Cos\varphi - j\,Sin\varphi)$

6. مجموع وفرق الأعداد المركّبة:

$$Z_1 = 5 - j2 \quad , \quad Z_2 = -3 - j8$$

$$Z_1 + Z_2 = 5 - j2 - 3 - j8 = (5-3) + j(-2-8) = 2 - j10$$

7. ضرب الأعداد المركّبة:

$$Z_1 = r_1 \cdot e^{j\varphi_1} \quad , \quad Z_2 = r_2 \cdot e^{j\varphi_2}$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = (r_1 \cdot e^{j\varphi_1}) \times (r_2 \cdot e^{j\varphi_2}) = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$Z_1 = r_1 \angle \varphi_1 \quad , \quad Z_2 = r_2 \angle \varphi_2$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = (r_1 \angle \varphi_1) \times (r_2 \angle \varphi_2) = r_1 \cdot r_2 \angle (\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$Z_1 = x_1 + j\,y_1 \quad , \quad Z_2 = x_2 + j\,y_2$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = (x_1 + j\,y_1) \times (x_2 + j\,y_2) = x_1 x_2 + j x_1 y_2 + j x_2 y_1 + j^2 y_1 y_2$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

8. قسمة الأعداد المركّبة:

$$Z_1 = r_1 \cdot e^{j\varphi_1} \quad , \quad Z_2 = r_2 \cdot e^{j\varphi_2}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1 \cdot e^{j\varphi_1}}{r_2 \cdot e^{j\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$Z_1 = r_1 \angle \varphi_1 \quad , \quad Z_2 = r_2 \angle \varphi_2$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1 \angle \varphi_1}{r_2 \angle \varphi_2} = \frac{r_1}{r_2} \angle (\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$Z_1 = x_1 + j\,y_1 \quad , \quad Z_2 = x_2 + j\,y_2$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{x_1 + j\,y_1}{x_2 + j\,y_2} \cdot \frac{x_2 - j\,y_2}{x_2 - j\,y_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + j(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

تُعد الصيغتان القطبية والأسّيّة أفضل صيغ لإجراء عمليتي الضرب القسمة، أما الصيغة الديكارتية فهي الأفضل لإجراء عمليتي الجمع والطرح.

الشكل العقدي للممانعة المكافئة:

$$\overline{Z} = R + jX_L$$

$$\overline{Z} = R - jX_C$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{\overline{Z}} = \frac{1}{R + jX}$$

$$\overline{Y} = G + jB_C \quad , \quad \overline{Y} = G - jB_L$$

$$\overline{Y} = g + jb_C \quad , \quad \overline{Y} = g - jb_L$$

بداية نضغط على MODE ونختار COMPLX

لتحويل $6 + j4$ إلى قيمة وزاوية:

تظهر القيمة

6	+	4	ENG	Shift	+	=

تظهر الزاوية

Shift	=

لتحويل $5\angle 30$ إلى قيمة حقيقية وتخيلية:

تظهر القيمة الحقيقية

5	Shift	$\angle$ -	3	0	=

تظهر القيمة التخيلية

Shift	=

مسائل

دارة مكونة من مقاومة ومكثّف RC حيث $R=5\ [\Omega]$ و $C=20\ [\mu F]$ يمر فيها تيار معادلته:

$$i = 2 \cdot Cos\,5000\,t$$

اكتب معادلة الجهد الكلي المطبق عليها.

الحل:

$$v = I_m \cdot \sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2} \cdot Sin(\omega t - arc\,tg\,(\frac{1}{\omega C R}))$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2} = \sqrt{(5)^2 + (\frac{1}{5000 \times 20 \times 10^{-6}})^2} = 11.18\,[\Omega]$$

$$\frac{1}{\omega C R} = \frac{1}{5000 \times 20 \times 10^{-6} \times 5} = 2$$

$$\Rightarrow arc\,tg\,(\frac{1}{\omega C R}) = arc\,tg\ 2 = 63.4^{\circ}$$

وبالتالي:

$$v = 11.18 \cdot 2 \cdot Cos(5000\,t - 63.4^{\circ})[volt]$$

$$v = 22.36 \cdot Cos(5000\,t - 63.4^{\circ}) \quad [volt]$$

دارة RLC تسلسلية حيث $R=15\ [\Omega]$ و $L=0.08\ [H]$ و $C=30\ [\mu F]$. فإذا كانت $\omega=500\ [rad/s]$،
بيّن هل التيار متقدم أم متأخر عن الجهد، وما هي زاوية الإزاحة.

