بعض التوزيعات الاحتمالية(تتمة)

2. التوزيعات الاحتمالية المتصلة:

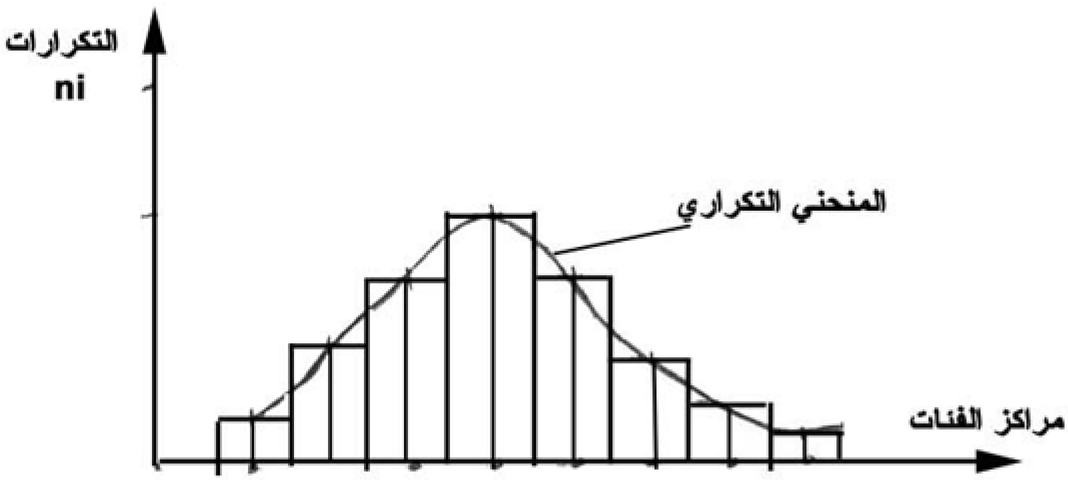
وهي التوزيعات الخاصة بالمتحولات المستمرة أو بالمتحولات التي يمكن اعتبارها مستمرة، مثل درجة الحرارة، دخل الأسرة، درجات الطالب، عمر الطالب...إلخ.

وإذا قمنا بتبويب المعلومات الإحصائية المتوفرة عن أي متحول مستمر x ضمن مجالات محددة فإن التمثيل البياني للتكرارات النسبية المقابلة لها بواسطة أعمدة تأخذ شكلاً معيناً متناظراً أو مائلاً إلى اليمين أو مائلاً إلى اليسار.

وكمثال على ذلك نأخذ التوزيع التكراري لمستوى الشحوم الثلاثية لدى البالغين والذي يأخذ بعد تبويبه ضمن مجالات محددة شكلاً متناظراً كما في الشكل التالي :

وهنا نلاحظ أن احتمال وقوع المتحول العشوائي X في المجال [a, b] يساوي مساحة العمود التكراري المرسوم فوق ذلك المجال. وأن مجموع مساحات هذه الأعمدة يساوي الواحد.

وإذا جعلنا المجالات الجزئية صغيرة جداً وجعلنا حجم العينة n كبيراً فإن أعمدة التوزيع الاحتمالي تصبح على شكل أشرطة عمودية متجاورة كما يلي:



نهاية المضلع التكراري

وإذا قمنا بوصل قمم الأشرطة فإننا سنحصل على منحنٍ انسيابي يسمى منحني التوزيع الاحتمالي للمتحول العشوائي X، وهو سيأخذ الشكل الآتي:

وبما أننا نعتبر المتحول العشوائي X متحولاً مستمراً فإنه يمكننا أن ننتقل إلى مرحلة جديدة ونعبّر عن هذه المنحنيات بواسطة معادلات رياضية معينة وذات متحولات مستمرة.

ولقد توصل الإحصائيون إلى صياغة عدد من المعادلات التي تصلح للتعبير عن الكثير من التوزيعات الاحتمالية. ولكن بما أن هذه المعادلات تتميّز ببعض التعقيد قد لا يستوعبه الدارسون في هذه المرحلة، فإننا سنكتفي بإيراد بعض الصيغ الرياضية والأشكال العامة لمنحنيات أهمّ التوزيعات الاحتمالية.

