3- الشبكات المتشعبة mesh circuit وقانونا كيرشوف Kirchhoff's circuit laws

الشبكة: مجموعة من المقاومات والمولدات والآخذات موصولة ببعضها البعض.

العقدة node: ملتقى تيارين كهربائيين أو أكثر.

الفرع: المحل الهندسي لعقدتين متتاليتين.

الحلقة loop: مجموعة من الأفرع.

3-1- قانون العقد (قانون انحفاظ التيار الكهربائي) Kirchhoff's current law

ينص هذا القانون على أن المجموع الجبري للتيارات المتلاقية في العقدة من الشبكة يساوي الصفر.

$$\sum I = 0 \qquad (4)$$

نصطلح على كون التيارات الداخلة إلى العقدة موجبة، بينما الخارجة منها سالبة.

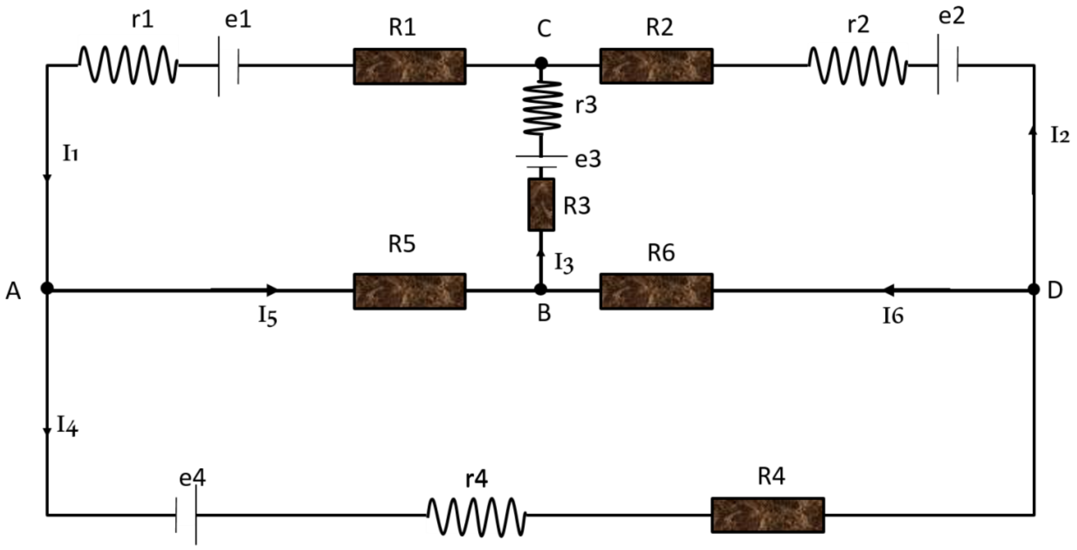
ملاحظة: لا يمكن تخزين التيار الكهربائي، فالتيار الذي يدخل إلى العقدة يساوي التيار الخارج منها.

3-2- قانون الحلقات (قانون انحفاظ القوة المحركة الكهربائية) Kirchhoff's voltage law

ينص على أن مجموع القوى المحركة الكهربائية في اي دارة كهربائية يساوي مجموع المقاومات الداخلية والخارجية في هذه الدارة مضروبة بشدة التيار.

$$\sum e_x = \sum (R + r) . I_x \qquad (5)$$

لتكن لدينا الدارة الآتية، طبق قانونا كيرشوف الأول والثاني على الدارة، علماً أن الجهة الموجبة للتيار اصطلاحاً هي عكس عقارب الساعة.



الشكل (3): دارة لا على التعيين من أجل تطبيق قوانين كيرشوف

ملاحظة: الاتجاه يكون مصطلح، في الدارة السابقة أخذنا الاتجاه عكس عقارب الساعة موجب.