الحل:

$$\omega L = 500 \times 0.08 = 40\ [\Omega]$$

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{500\times 30\times 10^{-6}} = \frac{1}{0.015} = 66.7\quad [\Omega]$$

$$tg\,\varphi = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R} = \frac{40-66.7}{15} = -1.8$$

$$\Rightarrow\ \varphi = arc\,tg(-1.8) = -60.65^{\circ}$$

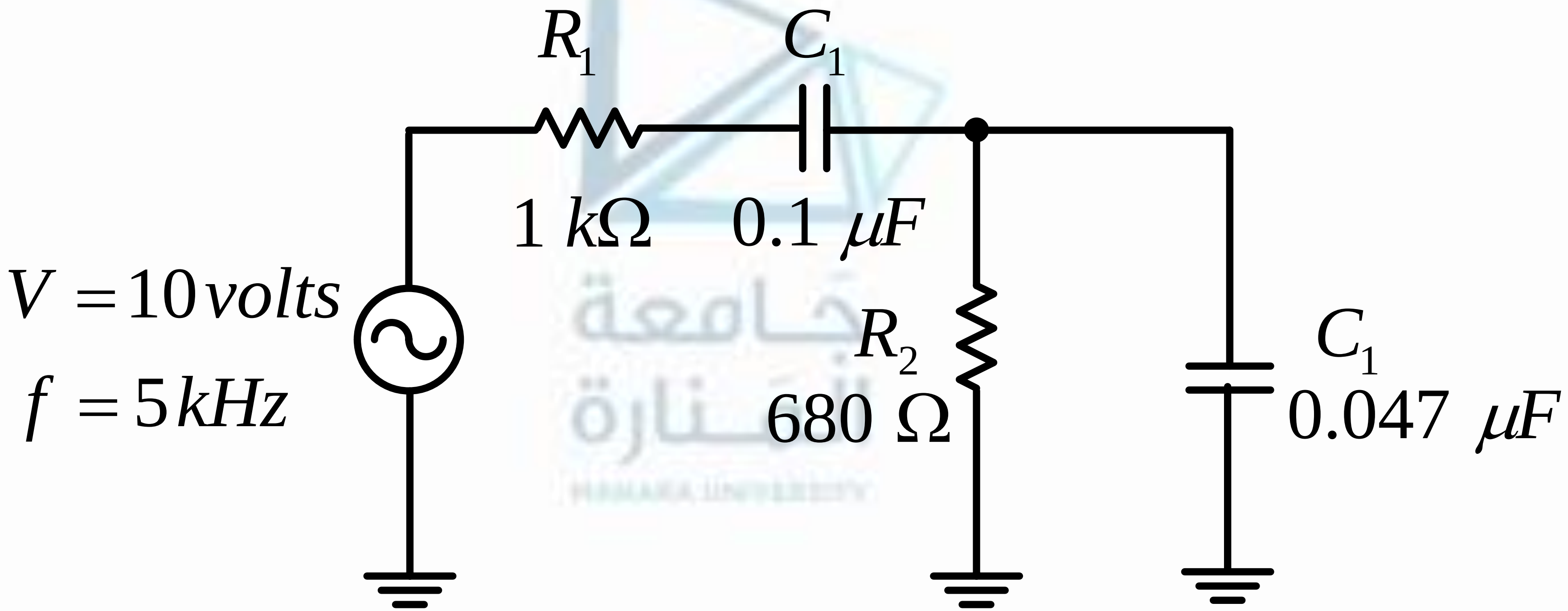
نلاحظ أن $\omega L < \dfrac{1}{\omega C}$ ، وبالتالي فإن زاوية الطور φ سالبة، والتيار متقدم على الجهد بزاوية مقدارها 60.65^{o}، والتأثير العام للدارة هو تأثير سعوي.

قيمة الممانعة هي:

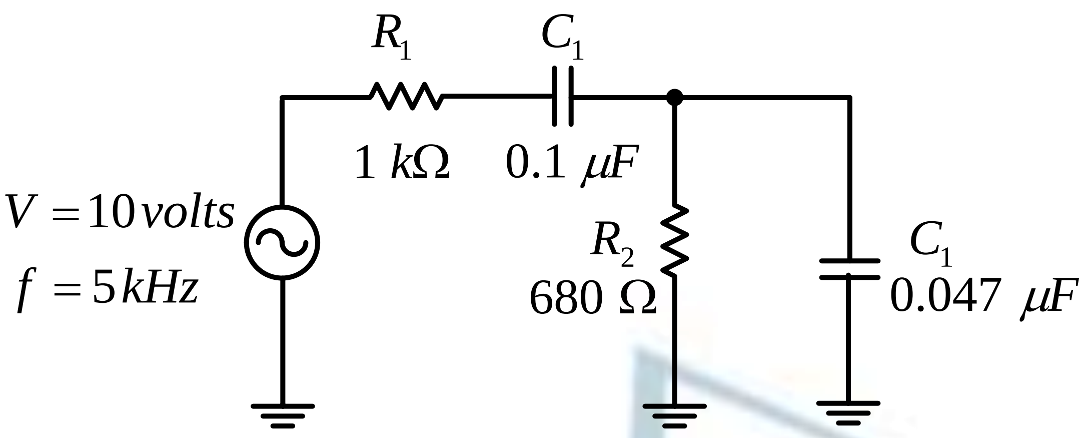
$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} = \sqrt{(15)^2 + (-26.7)^2} = 30.6\ [\Omega]$$

لتكن لدينا دارة التيار المتناوب المبينة بالشكل، المطلوب حساب:

المانعة الكلية للدارة ، التيار الكلي لها ، زاوية الانزياح بين التيار الكلي والجهد المطبق.



