جَـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

## المحاضرة الرابعة

# مساحات الأشكال المنتظمة وغير المنتظمة

# Areas of Regular and Irregular Figures

**مقدمة.**

يُعتبَرُ حساب المساحات من الأساسيات المطلوبة من المهندس المساح، حيث يشمل ذلك حساب مساحات:

قطعة من الأرض، بحيرة مياه، مناطق الغابات، منطقة معبدة، مساحة منشأة، .... الخ.

في النظام المتري تُحسَبُ المساحة بالمتر المربع ($m^2$) أو بالهكتارات (ha) حيث:

$$1 \text{ hectare} = 10000 \text{ m}^2$$

يتعامل المساح في حساباته مع نوعين من المساحات:

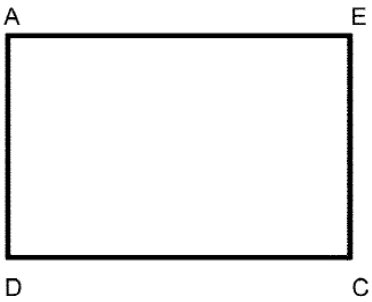
1. مساحات الأشكال المنتظمة: مثل المستطيلات والمثلثات،
2. مساحات الأشكال غير المنتظمة: مثل البحيرات أو الأشكال ذات المواصفات الخاصة.

وسيتعرض هذا الفصل لعدة طرق تهدف إلى حساب مساحات الأشكال الأفقية المنتظمة وغير المنتظمة.

## 1. مساحات الأشكال المنتظمة.

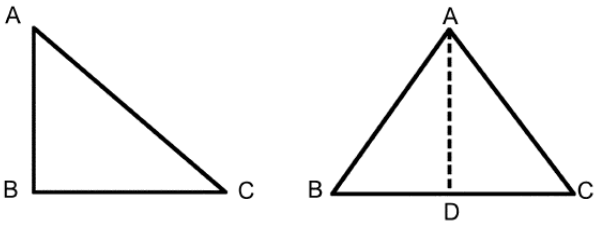
### 1.1. المستطيل (*Rectangle*):

**(المساحة) Area = AE . EC**




### 2.1. المثلث (*Triangle*):

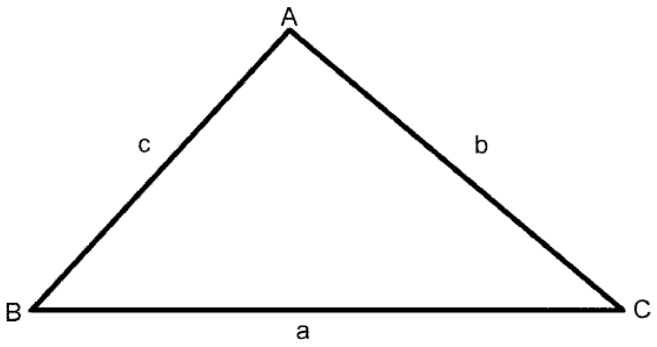
**Area = 1/2 . BC . AB** **Area = 1/2 . BC . AD**



وكذلك:

Area = 1/2 . BC .BA . sin B

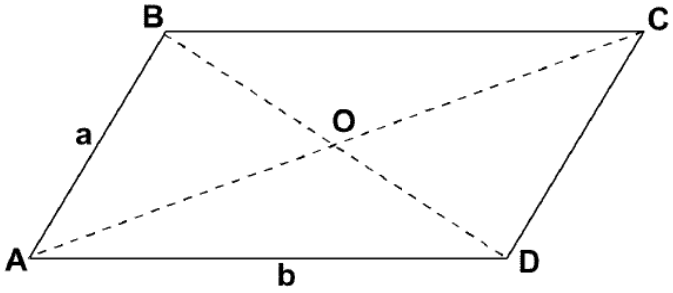
$$Area = \sqrt{S.(S-a).(S-b).(S-c)} \quad : \quad S = \frac{1}{2}.(a+b+c)$$




3.1. متوازي الأضلاع (*Parallelogram*):

Area = a ⁢⁢b ⁢⁢sin A.