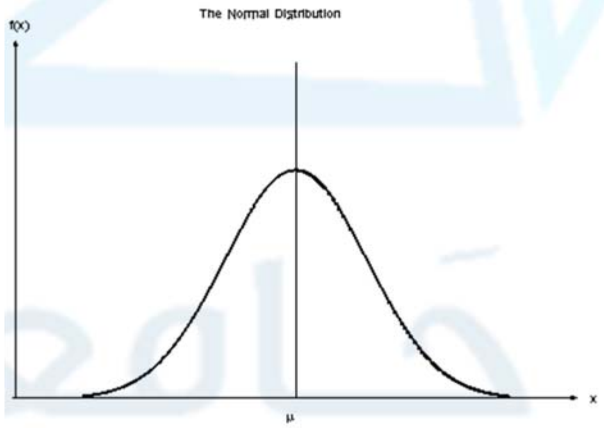
التوزيع الطبيعي العام:

ويعتبر هذا التوزيع أهم التوزيعات الاحتمالية وأكثرها تطبيقاً وانتشاراً، ويصلح لمعظم المتحولات العشوائية، وهو يعرف بالعلاقة التالية:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} . e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2} \qquad , \quad -\infty < x < +\infty$$

حيث $\bar{x}$ هو المتوسط الحسابي أو التوقع، و σ الانحراف المعياري ل x .

وهو يرسم المنحنى التالي، والذي يسمى بمنحنى التوزيع الطبيعي العام أو منحني (غاوص).



الشكل العام للتوزيع الطبيعي

ومن خصائص هذا التوزيع:

- أن مركزه هو المتوسط $\bar{x}$ ، وأن تباينه يساوي σ^2 ويرمز له أيضاً بالرمز $N(\bar{x},\sigma^2)$.
- أنه متناظر بالنسبة للمتوسط أو المركز $\bar{x}$.
- أن المساحة تحته تساوي الواحد.
- يقع بكامله فوق محور السينات (المحور الأفقي).

ومن المتحولات الكثيرة التي تخضع لهذا التوزيع نذكر المتحولات الآتية:

درجة الطالب في الامتحان: حيث يفترض أنها تتوزع بشكل متناظر حول متوسط معين.

طول المولود أو وزنه عند الولادة: حيث يفترض أنه يتوزع بشكل متناظر حول متوسط معين.

نسبة الذكاء لطلاب مرحلة معينة: حيث يفترض أنها تتوزع بشكل متناظر حول متوسط معين.

مدة حياة الإنسان: حيث يفترض أنها تتوزع بشكل متناظر حول متوسط معين.

حجم المبيعات اليومي في إحدى الصيدليات... إلخ.

ولحساب احتمال أن يأخذ X قيمة أصغر أو تساوي x_1 نقوم بإجراء التكامل التالي:

$$P(x \leq x_1) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_1} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma}\right)^2} dx$$

ومع أن هذا التوزيع من أكثر التوزيع انتشاراً، إلا أن عملية حساب الاحتمالات فيه اصطدمت بعدة عوائق رياضية وحسابية. ولقد تم التغلب على هذه العوائق بالاعتماد على حالة خاصة منه تسمى: (قانون التوزيع الطبيعي المعياري) لأنها تستخدم كمعيار عند حساب الاحتمالات.