الحل:



نحسب اولاً المفاعلات السعوية:

$$X_{C1}=\frac{1}{\omega\cdot C_1}=\frac{1}{2\pi\cdot f\cdot C_1}=\frac{1}{2\pi\times(5\times10^3)\times0.1\times10^{-6}}=318.5\,[\Omega]$$

$$X_{C2}=\frac{1}{\omega\cdot C_2}=\frac{1}{2\pi\cdot f\cdot C_2}=\frac{1}{2\pi\times(5\times10^3)\times0.047\times10^{-6}}=677.6\,[\Omega]$$

$$Z_2=\frac{R_2\cdot(-jX_{C2})}{R_2-jX_{C2}}=\frac{680\times(-j677.6)}{680-j677.6}=\frac{-j460768}{680-j677.6}=\frac{460768\angle-90^\circ}{960\angle-44.9^\circ}$$

$$Z_2=480\angle45.1^\circ\ [\Omega]=338.8+j340\quad[\Omega]$$

$$Z_1 = 1000 - j318.5 = 1049.5\angle -17.7^\circ \ [\Omega]$$

$$Z_{eq} = Z_1 + Z_2 = 1000 - j318.5 + 338 + j340 =$$

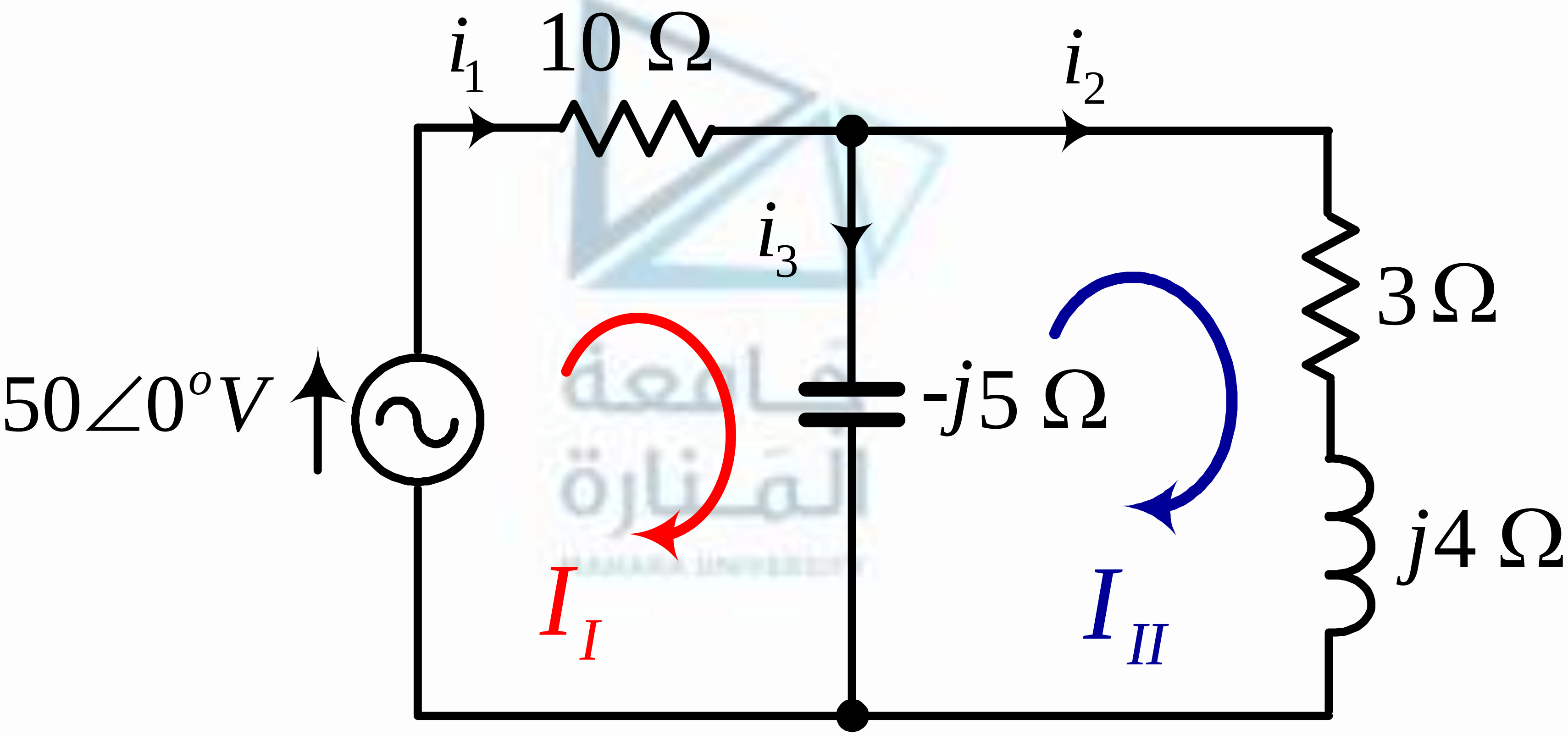
$$= 1338 + j21.5 = 1338.17\angle 0.92^\circ \ [\Omega]$$