العقد: $\sum I_x = 0$

العقدة A: $I_1 - I_5 - I_4 = 0$

العقدة B: $I_5 + I_6 - I_3 = 0$

العقدة C: $I_3 + I_2 - I_1 = 0$

العقدة D: $I_4 - I_6 - I_2 = 0$

الحلقات: $\sum e_x = \sum (R + r) \,.\, I_x$

الحلقة ABe_3e_1A:

$$e_3 + e_1 = R_5 I_5 + (R_3 + r_3).I_3 + (R_1 + r_1).I_1$$

الحلقة BDe_2e_3B:

$$e_2 - e_3 = -R_6 I_6 + (R_2 + r_2).I_2 - (R_3 + r_3).I_3$$

الحلقة Ae_4DBA:

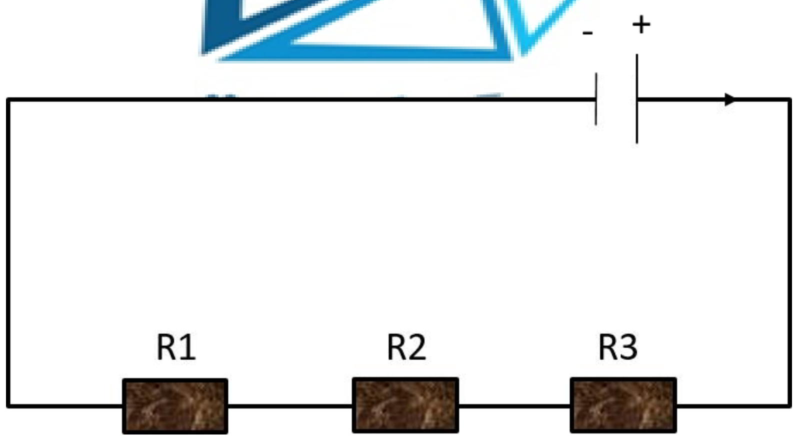
$$e_4 = (R_4 + r_4).I_4 + R_6 I_6 - R_5 I_5$$

4- بعض التطبيقات some applications

4-1- وصل المقاومات resistors:

توجد طريقتان لوصل المقاومات في الدارة الكهربائية هما الوصل على التسلسل والوصل على التفرع.

<u>الوصل على التسلسل series</u>



الشكل (4): دارة وصل المقاومات على التسلسل.

نصل نهاية المقاومة الأولى ببداية المقاومة الصانية وهكذا ...

التيار الكهربائي في حالة الوصل على التسلسل يكون ثابت: $I = cte$.

حيث أن فرق الكمون بين طرفي كل مقاومة $V_1 = R_1 I \quad ,V_2 = R_2 I \quad ,V_3 = R_3 I$

بتطبيق قانون كيرشوف الثاني

$$\sum e_x = \sum R_x I_x$$

$$\rightarrow e = R_1 I + R_2 I + R_3 I$$

ولكن عندما تهمل r فإن $e \approx V$ وبالتالي فإن:

$$V = (R_1 + R_2 + R_3).I$$

بالقسمة على I نجد:

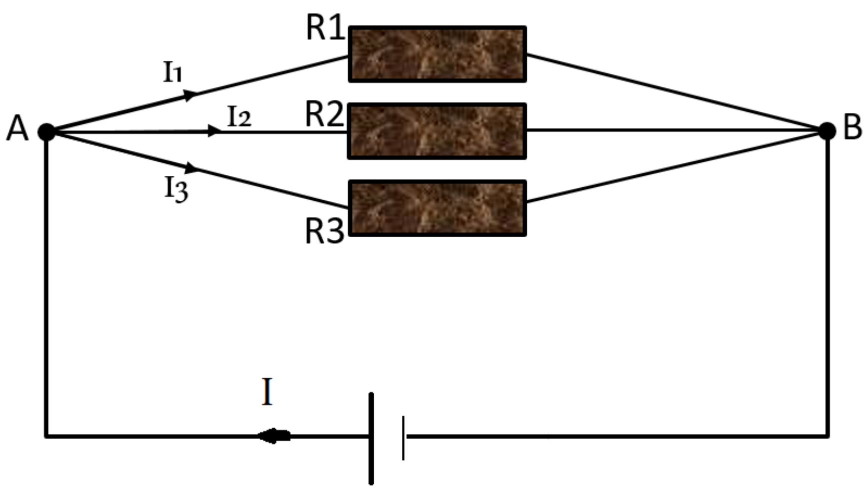
$$\frac{V}{I} = R_1 + R_2 + R_3$$

$$\rightarrow R = R_1 + R_2 + R_3$$

فتكون المقاومة المكافئة هي:

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i \qquad (6)$$

<u>الوصل على التفرع parallel</u>



الشكل (5): دارة وصل المقاومات على التفرع.