التوزيع الطبيعي المعياري:

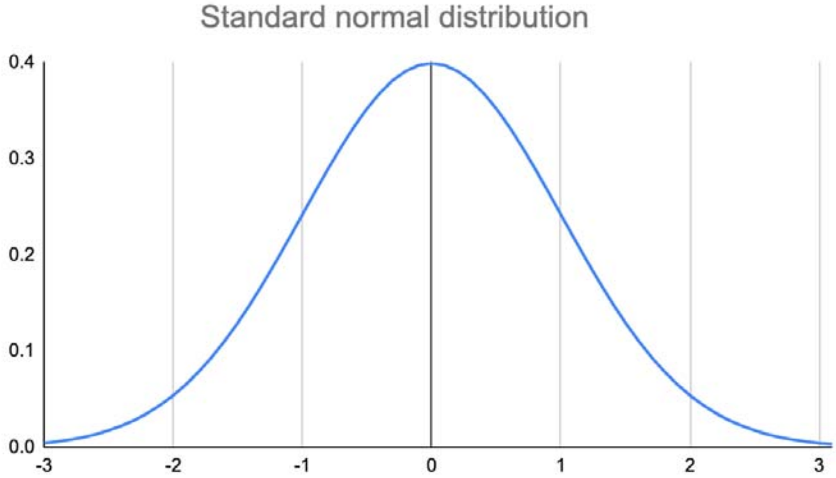
وهو حالة خاصة من التوزيع الطبيعي العام.

1. أن مركزه ينطبق على مبدأ الإحداثيات، أي أن متوسطه يساوي الصفر $\bar{x} = 0$.
2. أن تباينه σ^2 يساوي الواحد $\sigma^2 = 1$
3. أن المساحة تحته تساوي الواحد.
4. أنه متناظر بالنسبة للمحور العمودي.
5. لذلك يرمز له أحياناً بالرمز $N(0,1)$

وتميزاً له عن التوزيع الطبيعي العام نرمز لمتحوله المعياري بالرمز Z وبذلك فإن معادلته تأخذ الشكل التالي:

$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-Z^2}{2}} \qquad -\infty < z < \infty$$

وهو يرسم على المحاور الإحداثية منحنياً متناظراً بالنسبة للمحور الشاقولي كما هو مبين على الشكل الآتي:



منحنى التوزيع الطبيعي المعياري

وتخضع لهذا التوزيع العديد من المتحولات العشوائية العادية والمتحولات الأخرى الاصطناعية. ويستخدم هذا التوزيع في حساب الاحتمالات الطبيعية الخاصة والعامة. وسنشرح كيفية ذلك بما يلي:

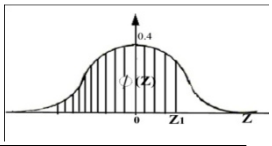
أولاً: كيفية حساب الاحتمالات الخاصة الخاضعة للتوزيع الطبيعي المعياري نفسه:

لحساب هذه الاحتمالات تم إعداد جدول خاص بقيم الاحتمالات التراكمية المختلفة من $(-\infty)$ وحتى قيمة معينة Z_1 للمتحول Z، وهذه الاحتمالات هي عبارة عن المساحة تحت المنحنى من $(-\infty)$ حتى القيمة المتداولة Z_1. وهي المساحة المخططة على الشكل وسنرمز لها بـ $\Phi(Z)$، وبذلك يمكننا أن نحسب الاحتمال التراكمي بواسطة $\Phi(Z)$، والذي يسمى بتابع التوزيع الطبيعي المعياري كما يلي:

$$P(Z < z_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_1} e^{\frac{-z^2}{2}} .dz \qquad = \Phi(Z_1)$$

نقدم الآن جدولاً تفصيلياً بقيم تابع التوزيع الطبيعي المعياري $\phi(z)$ المقابل للقيم الموجبة لـ z والذي يمكن استخدامه لحساب جميع الاحتمالات المختلفة بتطبيق العلاقات والمعادلات السابقة:

$$\phi(z_1)\ P(Z<z_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z_1} e^{\frac{-z^2}{2}}\,.dz \quad =$$



Z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983

مثال:

احسب احتمال أن تكون Z أقل من 1.25 أي $P(Z<1.25)$.