$$I = \frac{V}{Z_{eq}} = \frac{10\angle 0^\circ}{1338.17\angle 0.92^\circ} =$$

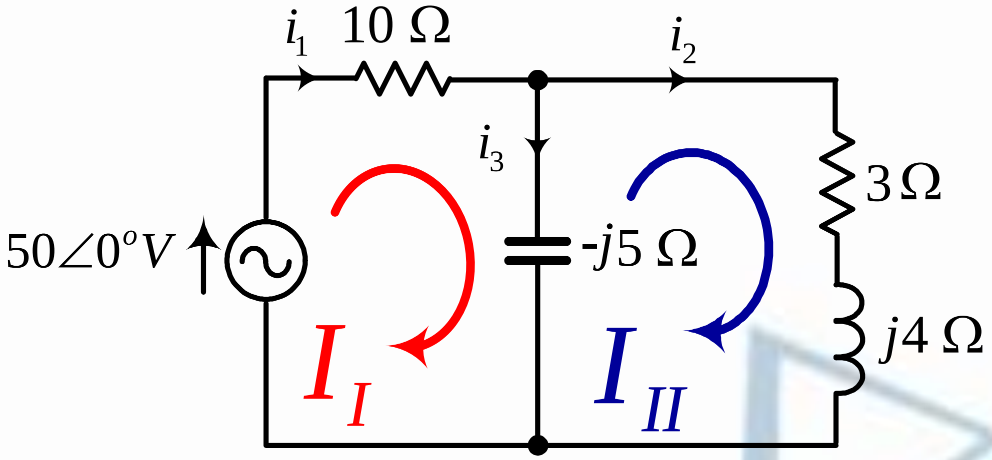
$$= 7.5\times 10^{-3}\angle -0.92^\circ = 7.5 - j1.2 \ \ [\Omega]$$

التيار الكلي يتأخر عن جهد المنبع بمقدار 0.92°.

استخدم طريقة التيارات الحلقية لحساب التيارين i_1, i_2، ثم احسب استطاعة منبع التغذية وتحقق من قانون توازن الاستطاعة.



الحل:



نكتب معادلات التيارات الحلقية

$$50\angle 0^\circ = (10 - j5)\cdot I_I - (-j5)\cdot I_{II}$$

$$50\angle 0^\circ = (10 - j5)\cdot I_I + j5\cdot I_{II} \qquad (1)$$

$$0 = (3 + j4 - j5)\cdot I_{II} - (-j5)\cdot I_I$$

$$0 = j5\cdot I_I + (3 - j1)\cdot I_{II} \qquad (2)$$

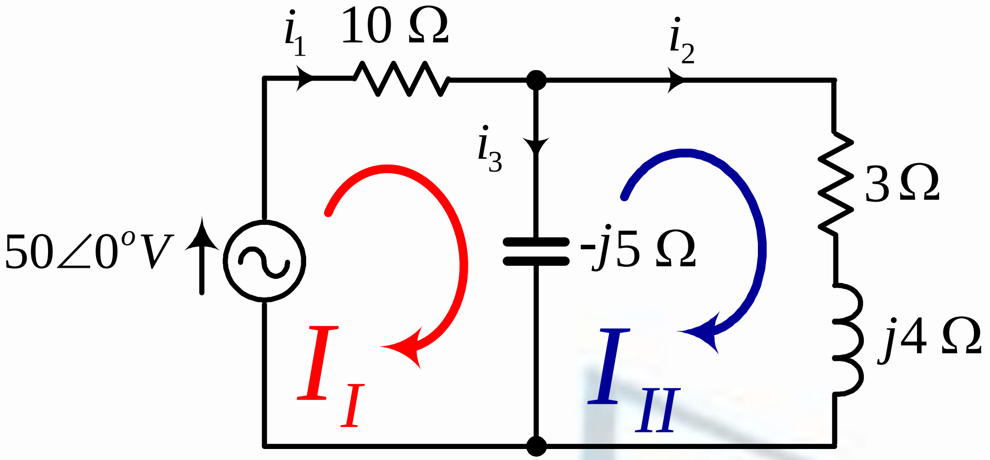
$$50\angle 0^\circ = (10 - j5)\cdot I_I + j5\cdot I_{II} \qquad (1)$$