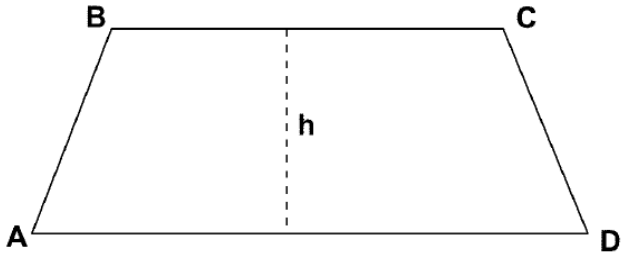
Area =½ AC ⁢⁢BD ⁢⁢sin ∠BOC




4.1. شبه المنحرف (*Trapezium*):

Area = ½Σ parallel sides .⁢perpendicular height

Area = (AD + BC) . h/2



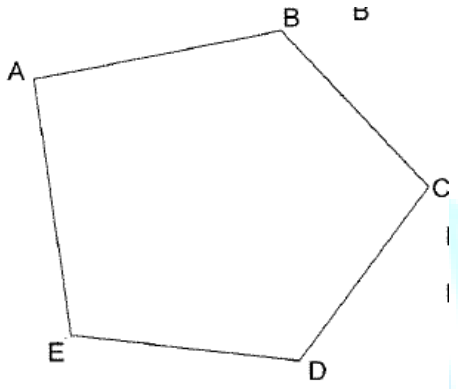
**5.1. حساب المساحات باستخدام الإحداثيات:** ***Areas by Coordinates***

إذا كانت إحداثيات النقاط معلومة يمكن حساب مساحة أي مضلع مغلق بالتعويض في العلاقة التالية وفق التسلسل المحدد:

$$(Y_A.X_B)+(Y_B.X_C)+ \ldots\ldots\ldots \ etc.$$

كما هو موضح في المثال التالي:

بفرض أن:




| النقطة | X (m) | Y (m) |
|---|---|---|
| A | 364.392 | 674.345 |
| B | 526.937 | 715.825 |
| C | 682.910 | 562.826 |
| D | 561.039 | 328.426 |
| E | 385.491 | 351.813 |

نحسب المساحة من العلاقة التالية:

$$Area = \frac{1}{2}\cdot\{[(Y_A\cdot X_B)+(Y_B\cdot X_C)+(Y_C\cdot X_D)+(Y_D\cdot X_E)+(Y_E\cdot X_A)]-$$
$$[(X_A\cdot Y_B)+(X_B\cdot Y_C)+(X_C\cdot Y_D)+(X_D\cdot Y_E)+(X_E\cdot Y_A)]\}$$

باستخدام العلاقة السابقة نجد أن:

.تكون القيمة الناتجة موجبةً إذا تحركنا مع دوران عقارب الساعة.

.تكون القيمة الناتجة سالبةً إذا تحركنا بعكس دوران عقارب الساعة.

**والنتيجتان متساويتان بالقيمة المطلقة.**

نلاحظ في العلاقة السابقة بأننا نبدأ من نقطة معينة وننتهي بنفس النقطة، وبأننا بدأنا بـ $Y_A$ وانتهينا بـ $X_A$ .

بالتعويض في العلاقة السابقة نجد أن مساحة المضلع المغلق هي:

$$Area\,(ABCDE)=\frac{1}{2}\cdot(1414751.828-1239034889)=87857.9695m^2$$

ويمكن تنظيم الحسابات وفق الجدول التفصيلي التالي: **(لاحظ أن:** $E_i \equiv X_i$ , $N_i \equiv Y_i$ **)**