نصل طرف جميع المقاومات إلى نقطة واحدة هي A والطرق الآخر إلى نقطة أخرى هي B.

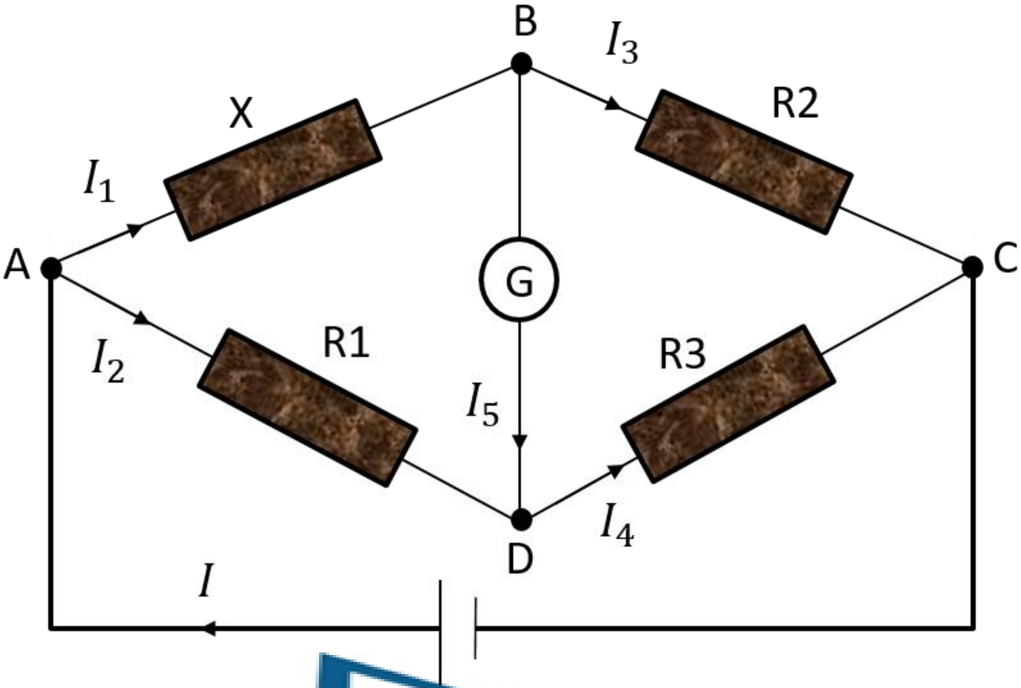
فتكون المقاومة المكافئة (تمرين استنتاج العلاقة) هي:

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} \qquad (7)$$

إن فالمقاومة المكافئة في حالة الوصل على التسلسل تكون أكبر مقاومة في الدارة، بينما تكون المقاومة المكافئة في حالة الوصل على التفرع أصغر مقاومة في الدارة.

3-4- جسر وطسطن (من تطبيقات قوانين كيرشوف) Wheatstone bridge

جسر وطسطن عبارة عن دارة كهربائية مصممة لقياس المقاومات في حالة التيار المستمر. يعرف مقياس الغلفاني بأنه جهاز كهربائي حساس لقياس التيارات الكهربائية الصغيرة جداً. لتكن لدينا الدارة الموضحة بالشكل (9)، عبارة عن أربع مقاومات R_1, R_2, R_3, X حيث X مقاومة مجهولة، ولدينا G مقياس غلفاني ومقاومته الداخلية r_5. نصطلح أن الاتجاه الموجب مع عقارب الساعة وأن التيارات الداخلة إلى العقدة موجبة والتيارات الخارجة من العقدة سالبة.



