جامعة المنارة

عملي مقرر الإشارات والنظم

د. السموءل صالح

م. أوشين داؤد

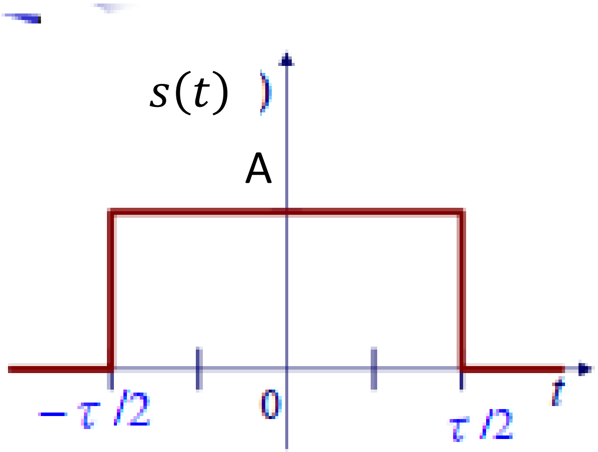
تمارين الأسبوع ٤

الفصل الاول -٢٠٢١/٢٠٢٢

تمرين :

أوجد تحويل فورييه للنبضة المستطيلة القياسية المبينة في الشكل :

من قانون تحويل فورييه :



$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{-T/2} s(t)e^{-j2\pi ft}dt + \int_{-T/2}^{+T/2} s(t)e^{-j2\pi ft}dt + \int_{+T/2}^{+\infty} s(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

يكون الحدان الأول والثالث من العلاقة السابقة معدومين لأن الاشارة s(t) معدومة في المجالين الموضحين فيصبح التكامل :

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-T/2}^{+T/2} s(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-T/2}^{+T/2} A\, e^{-j2\pi ft}dt = \frac{A}{-j2\pi f}\left[e^{-j2\pi ft}\right]_{-T/2}^{+T/2}$$

بالتعويض بحدود التكامل :

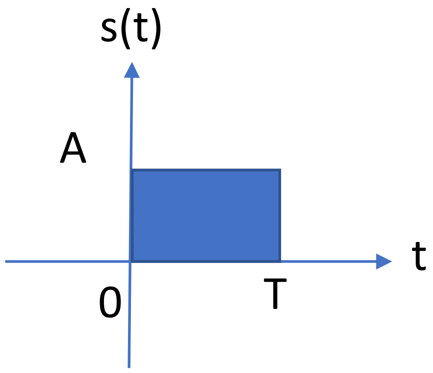
$$S(f) = \frac{A}{-j2\pi f}\left[e^{-\frac{j2\pi fT}{2}} - e^{+-\frac{j2\pi fT}{2}}\right] = \frac{A}{\pi f}[sin(\pi fT)]$$

نضرب الحد السابق ب T ونقسم عليها :

$$S(f) = \frac{TA}{T\pi f}[sin(\pi fT)] = \mathrm{AT\ sinc}\ (\pi fT)$$

ملاحظة: تابع sinc هو: $sinc\ (x) = sin(x)/x$

تمرين: اوجد تحويل فوريه لنبضة مستطيلة مزاحة كماهو مبين بالشكل المجاور:



$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j2\pi ft}dt = \int_{-\infty}^{0} s(t)e^{-j2\pi ft}dt + \int_{0}^{T} s(t)e^{-j2\pi ft}dt + \int_{T}^{+\infty} s(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

يكون الحدان الأول والثالث من العلاقة السابقة معدومين لأن الاشارة s() معدومة في المجالين الموضحين فيصبح التكامل :

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j2\pi ft}dt = 0 + \int_{0}^{T} s(t)e^{-j2\pi ft}dt + 0 = \int_{0}^{T} A\, e^{-j2\pi ft}dt = \frac{A}{-j2\pi f}[e^{-j2\pi ft}]_0^T = \frac{A}{-j2\pi f}[e^{-j2\pi fT} - 1]$$

نخرج إشارة – خارج قوسين :

$$S(f) = \frac{A}{j2\pi f}[1 - e^{-j2\pi fT}] = \frac{A}{j2\pi f}[1 - e^{-j\pi fT}.e^{-j\pi fT}] = \frac{Ae^{-j\pi fT}}{j2\pi f}[e^{+j\pi fT} - e^{-j\pi fT}] = \frac{\mathrm{A}e^{-j\pi fT}}{\pi f}\sin(\pi fT)$$

نضرب الحد السابق ب T ونقسم عليها :

ملاحظة: يمكن كتابة التابع الأسي كما يلي :
$e^B = e^{B/2}e^{B/2}$

$$S(f) = \frac{TAe^{-j\pi fT}}{T\pi f}[\sin(\pi fT)] = \mathrm{AT}e^{-j\pi fT}\,\mathrm{sinc}\,(\pi fT)$$

تمرين: برهن خاصية الازاحة الزمنية لتحويل فورييه : $FT\,\{s(t \pm t0)\} = e^{\pm j2\pi f t0} S(f)$

حالة التأخير

$$FT\,\{s(t-t0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t-t0) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$(t-t0) = x \gg t = x + t0, dt = dx ,$$

$$FT\,\{s(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{-j2\pi f (x+t0)} dx$$

$$FT\,\{s(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{-j2\pi f (x+t0)} dx = e^{-j2\pi f (t0)} \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{-j2\pi f (x)} dx = e^{-j2\pi f (t0)} S(f)$$

حالة التقديم

$$FT\,\{s(t+t0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t+t0) e^{-j2\pi f t} dt$$

$$(t+t0) = x \gg t = x - t0, dt = dx ,$$

$$FT\,\{s(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{-j2\pi f (x-t0)} dx$$

$$FT\,\{s(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{-j2\pi f (x-t0)} dx = e^{+j2\pi f (t0)} \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{-j2\pi f (x)} dx = e^{+j2\pi f (t0)} S(f)$$

تمرين: اوجد تحويل فورييه للإشارة التالية : $s(t) = u(t).cos(w_0 t)$

نعوض تابع cos حسب صيغة اولر

$$FT\{s(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(t).\,cos(w_0 t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{0}^{\infty} cos(w_0 t) e^{-j2\pi f t} dt =$$

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{e^{j2\pi f_0 t} + e^{-j2\pi f_0 t}}{2} \right) e^{-j2\pi f t} dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{e^{j2\pi f_0 t} e^{-j2\pi f t} + e^{-j2\pi f_0 t e^{-j2\pi f t}}}{2} \right) dt =$$

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{e^{-j2\pi\,(-f_0+f)t} + e^{-j2\pi(f_0+f)t}}{2} \right) dt = \frac{-1}{4j\pi(f-f_0)} e^{-j2\pi\,(-f_0+f)t}|_0^{\infty} + \frac{-1}{4j\pi(f+f_0)} e^{-j2\pi\,(f_0+f)t}|_0^{\infty} =$$

$$\frac{-1}{4j\pi(f-f_0)}(0-1) + \frac{-1}{4j\pi(f+f_0)}\,(0-1) = \frac{+1}{4j\pi(f-f_0)} + \frac{+1}{4j\pi(f+f_0)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f_0}) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\delta}(\boldsymbol{f}+\boldsymbol{f_0}) = S(f)$$

$$\boxed{\delta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi f t} dt}$$

$$\boxed{\delta(f \pm f0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{\mp j2\pi f t} e^{-j2\pi f t} dt}$$

ملاحظة: تم إيجاد الحل النهائي وفق
خاصية الازاحة الترددية التي سيتم شرحها
لاحقاً والمبينة جانباً