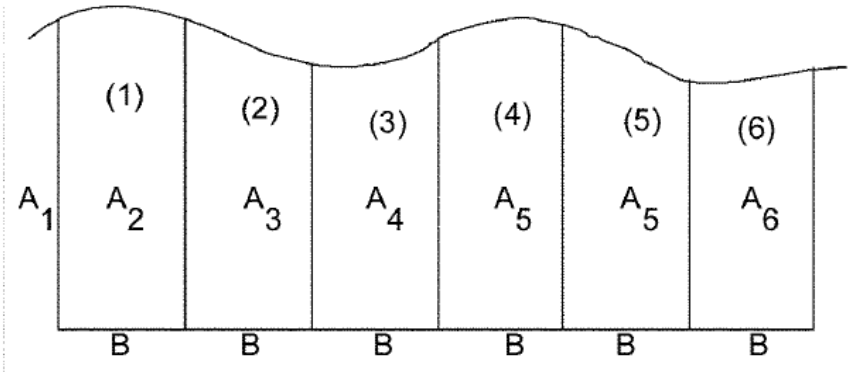
| Pt | Northing | Easting | N x E | E x N |
|---|---|---|---|---|
| A | 674.345 | 364.392 | | |
| | | | $N_A$ x $E_B$ = 355,337.331 | $E_A$ x $N_B$ = 260,840.903 |
| B | 715.825 | 526.937 | | |
| | | | $N_B$ x $E_C$ = 488,844.051 | $E_B$ x $N_C$ = 296,573.844 |
| C | 562.826 | 682.910 | | |
| | | | $N_C$ x $E_D$ = 315,767.336 | $E_C$ x $N_D$ = 224,285.400 |
| D | 328.426 | 561.039 | | |
| | | | $N_D$ x $E_E$ = 126,605.267 | $E_D$ x $N_E$ = 197,380.814 |
| E | 351.813 | 385.491 | | |
| | | | $N_E$ x $E_A$ = 128,197.843 | $E_E$ x $N_A$ = 259,953.928 |
| A | 674.345 | 364.392 | | |
| | | | ∑= 1,414,751.828 | ∑= 1,239,034.889 |

## 2. مساحات الأشكال غير المنتظمة. *Areas of Irregular Figures*

يتضمن حساب المساحات عادةً أشكالاً مكونةً من خطوطٍ مستقيمة، أو من أشكالٍ منتظمة، وتشكل طرق الحساب المعتمدة على المثلثات أو الإحداثيات الحلول الحسابية. وفي بعض الحالات تحتوي الحدود المساحية أشكالاً غير منتظمة.

### 1.2. طريقة شبه المنحرف. *Trapezoid* rule

عندما نصادف حدّاً غير منتظم لعقارٍ ما، تهتم عمليات المسح بتحديده من خلال قياس سلسلةٍ من التراتيب أو الإزاحات (a series of offsets) كما هو في الشكل الآتي:




**الشكل (1): طريقة شبه المنحرف.**

يتم اختيار الخطوة الفاصلة (**Interval** = **B**) بين التراتيب (**offsets**) بحيث تكون المسافة على طول الحد بين التراتيب هي مستقيمة، وأن تكون المساحة الكلية مقسمَةٌ إلى مجموعة أشباه منحرفات.

فيكون بناءً على ماتقدم:

$$Area\,of\ Trapezoid(1)=\frac{A_1+A_2}{2}\cdot B$$

$$Area\,of\ Trapezoid(2)=\frac{A_2+A_3}{2}\cdot B$$

$$Area\,of\ Trapezoid(3)=\frac{A_3+A_4}{2}\cdot B$$

$$Area\,of\ Trapezoid(4)=\frac{A_4+A_5}{2}\cdot B$$

$$Area\,of\ Trapezoid(5)=\frac{A_5+A_6}{2}\cdot B$$

$$Area\,of\ Trapezoid(6)=\frac{A_6+A_7}{2}\cdot B$$

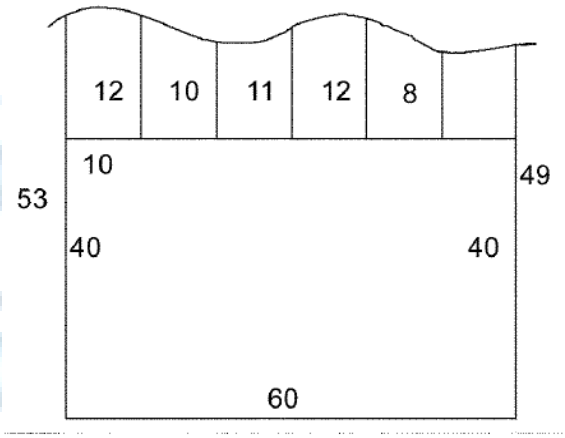
بالجمع والترتيب نحصل على:

$$Area=\frac{B}{2}\cdot(A_1+2A_2+2A_3+2A_4+2A_5+2A_6+A_7)$$

أو بصيغةٍ أخرى:

***Area = Interval (½[first offset + last offset] +$\Sigma$ intermediates)***

ولنطبق الآن ماسبق عرضه على المثال التالي:




**الشكل (2): المثال الحسابي باستخدام طريقة شبه المنحرف.**

لحساب المساحة نقوم بحساب مساحة الشكل المنتظم أوّلاً:

*Area of regular figure = 40 x 60 = 2400m2*

ومن ثم يتم حساب مساحة الجزء الغير منتظم:

*Interval = 10m*

*First offset = 53 – 40 = 13m*

*Last offset = 49 – 40 = 9m*

*Intermediate offsets = 12, 10, 11, 12 and 8 m*

*$\Sigma$ of Intermediate offsets = 12 + 10 + 11 + 12 + 8 = 53m*

*Area = Interval x (½[first + last] + $\Sigma$ intermediates)*

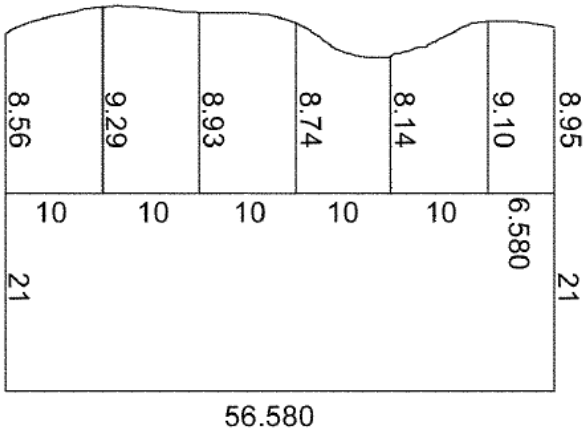
*= 10 x(½ [13 + 9] + 53) = 10 x(11 + 53) = 10 x (64) = 640 $m^2$*

*Total Area = Area of regular figure + area of irregular figure*

*= 2400 + 640 = 3040 $m^2$.*

عادةً عند استخدام هذه الطريقة لحساب مساحة الشكل غير المنتظم، نجد أن شبه المنحرف الأخير يحوي مسافةً فاصلةً غير مساوية لمثيلاتها. عند حصول ذلك نحسب مساحة الشبه المنحرف الأخير بشكلٍ منفصل، وهذا مايقدمه المثال التالي:

**مثال عددي**




**الشكل (3): مثال عددي.**

الخطوة (1): حساب مساحة الجزء المنتظم:

*Area1 = 21 x 56.580 = 1,188.180 $m^2$*

الخطوة (2): حساب مساحة الأشباه المنحرف النظامية:

*Area = Intervalx (½[first + last] + $\Sigma$ intermediates)*

*Area 2 = 10 x (½[8.56 + 9.10] + [9.29 + 8.93 + 8.74 + 8.14 ])*

*= 439.300 $m^2$*

الخطوة (3): حساب مساحة شبه المنحرف الغير نظامي (الأخير):

*Area3 = ½ x (AB + DC) x interval*

*= ½ x (9.10 + 8.95) x 6.580 = 59.385 $m^2$*

الخطوة (4): حساب المساحة الكلية:

$$Total\ Area = Area1 + Area2 + Area3$$
$$= 1{,}188.180 + 439.300 + 59.385 = 1{,}686.865\ m^2$$

نجد من الطريقة السابقة أنه يتم تقريب الحد غير النظامي إلى خطوط مستقيمة، و عادة تكون دقة الحسابات مرتفعةً كلّما كانت الخطوة الفاصلة (interval) أقصر مايمكن.

### 2.2. قانون سمبسون. *Simpson's Rule*

يُستَخدَمُ هذا القانون لحساب مساحات الأشكال غير المنتظمة. وهو يعطي دقّةً أكبر، ويعتبر أن الحدود غير المنتظمة مكونة من سلاسل أقواس من قطوع مكافئة (Parabolic Arcs). إذا كان الحد غير المنتظم يقترب من الخط المستقيم يكون قانون شبه المنحرف (trapezoid) أكثر دقةً من قانون سمبسون.