$$0 = j5\cdot I_I + (3 - j1)\cdot I_{II} \qquad (2)$$

$$\begin{vmatrix} 10 - j5 & j5 \\ j5 & 3 - j1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} I_I \\ I_{II} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 50\angle 0^\circ \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$i_1 = I_I = \frac{\begin{vmatrix} 50\angle 0^\circ & j5 \\ 0 & 3-j1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10-j5 & j5 \\ j5 & 3-j1 \end{vmatrix}} = \frac{150-j50}{20-j15} = 2.83\angle 8.14^o \ [A]$$

$$i_2 = I_{II} = \frac{\begin{vmatrix} 10-j5 & 50\angle 0^\circ \\ j5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10-j5 & j5 \\ j5 & 3-j1 \end{vmatrix}} = \frac{-j250}{50-j25} = 4.47\angle -63.4^o \ [A]$$



$$P = v \cdot i_1 \cdot \cos\varphi = 50 \times 2.83 \times \cos(8.14^o) = 140\ [W]$$

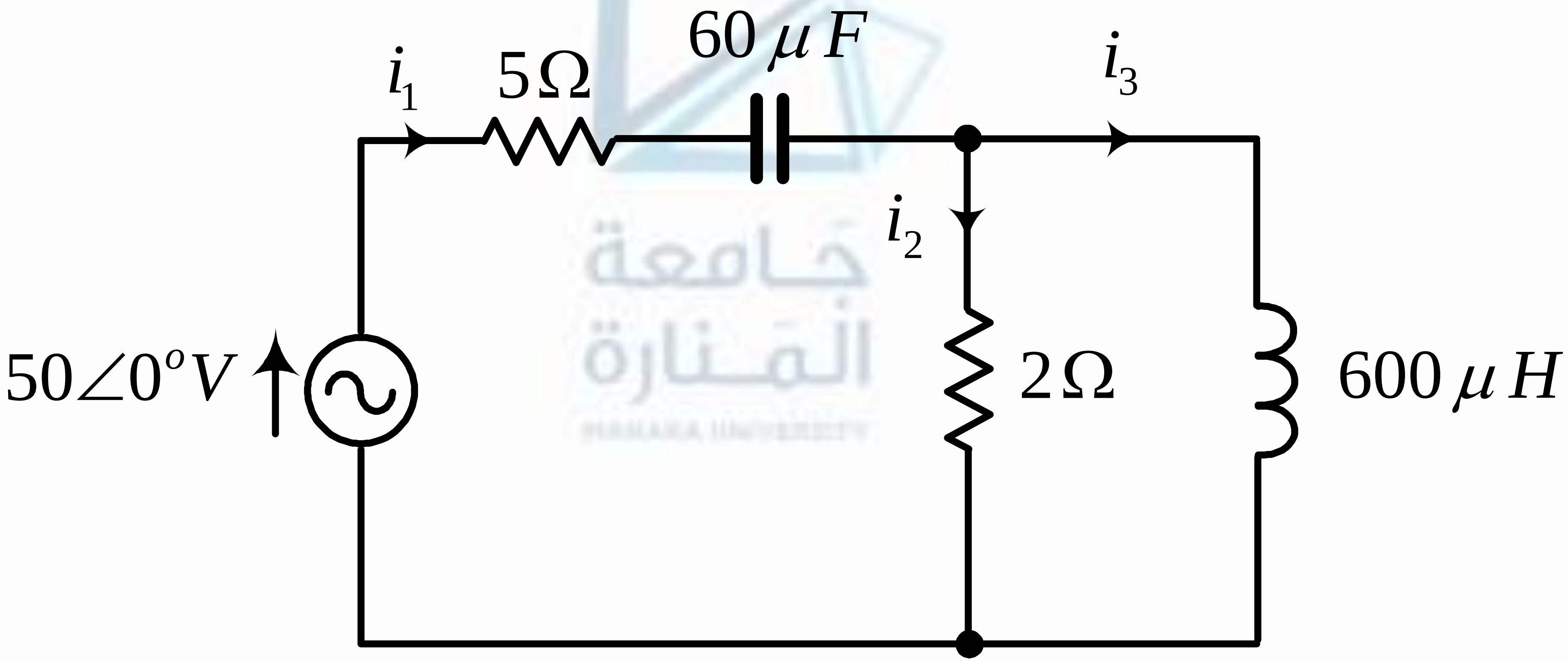
$$P_{10} = 10 \times i_1^2 = 10 \times (2.83)^2 = 80\ [W]$$