الشكل (9): دارة جسر وطسطون لحساب مقاومة مجهولة X.

نطبق قانون العقد: $\sum I_x = 0$

العقدة A: $I - I_1 - I_2 = 0$

العقدة B: $I_1 - I_3 - I_5 = 0$

العقدة C: $I_3 + I_4 - I = 0$

العقدة D: $I_2 + I_5 - I_4 = 0$

الحلقات: $\sum e_x = \sum (R + r) . I_x$

الحلقة ABDA

$$XI_1 + r_5 I_5 - R_1 I_2 = 0$$

الحلقة BCDB

$$R_2I_3 - R_3I_4 - r_5I_5 = 0$$

يتوازن جسر وطسطون عندما يكون التيار المار في مقياس الغلفاني G مساوياً للصفر، اي أن:

$$V_B - V_D = 0 \quad \rightarrow I_5 = 0$$

وبالتالي يصبح عند العقدة B وعند العقدة D مايلي:

العقدة B: $I_1 - I_3 = 0 \quad \rightarrow \quad I_1 = I_3$

العقدة D: $I_2 - I_4 = 0 \quad \rightarrow \quad I_2 = I_4$

أما الحلقات فتصبح:

الحلقة ABDA

$$XI_1 - R_1I_2 = 0 \quad \rightarrow \quad XI_1 = R_1I_2$$

الحلقة BCDB

$$R_2I_3 - R_3I_4 = 0 \quad \rightarrow \quad R_2I_3 = R_3I_4$$

وبالتالي يكون:

$$\begin{cases} I_3 = \dfrac{R_3I_4}{R_2} \\ I_1 = \dfrac{R_1I_2}{X} \end{cases}$$

ولكن وجدنا أن $I_1 = I_3$ وبالتالي يكون:

$$\frac{R_3I_4}{R_2} = \frac{R_1I_2}{X}$$

وايضاً وجدنا $I_2 = I_4$ فيكون:

$$\frac{R_3}{R_2} = \frac{R_1}{X}$$

وبالتالي يكون:

$$X = R_1 \cdot \frac{R_2}{R_3} \qquad (11)$$

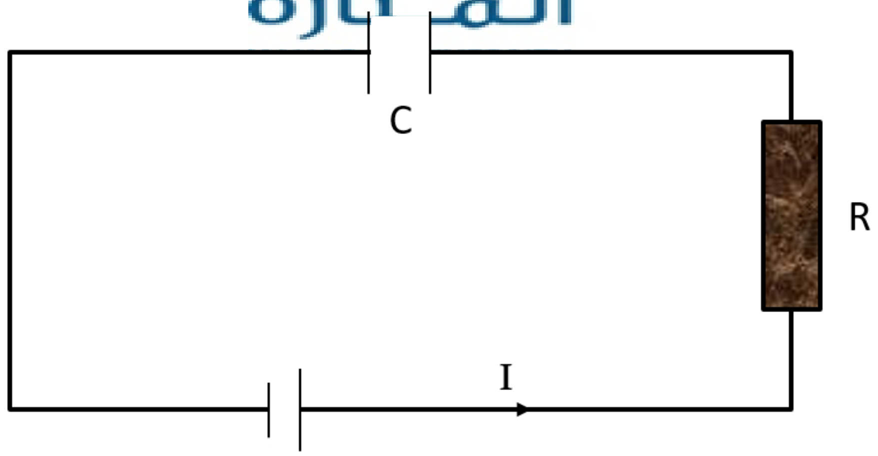
أحياناً يمكن الاستعاضة عن المقاومة بالطول حيث أن $R = \rho \frac{l}{S}$ فتصبح علاقة X:

$$X = R_1 \frac{l_2}{l_3} \qquad (12)$$

حيث أن $S_2 = S_3$.

4-4- دارة شحن مكثفة غير مقاومة Charging a Capacitor

لتكن لدينا الدارة الكهربائية التي تتألف من مولد كهربائي قوته المحركة الكهربائية e ومقاومته الداخلية مهمله r ومكثفة سعتها C (الشكل 10).