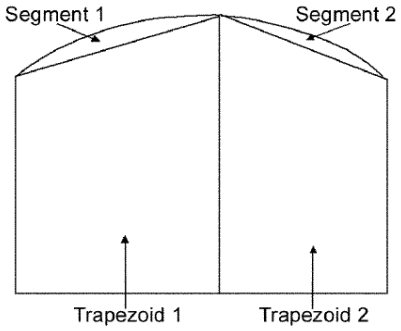
من الأساسي هنا تقسيم الشكل المطلوب إلى عددٍ زوجي من القطاعات المتساوية؛ أي يجب أن يكون هناك عدد فرديٌ من التراتيب (offsets). ويعتبر قانون سمبسون أن المساحة المغلقة هي شكلٌ محدّدٌ بخطٍ منحنٍ ومقسمةٌ إلى عددٍ زوجيٍ من القطاعات، وهي تساوي:

$$Area = \frac{D}{3} \cdot (offset_1 + offset_n + 4\Sigma\, evenoffsets + 2\Sigma\, odd\ offsets)$$

حيث:

- $offset_1$: الإزاحة (الترتيب) الأولى.
- $offset_n$: الإزاحة (الترتيب) الأخيرة ذات الرقم $n$.
- $evenoffsets$: الإزاحات (التراتيب) ذات الأرقام الزوجية.
- $odd\ offsets$: الإزاحات (التراتيب) ذات الأرقام الفردية.

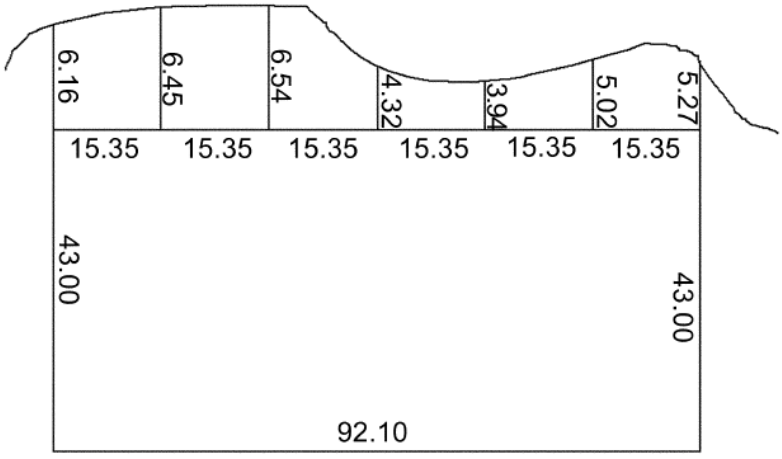
**لاحظ أن قانون سمبسون يفترض أن الحد غير المنتظم مقرّبٌ إلى قوس قطع مكافئ، وهو يحسب مساحة الشكل كمجموع شبه المنحرف (Trapizoid) و الجزء المتبقي (Segment).** كما في الشكل (4).




**الشكل (4): افتراضات قانون سمبسون.**

ولتوضيح طريقة الحساب نورد المثال التالي:

**مثال عددي**




**الشكل (5): إيجاد مساحة الشكل غير المنتظم بطريقة سمبسون.**

الخطوة الأولى: حساب مساحة الجزء المنتظم من الشكل.

$Area = 43.00 \times 92.10 = 3960.30\ m^2$

الخطوة الثانية: حساب مساحة الجزء غير المنتظم من الشكل.

$$Area = \frac{D}{3} \cdot (offset_1 + offset_n + 4\Sigma even offsets + 2\Sigma odd\ offsets)$$

$$Area = \frac{15.35}{3} \cdot (6.16 + 5.27 + 4 \cdot (6.45 + 4.32 + 5.02) + 2 \cdot (6.54 + 3.94))$$

$$Area = 488.90\, m^2$$

الخطوة الثالثة: حساب المساحة الكلية.

$Total\ Area = 3960.30 + 488.90 = 4449.20\ m^2$.