$$P_3 = 3 \times i_2^2 = 10 \times (4.47)^2 = 60\ [W]$$

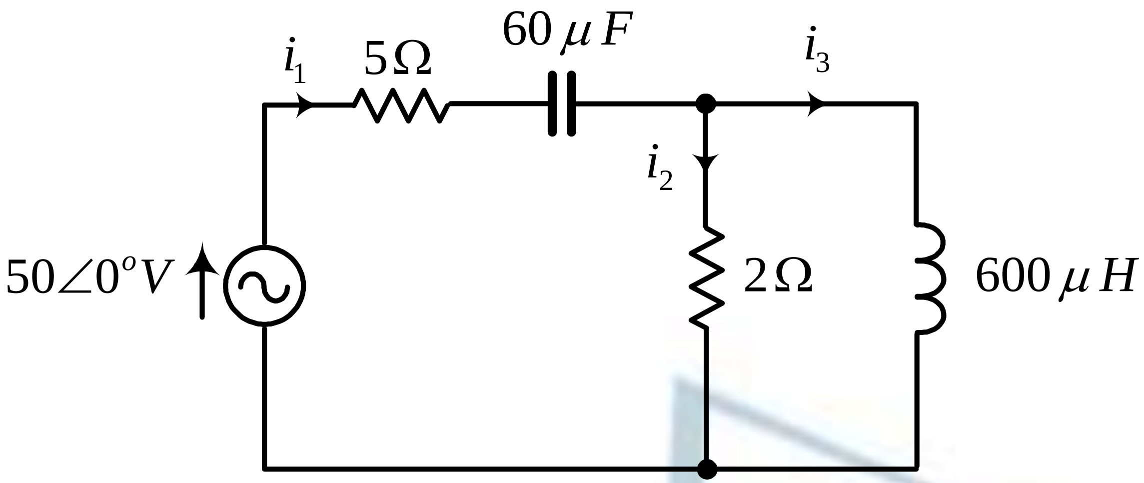
معادلة توازن الاستطاعة محققة:

$$P_{10} + P_3 = 80 + 60 = 140[W] = P$$

احسب الممانعة العقدية المكافئة لدارة التيار المتناوب المبينة بالشكل، ثم احسب التيارات i_3 ، i_2 ، i_1 . ارسم المخطط الشعاعي، وحدد زاوية الانزياح بين شعاعي التيارين i_3 ، i_2 ، علماً بأن f=500 Hz.



الحل:



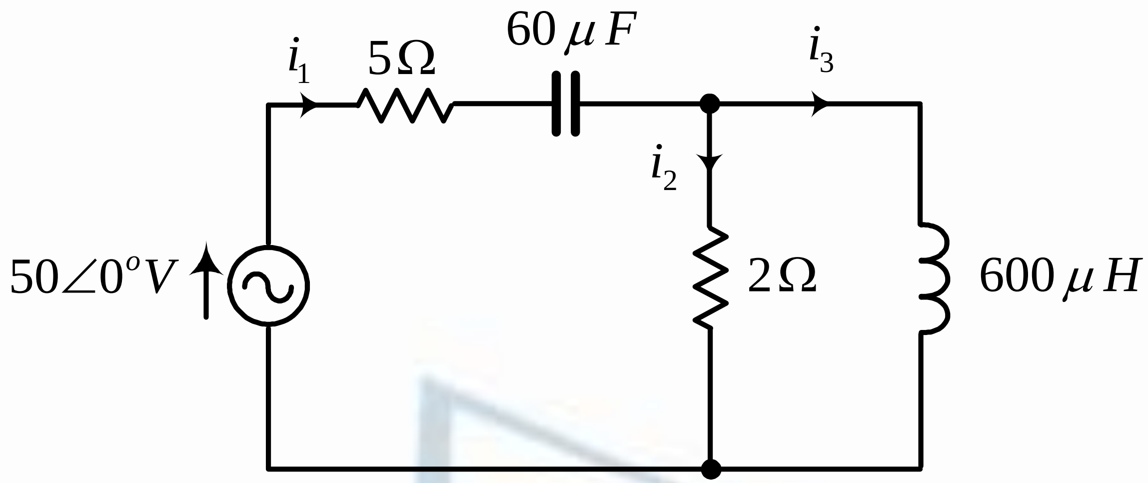
نحسب اولاً المفاعلات:

$$X_L = \omega \cdot L = 2\pi \cdot f \cdot L = 2\pi \times 500 \times 600 \times 10^{-6} = 2\ [\Omega]$$