الشكل (10): دارة شحن مكثفة.

$$r = 0 \quad \rightarrow \quad e \approx V$$

عندما تكون المقاومة الداخلية للمولد r معدومة فإنه تصبح القوة المحركة الكهربائية مساوية لفرق الكمون.

$$e = V_R + V_C$$

حيث: $V_C = \frac{q}{C}$, $V_R = R.I$

$$\rightarrow e = R.I + \frac{q}{C}$$

$$\rightarrow e - \frac{q}{C} = R.I$$

$$\rightarrow \frac{e.C - q}{C} = R.I$$

ولكن $I = \frac{dq}{dt}$ وبالتالي:

$$\rightarrow \frac{e.C - q}{C} = R\frac{dq}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{dq}{e.C - q} = \frac{dt}{R.C}$$

$$\rightarrow \int_0^q \frac{dq}{e.C - q} = \int_0^t \frac{dt}{R.C}$$

نعلم أن $\int \frac{dx}{1-x} = -ln|1 - x|$ وبالتالي تصبح المعادلة الأخيرة بالشكل:

$$-ln|e.C - q|\Big|_0^q = \frac{t}{R.C}$$

$$\rightarrow ln\frac{e.C - q}{e.C} = -\frac{t}{R.C}$$

ولكن نعلم أن $\ln y = x \quad \rightarrow y = e^x$

$$\rightarrow e.C - q = e.C.e^{-\frac{t}{R.C}}$$

$$\rightarrow q = e.C - e.C.e^{-\frac{t}{R.C}}$$

$$\rightarrow q = e.C\left(1 - e^{-\frac{t}{R.C}}\right)$$

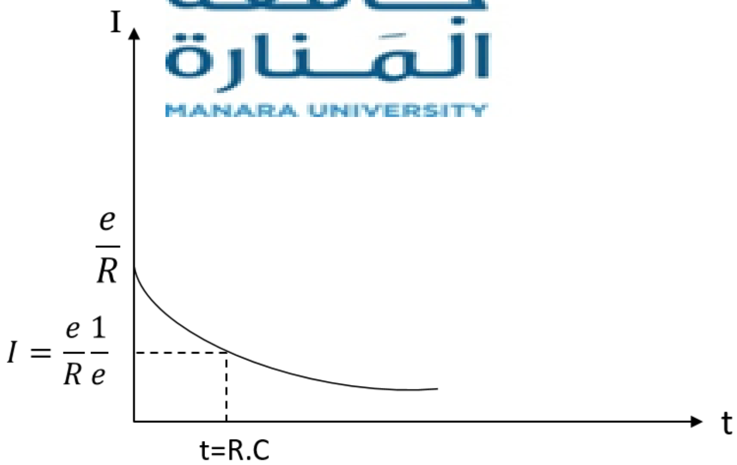
يمكن حساب التيار من العلاقة $I = \frac{dq}{dt}$

باشتقاق العلاقة الأخيرة نجد:

$$I = \frac{e.C}{R.C}.e^{-\frac{t}{R.C}}$$

$$\rightarrow I = \frac{e}{R}.e^{-\frac{t}{R.C}} \qquad (13)$$

يمكن رسم المنحني البياني لغيرات I بالشكل التالي:



الشكل (11): تغيرات I بدلالة t في حالة شحن المكثفة.

$$t = 0 \quad \rightarrow \quad I = \frac{e}{R}$$

$$t \to \infty \quad \to \quad I = 0$$

$$t = R.C \quad \to \quad I = \frac{e}{R}\frac{1}{e}$$

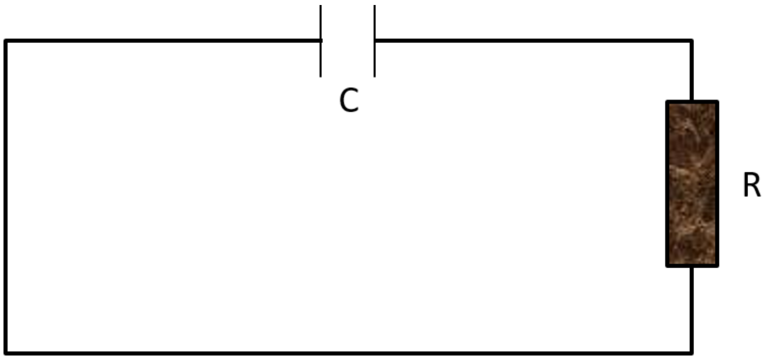
ملاحظة: e بالمقام هي العدد النيبري.