**3.2 الطرق البديلة لحساب مساحة الشكل غير المنتظم.**

**الطرق التخطيطية (الرسومية)**

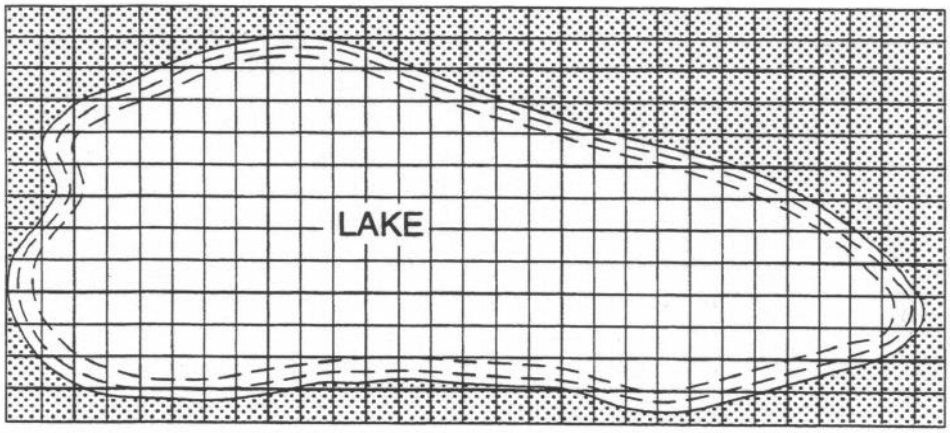
**Alternative Methods of Solution of Area of Irregular Figure**

**Graphical Methods**

يمكن حساب مساحة أي شكلٍ مركب غير منتظم (سواءً أكانت حدوده هي خطوط منحنية أو مستقيمة) من خلال تقسيمه (افتراضياً) إلى مربعات وإحصاء عدد المبعات وأجزاء المربعات التي تغطي كامل المساحة. والطريقة الأبسط هي تطبيق ورقةٍ شفافةٍ مقسمةٍ تحوي شبكة مربعات بأبعادٍ محددة (فرضاً 5 mm) على الشكل المرسوم بمقياس رسمٍ محددٍ مسبقاً، ثم تقدير عدد المربعات وأجزائها التي تغطي المساحة، ومن ثم حساب مساحة المربع الواحد، وبالتالي حساب المساحة الكلية.

## مثال حسابي

يبين الشكل (6) التالي بحيرة على خريطة مرسومة بمقياس 1:50000 ومغطاة بشبكة مربعات أبعادها 5 mm. لحساب المساحة يكفي إحصاء عدد المربعات وأجزائها التي تغطي كامل شكل البحيرة، وبمعرفة مساحة المربع يمكن حساب المساحة الكلية.




**الشكل (6): حساب مساحة البحيرة باستخدام شبكة المربعات.**

على الشكل نقوم بعدّ المربعات وأجزائها، فنجد أن البحيرة مغطّاةٌ بِ **233.5 مربع** طول اضلع الواحد على الخريطة هو 5 mm.

باستخدام مقياس الرسم نحسب الطول الفعلي لضلع المربع فيكون:

$5\ mm \times 50000 = 250000\ mm = 250\ m.$

ومساحة المربع الواحد:

$250 \times 250 = 62500\ m^2$

فتكون المساحة الكلية للبحيرة:

$62500 \times 233.5 = 14593750\ m^2 = 1459.375\ ha.$

وتعتمد دقة الحسابات بهذه الطريقة على:

- الدقة في تقدير عدد المربعات،
- حجم وأبعاد ومقياس شبكة المربعات المستخدمة (كلما كان المقياس كبيراً تزداد الدقة).

## الطرق الرقمية (Digitising)

نستخدم هنا جهاز **المُرَقّم** (*digitiser*) من أجل تحويل مواقع النقاط على الصورة التخطيطية (شكل غير منتظم) إلى الإحداثيات المستوية (X , Y)، ومن ثم تتم المعالجة العددية. هذه العملية تُمكّنُ من الحساب الدقيق والسريع لمساحة الشكل غير المنتظم.

يُستَعمَلُ المرقم بالتزامن مع:

- جدول الرّقمنة (*digitising table*)،
- قائمة الأوامر و شاشة عرض بصرية،
- كومبيوتر خاص.

يساهم جدول الرقمنة في تعيين ونقل إحداثيات النقاط المُرَقمنةِ إلى إلى الكومبيوتر. يتم استشعار مواقع النقاط المحددة للشكل بطريقةٍ إليكترونية باستخدام المُرَقمِن وجدول التصنيف الرقمي (by the digitiser and a table bed).

