Vibrations الاهتزازات

1- الحركة الاهتزازية الجيبية البسيطة (التوافقية) Simple Harmonic Motion:

إن الحركة التي تكرر نفسها كل فترة زمنية بحيث تكون سعة اهتزاز الحركة ثابتة. يمكن تعريفها بأنها حركة اهتزازية في خط مستقيم يتناسب فيها تسارع الكتلة طردياً مع مقدار الإزاحة، ويعاكسها في الاتجاه، وهي حركة جسم ما يتحرك على طول المحور x بحيث يكون انتقاله معطى بالعلاقة:

$$(1) x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

حيث أن ω التواتر الزاوي للحركة أو نبض الحركة, φ الطور البدائي للحركة وهو قيمة الطور من أجل $t = 0$, A سعة الحركة الاهتزازية البسيطة.

يدعى المقدار $T = \frac{2\pi}{\omega}$ دور الحركة الاهتزازية البسيطة, أما المقدار $\upsilon = \frac{1}{T}$ فيدعى تواتر الحركة الاهتزازية البسيطة (التردد) وهو عدد الاهتزازات في واحدة الزمن.

يمكن تمثيل الحركة أيضاً بدلالة تابع ال sin مع فارق طور بدئي قدره $\frac{\pi}{2}$.

نحصل على السرعة بأخذ المشتق الأول للإزاحة علماً أن السرعة تتناسب مع إزاحة الجسم من موضع التوازن ويكون اتجاهها دائما إلى موضع التوازن:

$$(2) v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$

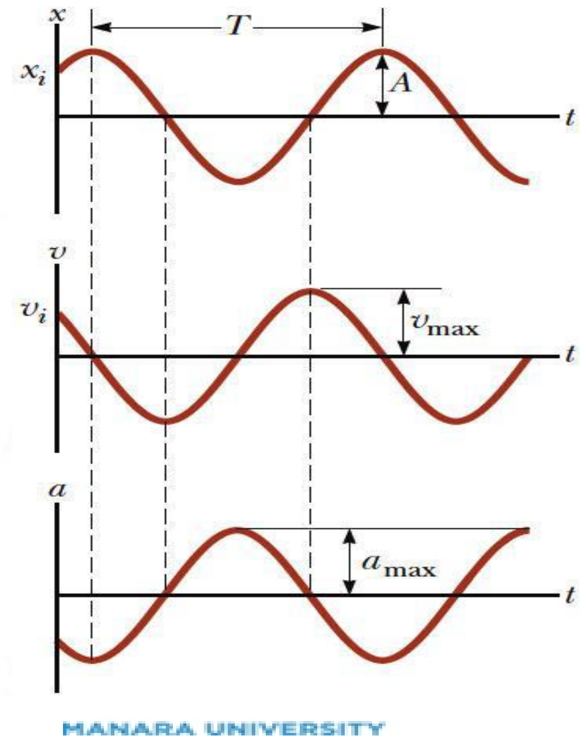
يسمى المقدار ωA بالقيمة العظمى للسرعة أو سعة السرعة.

ولما كان التسارع المشتق الأول للسرعة فإننا نحصل عليه باشتقاق العلاقة رقم (2):

$$(3) a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x$$

يسمى المقدار $\omega^2 A$ بالقيمة العظمى للتسارع أو سعة التسارع.

يبين الشكل رقم (1) تغير الازاحة (x) والسرعة (v) والتسارع (a) بدلالة الزمن. يمكن تحديد موضع الجسيم في أي لحظة إذا تمكنا من معرفة انزياح الجسم وسرعته. عند أي زمن تكون السرعة مختلفة بالطور مع الموضع بمقدار 90^0 ويكون التسارع مختلف بالطور مع الموضع بمقدار 180^0.



الشكل (1): تغير الازاحة (x) والسرعة (v) والتسارع (a) بدلالة الزمن.