تمرين للطلاب

4-5- تفريغ مكثفة discharging a capacitor

عندما $t \to \infty$ تصبح المكثفة مشحونة، اي يصبح فرق الكمون بين طرفي المكثفة يساوي فرق الكمون بين طرفي المولد، أي أنه إذا ابعدنا المولد فإن المكثفة المشحونة تلعب دور المولد وتفرّغ شحنتها ضمن الدارة الكهربائية التي قد تكون عبارة إما عن وشيعة (أو مجموعة وشائع) أو مقاومة (أو مجموعة مقاومات) الموصولة على التسلسل او على التفرع.

عندما تلعب المكثفة المشحونة دور المولد فإن المقاومة الداخلية للمولد معدومة $r = 0$ اي أن $V = e$ ، ولكن القوة المحركة الكهربائية للمولد تكون معدومة وبالتالي $V = 0$.



الشكل (12): دارة تفريغ مكثفة.

$$V_C + V_R = 0$$

$$\rightarrow \frac{q}{C} + R.I = 0$$

$$\rightarrow \frac{q}{C} + R.\frac{dq}{dt} = 0$$

$$\rightarrow R.\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{C}$$

$$\rightarrow \frac{dq}{q} = -\frac{dt}{R.C}$$

$$\rightarrow \int_{q_0}^{q} \frac{dq}{q} = \int_{0}^{t} -\frac{dt}{R.C}$$

إن q_0 هي شحنة المكثفة ببداية الدراسة (قبل التفريغ) أي أن: $q_0 = q_{max}$.

$$ln|q| - ln|q_0| = -\frac{t}{R.C}$$

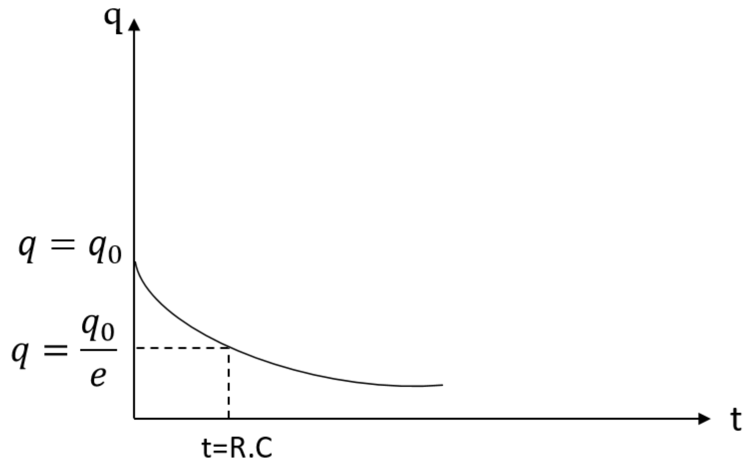
$$\rightarrow \frac{q}{q_0} = e^{-\frac{t}{R.C}}$$

$$\rightarrow q = q_0\, e^{-\frac{t}{R.C}}$$

وبالتالي فإن شدة التيار:

$$I = \frac{dq}{dt} = -\frac{q_0}{R.C}\, e^{-\frac{t}{R.C}} \qquad (14)$$

والخط البياني لتغيرات q بدلالة الزمن t تبين عملية التفريغ:



الشكل (13): تغيرات I بدلالة t في حالة تفريغ المكثفة.

عندما

$$t = 0 \quad \rightarrow \quad q = q_0$$

$$t \rightarrow \infty \quad \rightarrow \quad q = 0$$

$$t = R.C \quad \rightarrow \quad q = \frac{q_0}{e}$$

ملاحظة: e بالمقام هي العدد النيبري.