الحل:

1. نلاحظ أن قيمة Z المتداولة تساوي z_1=**1.25** .
2. نبحث في الجدول السابق وفي عمود Z عن العدد 1.2 ، ثم نسير في سطره حتى نتقاطع مع العمود الموافق لـ 0.05 فنحصل منه على الرقم 0.8944 المقابل للقيمة المتداولة 1.25. وإن هذا الرقم هو الاحتمال التراكمي المقابل لقيم المتحول التي هي أصغر من 1.25.
3. ونكتب ذلك على الشكل الآتي:

$$P(Z<1.25)=\Phi(1.25)=0.8944$$

وكذلك نجد على سبيل المثال أن:

$$\begin{aligned}
P(Z<2.71)&=\Phi(2.71)=0.9966\\
P(Z<0.57)&=\Phi(0.57)=0.7157\\
P(Z<0)&=\Phi(0)=0.500\\
P(Z<1)&=\Phi(1)=0.8413\\
P(Z<2)&=\Phi(2)=0.9772
\end{aligned}$$

نلاحظ من العلاقة أن قيم المتحول Z يمكن أن تكون موجبة أو سالبة، ولكن جدول التوزيع الطبيعي المعياري لا يتضمن غير القيم الموجبة لـ Z. فلماذا ذلك؟.

الجواب: لأن التوزيع المعياري متناظر، لذلك يمكننا حساب الاحتمالات المقابلة لقيم Z السالبة من جدول قيم الاحتمالات المقابلة لقيم Z الموجبة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري ثم طرحها من العدد واحد. وكمثال على ذلك نأخذ القيمة (-1.37) كقيمة متداولة فنجد أن:

$$\begin{aligned}
P(Z<-1.37)&=1-P(Z<1.37)=1-\Phi(1.37)\\
&=1-0.9147=0.0853
\end{aligned}$$

ويمكن التعبير عن ذلك بواسطة العلاقة الآتية:

$$P(Z<-z_1)=1-P(Z<z_1)$$

$$\Phi(-Z)=1-\Phi(Z)$$

أما لحساب الاحتمال المقابل لمجال جزئي مثل $[z_1, z_2]$ نقوم بطرح الاحتمال التراكمي المقابل لقيمة z_1 الصغيرة من الاحتمال التراكمي المقابل لقيمة z_2 الكبيرة. وكمثال على ذلك نأخذ المجال التالي **[1.28, 2.37]** فنجد أن:

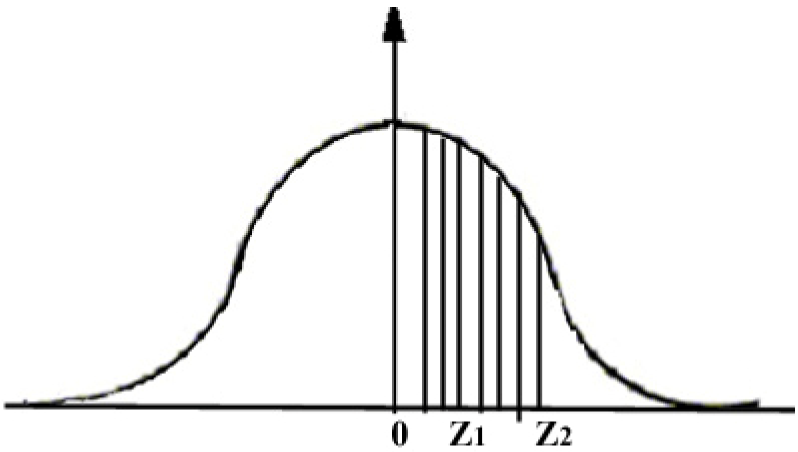
$$P(128 < Z < 2.37) = P(Z < 2.37) - P(Z < 1.28)$$

$$= \phi(2.37) - \phi(1.28) \quad = 0.9911 - 0.8997 \;=\; 0.0914$$

وبصورة عامة يمكنا كتابة ذلك على شكل علاقة عامة كما يلي:

$$P(z_1 < Z < z_2) = \phi(z_1) - \phi(z_2)$$

وهذا الاحتمال يمثل المساحة تحت المنحني والمحصورة بين Z_1 و Z_2، والمبينة على الشكل التالي:



شكل الاحتمال على المجال $[z_1, z_2]$

ثانياً: حساب الاحتمالات للمتحولات الخاضعة للتوزيع الطبيعي العام:

لحساب تلك الاحتمالات ننطلق من نظرية هامة وبسيطة وهي:

نظرية: إذا كان X خاضعاً للتوزيع الطبيعي العام، وكان متوسطه μ وانحرافه المعياري σ، فإن المتحول الاصطناعي Z التالي: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري $N(0,1)$.