في لحظة البدء $t = 0$ نرمز لانتقال الجسيم x_0 ولسرعته v_0 على الترتيب ويكتبان حسب المعادلين (1 و 2) كما يلي:

$$(4) x_0 = A\, cos\varphi$$

$$(5) v_0 = -\omega A\, sin\varphi$$

انطلاقاً من المعادلتين (4 و 5) نستطيع حساب السعة A والطور البدئي للحركة φ بدلالة الانزياح البدئي x_0 والسرعة البدئية v_0 :

$$(6)A = \sqrt{x_0^2 + (\frac{v_0}{\omega})^2}$$

$$(7)tan\varphi = -(\frac{v_0}{\omega x_0})$$

1-1- حساب الطاقة الحركية kinetic energy في الحركة الاهتزازية الجيبية البسيطة:

$$(7)E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

$$= \frac{1}{2}mA^2\omega^2 sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$= \frac{1}{2}mA^2\omega^2[1 - cos^2(\omega t + \varphi)]$$

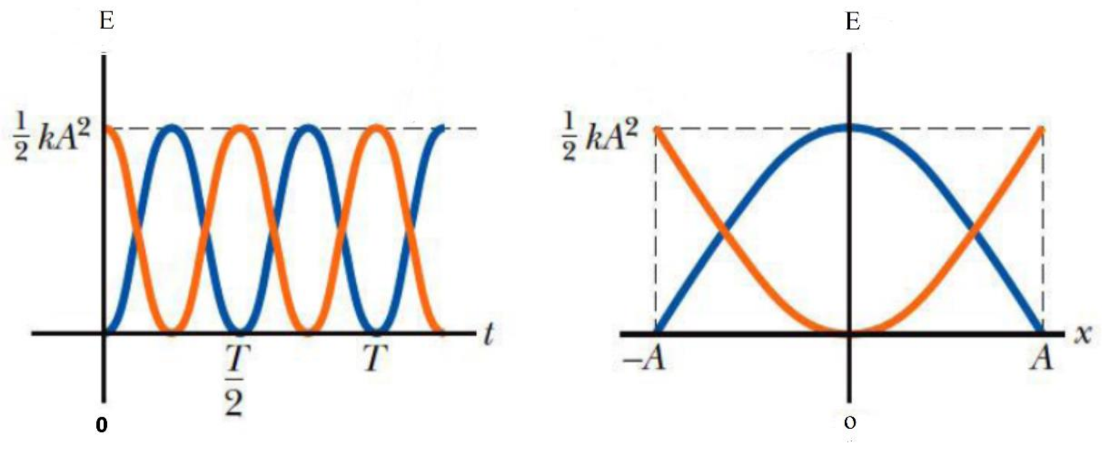
$$\rightarrow \quad E_k = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2)$$

$$(8) \qquad \rightarrow \quad E_k = \frac{1}{2}mA^2\omega^2$$

وهي القيمة العظمى للطاقة الحركية عند مركز الاهتزاز. بينما تكون القيمة الصـغرى عند نهايتي الاهتزاز $(x = \pm A)$.

2-1- العلاقة بين الطاقة الحركية والطاقة الكامنة potential energy في الحركة الاهتزازية الجيبية البسيطة:

إن كل من الطاقة الحركية والطاقة الكامنة تكونان دائماً موجبتين، ودائماً حاصل جمعهما يساوي مقدار ثابت وهو الطاقة الكلية للنظام والذي يساوي $\frac{1}{2}kA^2$. التغيرات في الطاقة الحركية وطاقة الوضع بالنسبة لموضع الجسم x موضحة في الشكل رقم 2.



الشـــكل (2): يســـار: يوضـــح الطاقة الحركية باللون الأزرق والطاقة الكامنة باللون الأحمر كتابع للزمن عندما $\varphi = 0$. يمين: الطاقة الحركية والطاقة الكامنة كتابع للموضع x.

1-3- تركيب Superposition الحركات الاهتزازية الجيبية البسيطة:

1-3-1- تركيب حركتين اهتزازيتين بسـيطتين لهما نفس المنحى direction والتواتر الزاوي angular frequency:

نفرض لدينا جسماً يخضع لحركتين اهتزازيتين جيبيتين بسيطتين لهما نفس التواتر الزاوي على امتداد المحور x. إن محصلة هاتين الحركتين عبارة عن تابع توافقي بسيط له تواتر زاوي يساوي التواتر المشترك للحركتين.

عملية إيجاد المحصلة عبارة عن عملية جمع متجهاتها:

$$(9) x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$(10) x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

بيانياً يمكن تمثيل الحركتين باستخدام المتجهين $\overrightarrow{OP_2}$ و $\overrightarrow{OP_1}$.