$$X_C = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C} = \frac{1}{2\pi \times 500 \times 60 \times 10^{-6}} = 5\ [\Omega]$$

$$Z_{eq} = 5 - j5 + \frac{2 \times j2}{2 + j2} = 5 - j5 + \frac{j4}{2 + j2} = 5 - j5 + \frac{4\angle 90^\circ}{8\angle 45^\circ}$$

$$Z_{eq} = 2\sqrt{13}\angle -34^\circ \quad [\Omega]$$



$$i_1=\frac{v}{Z_{eq}}=\frac{50\angle 0^\circ}{2\sqrt{13}\angle -34^\circ}=7\angle 34^\circ\,[A]=6+j4\,[A]$$

حسب قاعدة مجزئ التيار:

$$i_2=i_1\cdot\frac{j2}{2+j2}=7\angle 34^\circ\times\frac{j2}{2+j2}=5\angle 79^\circ\,[A]=1+j5\,[A]$$

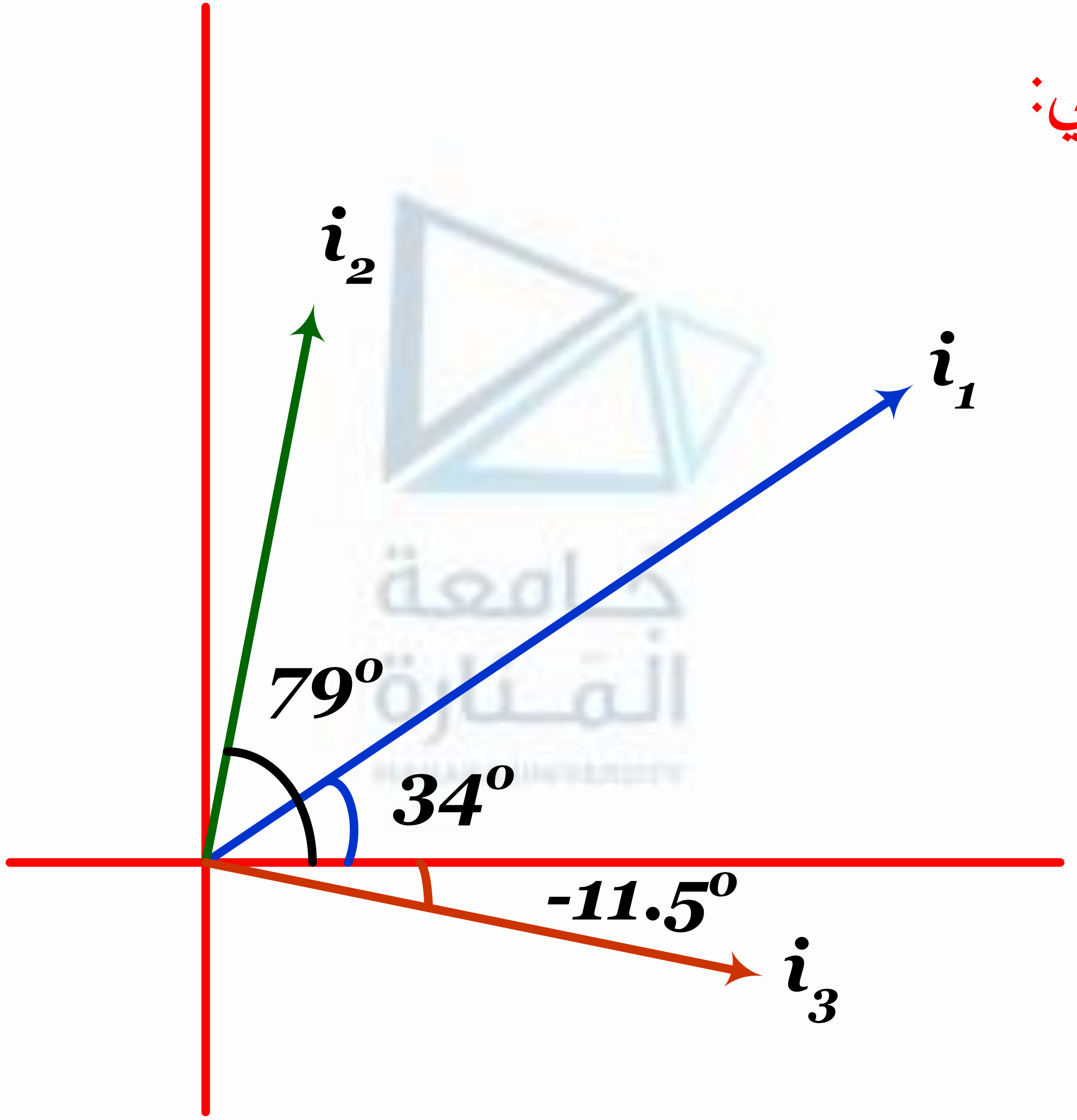
حسب قانون كيرشوف الأول:

$$i_3=i_1-i_2=6+j4-1-j5=5-j1[A]=5.1\angle -11.5^\circ\ [A]$$

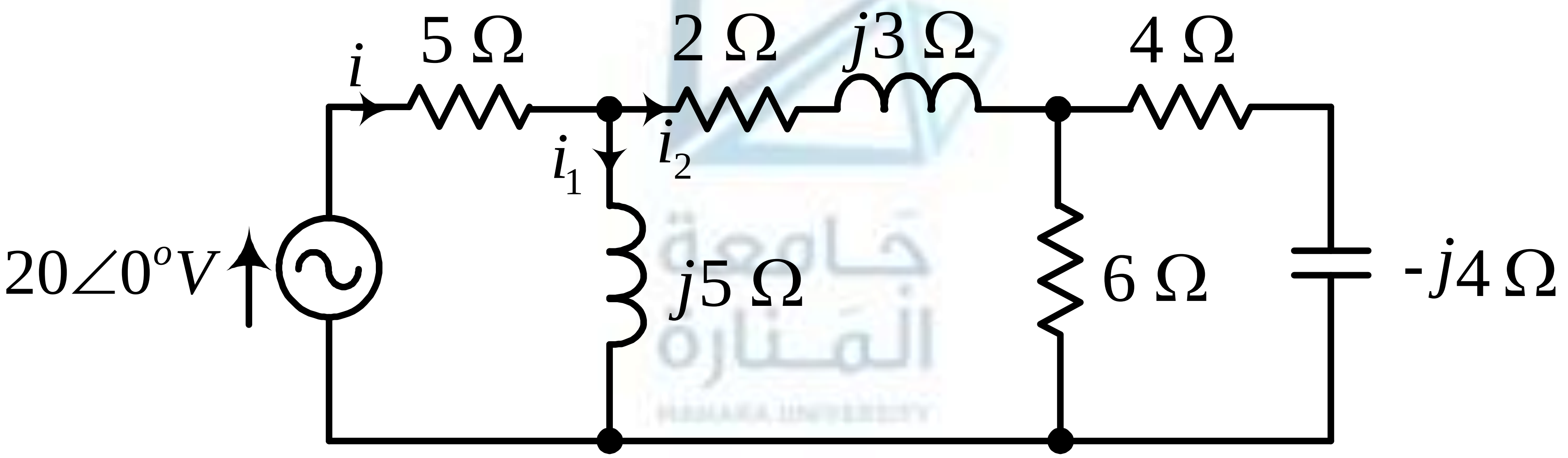
التيار i_3 يتأخر عن التيار i_2 بمقدار:

$$\varphi=79-(-11.5)=79+11.5=90.5^o$$

المخطط الشعاعي:



احسب الممانعة العقدية المكافئة لدارة التيار المتناوب المبينة بالشكل، ثم احسب القيم الفعالة للتيارات i_3 ، i_2 ، i_1.



$$Z_1 = \frac{6\times(4-j4)}{6+(4-j4)} + 2 + j3 = \frac{24-j24}{10-j4} + 2 + j3 = \frac{33.94\angle 45^o}{10.77\angle 21.8^o} + 2 + j3$$

$$Z_1 = (3.15\angle 23.2^o) + 2 + j3 = 2.9 + j1.24 + 2 + j3 = 4.9 + j4.24\ [\Omega]$$

$$Z_2 = \frac{j5\times(4.9+j4.24)}{j5+(4.9+j4.24)} = \frac{-21.2+j24.5}{4.9+j9.24} = \frac{32.4\angle 49.13^o}{10.46\angle 62^o} = 3\angle -12.87^o$$

$$Z_2 = 2.9 - j0.67[\Omega]$$

$$Z_{eq} = 5 + Z_1 + Z_2 = 5 + 4.9 + j4.24 + 2.9 - j0.67 =$$

$$= 12.8 + j3.57[\Omega] = 13.3\angle 15.6^o\,[\Omega]$$

$$I = \frac{V}{Z_{eq}} = \frac{20}{13.3} = 1.5[A]$$

$$I_2 = I \cdot \left| \frac{j5}{j5 + 4.9 + j4.24} \right| =$$

$$= 1.5 \times \left| \frac{j5}{4.9 + j9.24} \right| = 1.5 \times \left| \frac{5\angle 90^o}{10.46\angle 62^o} \right| = \left| \frac{7.5\angle 90^o}{10.46\angle 62^o} \right|$$

$$I_2 = 0.72\,[A]$$

$$I_1 = I - I_2 = 1.5 - 0.72 = 0.78\,[A]$$