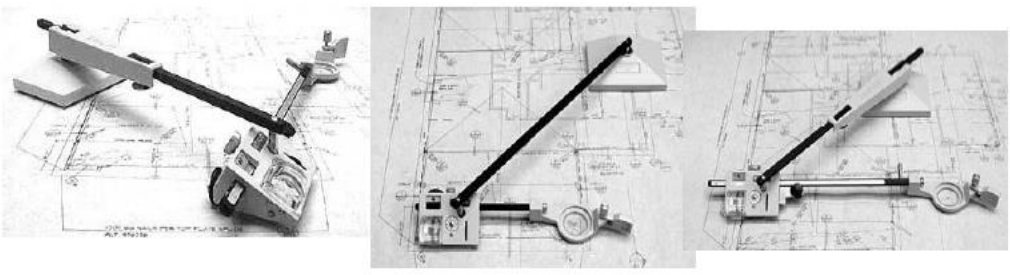
كما يمكن استخدام المرقمن لاختيار الأوامر من جدولها الخاص.

يحوي السطح المرقمن على الآلاف من الخطوط المنتهية والمتعامدة مع بعضها البعض، بحيث تشكل شبكة إليكترونية بمجملها.

يجب تحديد نقطة البداية لعملية الرقمنة والإنتهاء عند نفس النقطة بحيث يتشكل لدينا السطح المغلق غير المنتظم في النهاية إليكترونياً. عند التأشير يدوياً على كل نقطة يتم نقل إحداثياتها الأفقية إلى الكمبيوتر. وفي نهاية العمل يتم تحديد مساحة الشكل غير المنتظم المطلوب باستخدام البرمجيات المناسبة.

## الطرق الميكانيكية (Planimetery)

تعتمد الطرق الميكانيكية على استخدام جهاز البلانيمتر بأنواعه الخطية والقطبية وحديثاً الإليكترونية الرقمية. ويعتمد البلانيمتر القطبي على تثبيت ذراعه الثابت (ذراع القطب)، ويتم تحريك مؤشر الذراع المتحركة فوق حدود أو محيط الشكل المغلق غير المنتظم المطلوب حساب مساحته [انظر الشكل (7)].



**الشكل (7): البلانيمتر القطبي.**

حديثاً يتم استخدام جهاز البلانيمتر الرقمي، بحيث أصبح سهل الاستخدام وأكثر دقةً من البلانيمتر القطبي. ويبين الشكل (8) التالي نموذجاً عن هذا الجهاز.

**الشكل (8): البلانيمتر الإليكتروني الرقمي.**

يتكون البلانيمتر الرقمي (المبين أعلاه) من الأجزاء التالية:

آ. مفاتيح التحكم Function Keys. وتشمل:

. مفتاح التشغيل on/off.

. المفاتيح الرقمية Numerecal Keys.

. مفاتيح Unit 1 & Unit 2.

. مفتاح مقياس الرسم Scale.

. مفتاح بداية العمل Start.

. مفتاح R/S.

. مفتاح الذاكرة Memory ومفتاح القيمة المتوسطة (AV).

. مفتاح Hold ومفتاح التصحيح C/CA.

ب. الشاشة Display.

ج. الذراع المتحرك الراسم Tracer Arm.

جامعة المنارة MANARA UNIVERSITY

ونورد خطوات العمل لحساب المساحة بهذه الطريقة:

1. لدينا مفتاحان لواحدات القياس Unit 1 & Unit 2. بالضغط على Unit 1 يظهر على الشاشة نظام القياس بالإنش أو المتر أو النظام الصيني. بعد ظهور النظام المتري أختار باستخدام المفتاح Unit 2 واحدة المساحة المطلوبة $km^2$ , $m^2$ , $cm^2$.

2. أضغط مفتاح Scale ثم أُدخلُ مقام المقياس المطلوب وأضغط على مفتاح Scale ثانيةً، فيتم حفظ المقياس . والدليل على ذلك ظهور كلمة Scale على الشاشة.

3. أسحب مؤشر الجهاز نحو النقطة الابتدائية وأضغط مفتاح Start ، ثم أحرك المؤشر على طول حدود الشكل حتى الإغلاق على النقطة الابتدائية. ثم أضغط المفتاح Average فتظهر على الشاشة قيمة المساحة المطلوبة بالواحدة المحددة سابقاً.

MANARA UNIVERSITY