يعبّر عن انتقال الحركة المحصلة للجسيم كما يلي:

$$(11) x = x_1 + x_2$$

$$= A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$= A_1\ (cos\omega t\ cos\varphi_1 - sin\omega t\ sin\varphi_1)$$
$$+A_2\ (cos\omega t\ cos\varphi_2 - sin\omega t\ sin\varphi_2)$$

$$= cos\omega t(A_1 cos\varphi_1 + A_2 cos\varphi_2)$$

$$-sin\omega t(A_1 sin\varphi_1 + A_2 sin\varphi_2)$$

$$= Acos\omega t\ cos\varphi - Asin\omega t\ sin\varphi$$

$$(12) \rightarrow x = A\ cos(\omega t + \varphi)$$

حيث أن:

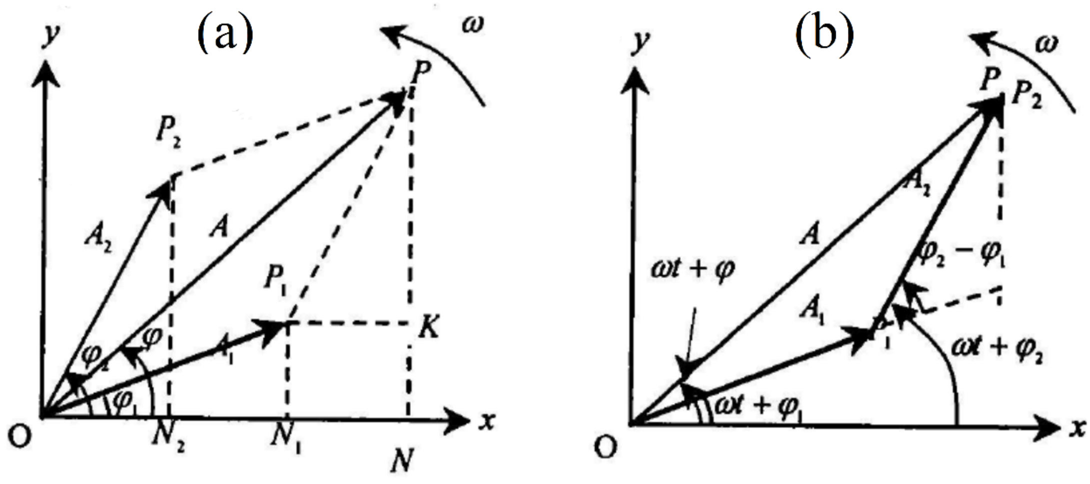
$A\ sin\varphi = A_1 sin\varphi_1 + A_2 sin\varphi_2$ و $Acos\varphi = A_1 cos\varphi_1 + A_2 cos\varphi_2$

بتربيع وجمع المعادلتين الأخيرتين نحصل على سعة الحركة المحصلة A :

$$(13) A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\ (\varphi_2 - \varphi_1)$$

ويعطى طور الانتقال (الإزاحة) بقسمة المعادلتين على بعضهما البعض:

$$(14) tg\ \varphi = \frac{A_1 sin\varphi_1 + A_2 sin\varphi_2}{A_1 cos\varphi_1 + A_2 cos\varphi_2}$$



الشكل (3): تركيب حركتين اهتزازيتين بسيطتين لهما نفس المنحى ونفس التواتر الزاوي

من الشكل رقم (3) يتضح بأن الحركة المحصلة تمثل حركة اهتزازية بسيطة لأن ثابت التواتر الزاوي يبقي الزاوية $\varphi_2 - \varphi_1$ ثابتة, وهذا يقود إلى دوران متوازي الأضلاع المنشأ على هذين المتجهين ككل بالسرعة الزاوية ω.

مسائل:

المسألة رقم 1:

جسم يتحرك بحركة توافقية بسيطة على محور x بحيث يتغيرموقعه بالنسبة للزمن طبقا للمعادلة التالية:

$$x = (4\ \mathrm{m})\cos(\pi t + \frac{\pi}{4})$$

حيث أن t هو الزمن بوحدة الثانية والزاوية بين القوسين مقدرة بوحدة ال rad .

A. حدد مقدار السعة

احسب التردد

احسب الزمن الدوري للحركة

B. احسب السرعة والتسارع للجسم عند أي زمن t

C. من النتائج التي سوف تحصل عليها قم بحساب موضع الجسم وسرعته وتسارعه عند الزمن t=1 sec

D. حدد أقصى قيمة لسرعة الجسم وأقصى قيمة لسرعته

E. اوجد ازاحة الجسم بين t=0 و t=1

الحل:

A. بمقارنة المعادلة المعطاة مع معادلة جسم يتحرك حركة اهتزازية جيبية بسيطة:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

نجد أن $A = 4\ \text{m}$ والتردد الزاوي $\omega = \pi\ \text{rad/sec}$ وعليه فإن التردد $f = \frac{\omega}{2\pi} = 0.5\ \text{Hz}$

والزمن الدوري $T = \frac{1}{f} = 2\ \text{sec}$

B. لإيجاد السرعة v نقوم بإجراء عملية تفاضل بالنسبة للزمن t. نحصل على:

$$v = \frac{dx}{dt} = -(4)\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\frac{d}{dt}(\pi t)$$

$$v = -\left(4\pi\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

وللحصول على التسارع نقوم بإجراء عملية التفاضل للسرعة v بالنسبة للزمن فنحصل على المعادلة التالية:

$$a = \frac{dv}{dt} = -(4\pi)\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)\frac{d}{dt}(\pi t)$$

$$a = -(4\pi^2\ \text{m/sec}^2)\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$$

C. بالتعويض عن الزمن t = 1 sec نستطيع أن نحصل عن المعلومات المطلوبة لكل من الموقع والسرعة والتسارع

$$x = (4\text{ m})\cos(\pi + \frac{\pi}{4}) = (4\text{ m})\ \cos(\pi\frac{5\pi}{4}) = \ -2.83\text{ m}$$

$$v = -\left(4\pi\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\left(4\pi\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 8.8\text{ m/s}$$

$$a = \ -(4\pi^2\text{ m/sec}^2)\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\left(4\pi^2\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}\right)\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \ 27.9\text{ m/s}^2$$

D. بصفة عامة فإن السرعة والتسارع للجسم هي التي قمنا بحسابها في الجزء B وأقصى قيمة للسرعة والتسارع يكون عندما تكون كل من دالة الجيب والتجيب تساوي الواحد. ولهذا فإن السرعة v تتغير بين القيمتين $\pm4\pi$ ويتغير التسارع a بين القيمتين $\pm4\pi^2$ ولهذا فإن:

$$v_{max} = 12.6\text{ m/s}$$

$$a_{max} = \ 39.5\text{ m/s}^2$$

E. موضع الجسم عند الزمن t = 0 هو

$$x = (4\text{ m})\cos(0 + \frac{\pi}{4}) = \ 2.83\text{ m}$$

وحيث أننا من حل الجزء C وجدنا أن الموضع عند الزمن t = 1 هو 2.83- لهذا فإن الازاحة بين t = 0 و t = 1 تكون على الشكل التالي:

$$\Delta x = x_{t=1} - x_{t=0} = \ -2.83 - 2.83 = \ -5.66\text{ m}$$

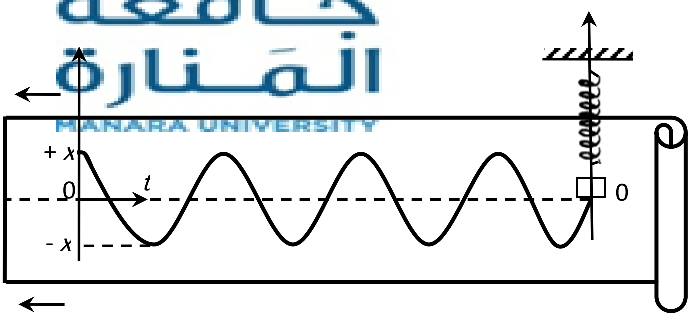
المسألة رقم 2:

جسم كتلتة 200 g متصل بزنبرك (k = 5 N/m) يهتز أفقيا على سطح عديم الاحتكاك. إذا تم سحب الجسم مسافة مقدارها 5 cm من نقطة الاتزان ثم ترك من السكون

A. اوجد الزمن الدوري للحركة
B. أقصى سرعة للجسم
C. أقصى تسارع للجسم
D. عبر عن موضع الجسم وسرعته وتسارعه بدلالة للزمن

4-1 تطبيقات على الحركة الاهتزازية

1-4-1- الحركة الاهتزازية لثقل معلق بنابض simple harmonic oscillator:



الشكل (5): الحركة الاهتزازية لثقل معلق بنابض.

نعتبر جملة فيزيائية مكونة من جســم متناظر كتلته m معلق بطرف نابض خطي كتلته مهملة ومثبت من طرفه الثاني إلى سقف ذا عطالة كبيرة. نأخذ محوراً شاقولياً (OX) للإحداثيات ماراً من مركز ثقل الجسـم ولنعتبر مبدأ المحور المعتبر (O) منطبقاً على مركز ثقل الجسم عندما يكون في حالة اتزان تام، شكل (5). عند إزاحة الجسم وفق منحى الشاقول انزياحاً صغيراً بحيث

تتمدد حلقاته بمقدار صغير ثم يُترك بدون سرعة ابتدائية فإنه وفقاً لفرضية هوك تظهر قوة إرجاع $\vec{F}$ (تسمى قوة المرونة) تحاول إعادة الجسم إلى وضعه الأصلي، مما يُكسب الجملة طاقة كامنة مساوية لعمل قوة المرونة وفق منحى الإنزياح. هذه الطاقة تتحول إلى طاقة حركية يكتسبها الجسم عند عودته إلى وضعه الأصلي يصرفها مرةً أخرى للتغلب على قوى المرونة المقاومة عندما يتابع حركته في الاتجاه المعاكس، حيث تنضغط حلقاته مما يؤدي إلى تحول الطاقة الحركية إلى طاقة كامنة نتيجة عمل قوى المرونة التي تحاول مرةً ثانيةً إعادة الجملة إلى وضع التوازن، وهكذا. تسمى الحركة التي تقوم بها الجملة (ثقل-نابض) الحركة الاهتزازية. وعليه فإن الجملة الفيزيائية القادرة على القيام بحركة اهتزازية يجب أن تتميز بوجود مركبة عطالية قادرة على حمل الطاقة الحركية ومركبة مرونة قادرة على اختزان الطاقة الكامنة.

إذا كان انضغاط أو انبساط حلقات النابض، الشكل (5)، يخضع لقانون هوك فإن قوة الإرجاع F تكون متناسبة خطياً مع انزياح الجسم(x) عن موضع توازنه ونكتب:

$$(15) F = -kx$$

حيث k ثابتة المرونة. تعطي هذه القوة للجسم تسارعاً(a) يتعين وفق قانون نيوتن الأساسي في التحريك بالعلاقة التالية:

$$(16) F = ma$$

وعليه، فإن حركة الجملة (ثقل - نابض) تتعين من المعادلتين (15) و (16) بالعلاقة التالية:

$$(17) ma + kx = 0$$

وإذا ما علمنا أن $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ وعوضنا عن ذلك في المعادلة (17) ثم قسّمنا جميع الحدود الناتجة على الكتلة m نحصل على العلاقة التالية:

$$(18) \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

وهي معادلة تفاضلية متجانسة من الدرجة الثانية بأمثال ثابتة وبدون طرف ثانٍ، حلها من الشكل التالي:

$$(19) x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

حيث A و ω ثابتان يمثلان سـعة الحركة الاهتزازية وتواترها الزاوي على الترتيب. يتحدد هذان الثابتان من حقيقة مفادها أن التابع x يحقق كلاً من المعادلتين (18) و (19). بتبديل قيمة x من المعادلة (19) وإجراء التفاضـل الثاني للمتحول x بالنسـبة للزمن والتعويض في المعادلة (18)، نجد:

$$(20) \omega^2 = \frac{k}{m} \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

وعليه فإن دور الحركة الاهتزازية التي تقوم بها الجملة يساوي إلى:

$$(21) T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

نلاحظ من المعادلات السـابقة أن الحركة الاهتزازية للجملة (ثقل-نابض) هي حركة اهتزازية جيبية بسـيطة يتعين تواترها الزاوي بكتلة الجسم m وثابتة مرونة النابض k. أما سـعة الحركة الاهتزازية A وطورها البدئي φ فيُعينان من شـروط البدء للحركة أي من موضـع الجملة x_0 وسرعتها υ_0 في اللحظة الزمنية $t = 0$. هذا يعني أن:

$$(22) v_0 = -A\omega_0 \sin\varphi \quad , \quad x_0 = A\cos\varphi$$

وعليه، فإن:

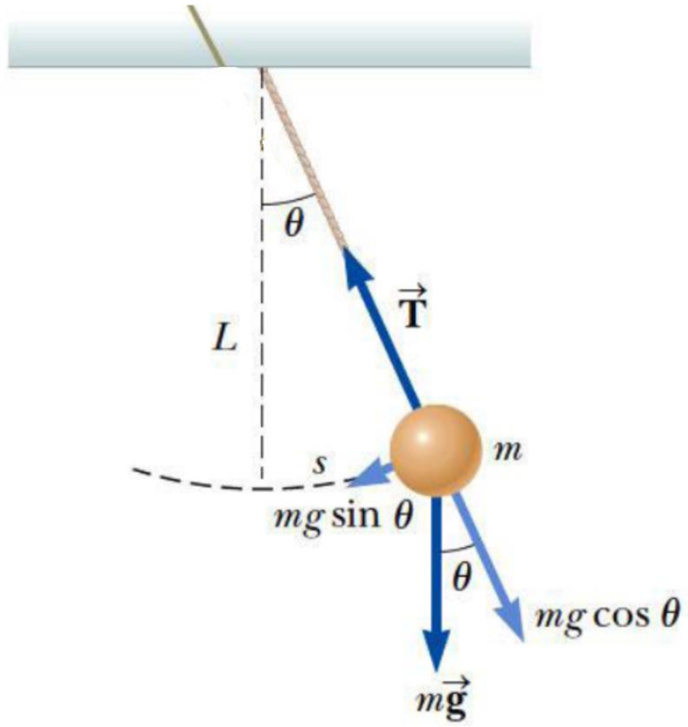
$$(23) A^2 = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2$$

$$(24) \tan\varphi = -\frac{v_0}{\omega_0 x_0}$$

تمرين: ادرس الحركة بطريقة الطاقة

1-4-2- الحركة الاهتزازية للنواس البسيط simple Pendulum

يتألف النواس البسيط من كرة صغيرة كتلتها m معلقة بخيط غير قابل للإمتطاط طوله L وتخضع لقوة ثقلها $m\vec{g}$ وقوة شد خيط التعليق T (الشكل رقم 6).



الشكل (6): حركة كرة النواس البسيط والقوى المؤثرة عليها

a- دراسة الحركة في حالة السكون:

تؤثر على كتلة الكرة قوتان هما قوة الثقل $m\vec{g}$ وتتجه شاقولياً نحو الأسفل وقوة الشد المتولدة في الخيط وقيمتها T وتتجه نحو الأعلى. هاتان القوتان متساويتان بالقيمة ومتعاكستان بالاتجاه. وتكون محصلة القوى معدومة.

$$(25) \sum F_i = 0 \quad \rightarrow \quad mg - T = 0$$

$(26) \rightarrow mg = T$

b- في حالة الحركة:

عند إزاحة الكرة عن موضع توازنها وتركها تحت تأثير ثقلها فإنها ترسم قوساً من دائرة نصف قطرها L. لنرمز للزاوية التي يصنعها النواس مع الشاقول في اللحظة t بالرمز θ.

يمكن تحليل قوة الثقل $m\vec{g}$ إلى قوة ناظمية على المسار الدائري $\vec{F}_N$ وأخرى مماسية $\vec{F}_T$ حيث أن $F_N = mgcos\theta$. هذه القوة تساوي وتعاكس قوة شد خيط التعليق T أي أن $T = -F_N = -mgcos\theta$. أما القوة المماسية $F_T = -mgsin\theta$. تشير إشارة السالب إلى أن هذه القوة تتجه بعكس الانزياح.

في حالة الزوايا الصغيرة $\theta < 0.1\ rad$ يمكننا كتابة $F_T = -mg\theta$.

يعطى التسارع المماسي بالشكل $a = L\frac{d^2\theta}{dt^2}$. حيث أن الجسم يتحرك على قوس دائرة نصف قطرها L. بتطبيق قانون محصلة القوى:

$$(27) \sum F = F_N + F_T + T = ma_T$$

$$\rightarrow ma_T = -T - mg\theta + T$$

$$\rightarrow mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\theta$$

$$(28) \rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0$$

المعادلة الأخيرة هي معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية حلها من الشكل:

$$(29) \theta = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

حيث أن $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ التواتر الزاوي للحركة. ودورها هو $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$.

تمرين: ادرس حركة كرة النواس البسيط بطريقة الطاقة.