لذلك تُسمى التحويلة $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ بالدرجة المعيارية أو المتحول المعياري، ويُستفاد من هذه التحويلة في حساب الاحتمالات العامة، حيث يتم تحويل كل متحول طبيعي عام X إلى المتحول المعياري Z وذلك بحساب الدرجة المعيارية المقابلة له، ثم استخدام جدول التوزيع المعياري في حساب الاحتمالات المطلوبة.

وبشكلٍ عام نجد أنه تكون لدينا عدة حالات لحساب الاحتمالات العامة، هي:

1. حساب الاحتمال العام الذي من الشكل $\mathbf{P(x \leq x_1)}$.

لحساب هذا الاحتمال نطرح من طرفي المتراجحة $\bar{\mathbf{x}}$ ثم نقسّم الناتج على σ فنحصل على ما يلي:

$$P(x \leq x_1) = P\left[\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{X_1-\mu}{\sigma}\right]$$

وباستخدام رمز التحويلة المعيارية السابقة نجد أن:

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \quad , \qquad Z_1 = \frac{X_1-\mu}{\sigma}$$

وبناء على ذلك نجد أن الاحتمال السابق:

$$P(x \leq x_1) = P(Z \leq Z_1) = \phi(Z_1)$$

أي أن حساب الاحتمال السابق يعطى بالعلاقة التالية:

$$P(x \leq x_1) = \phi\left(\frac{x-x_1}{\sigma}\right)$$

مثال:

لنفترض أن X هي درجة الطالب في الامتحان وأن متوسطها $\mu = 65$ وأن انحرافها المعياري 14= σ، فأوجد احتمال أن تكون درجة الطالب أقل من 70، وذلك بفرض أن X يخضع للتوزيع الطبيعي العام.

الحل:

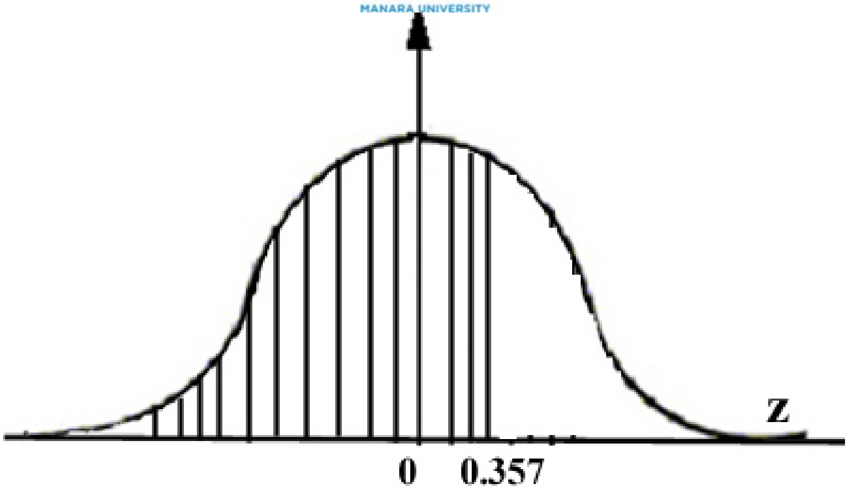
نلاحظ أن X يخضع للتوزيع الطبيعي العام وليس للتوزيع المعياري. ولإيجاد الاحتمال المطلوب نقوم بتحويل X إلى Z وحساب الدرجة المعيارية المقابلة للقيمة $x_1 = 70$ فنجد أن:

$$Z_1 = \frac{x_1-\mu}{\sigma} = \frac{70-65}{14} = \frac{5}{14} = 0.357$$

ومن التوزيع الطبيعي المعياري نجد أن:

$$P(x < 70) = P(z < 0.357) = \Phi(0.357) = 0.6406$$

وهو الاحتمال المطلوب أي احتمال أن تكون درجة الطالب أقل من 70 يساوي 0.6406 كما هو مبين على الشكل المخطط الآتي:



الاحتمال المطلوب $P(Z < 0.357)$

وهكذا يمكننا أن نحسب جميع الاحتمالات المختلفة الأخرى المشابهة لذلك.

2. **حساب الاحتمال العام في مجال محدد** $[x_1, x_2]$ **من الشكل** $P(x_1 \leq X \leq x_2)$:

لحساب هذا الاحتمال نستخدم الأسلوب نفسه فنجد أن:

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P\left[\frac{x_1 - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma} \leq \frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right]$$

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = P[z_1 \leq Z \leq z_2] = \phi(z_2) - (z_1)$$

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right)$$

مثال:

لنأخذ معطيات المثال السابق ونحسب احتمال أن تكون درجة الطالب واقعة في المجال [55، 80]، لذلك نقوم في البداية بحساب الدرجة المعيارية المقابلة لكل من طرفي المجال فنجد أن:

$$Z_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma} = \frac{55 - 65}{14} = -0.714$$

$$Z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{80 - 65}{14} = 1.07$$

ونحصل على الاحتمال المطلوب باستخدام الدرجتين المعياريتين لطرفي المجال فنجد أن:

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \phi(z_2) - \phi(z_1)$$

ومن جدول تابع التوزيع المعياري نجد أن:

$$P(55 < X < 80) = P(-0.714 < Z < 1.074) = \Phi(1.07) - \Phi(-0.714)$$
$$= 0.8577 - 0.2389 = 0.6188$$

وهو يمثل المساحة الواقعة فوق المجال [0.714- , 1.0747] للتوزيع المعياري المبين في الشكل السابق.

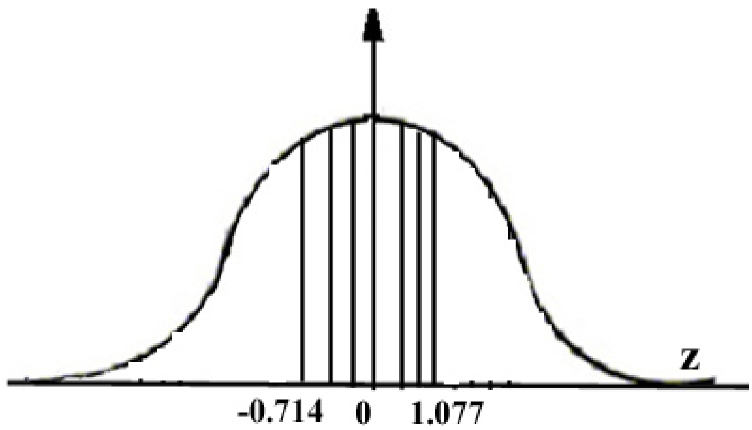
وبصورة عامة يمكننا مباشرةً حساب الاحتمالات العامة واستخدام الصيغة الآتية:

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right)$$

حيث نجد أن:

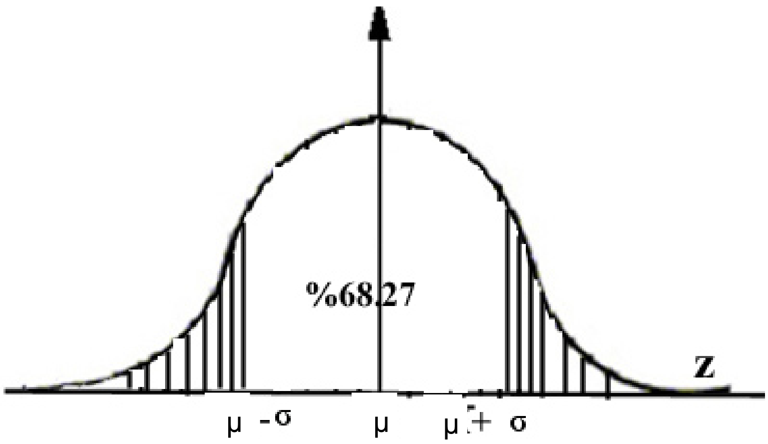
$$P(55 \le X \le 80) = \phi\left(\frac{80 - 65}{14}\right) - \phi\left(\frac{55 - 65}{14}\right)$$
$$= \phi(1.071) - \phi(-0.714)$$
$$= \phi(1.071) - [1 - \phi(-0.714)]$$
$$= 0.8577 - (1 - 0.7611)$$

$$P(55 \le X \le 80) = 0.6188$$



3. حساب الاحتمالات المقابلة لمجالات الثقة الأساسية، وهي:

- **الاحتمال المقابل لمجال الثقة الأول**: وهو الاحتمال المقابل للمجال الذي مركزه المتوسط μ وطرفاه محددين بالعددين $\mu + \sigma$ و$\mu - \sigma$، أي محددين بجمع وطرح الانحراف المعياري من المتوسط μ كما هو مبيّن على الشكل الآتي:



مجال الثقة الأول

إن الاحتمال المطلوب هو:

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$$

لحساب هذا الاحتمال نقوم بإيجاد الدرجة المعيارية المقابلة لكل طرفي المجال كما يلي:

$$z_1 = \frac{(\mu - \sigma) - \mu}{\sigma} = -1$$

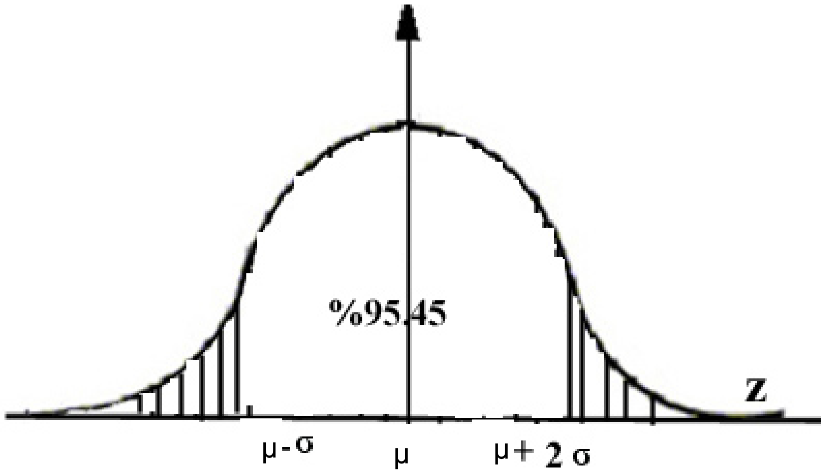
$$z_2 = \frac{(\mu + \sigma) - \mu}{\sigma} = +1$$

ومن الجدول المعياري نجد أن الاحتمال المطلوب يساوي:

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = \phi(z_2) - \phi(z_1) = \phi(1) - \phi(-1)$$
$$= 0.8413 - (1 - 0.8413) = 0.6826$$

وهو يساوي المساحة غير المخططة فوق المجال الأول والمبنية على الشكل (2-10)، وهذا يعني احتمال أن يقع X في ذلك المجال يساوي 0.6826، أي أن 68% فقط من قيمه تقع في ذلك المجال.

- **الاحتمال المقابل لمجال الثقة الثاني:** وهو الاحتمال المقابل للمجال الذي مركزه المتوسط μ وطرفاه محددين بالعددين $\mu + 2\sigma$ $\mu - 2\sigma$، أي محددين بجمع وطرح ضعفي الانحراف المعياري إلى المتوسط $\bar{x}$. كما هو مبيّن على الشكل الآتي:



مجال الثقة الثاني

إن الاحتمال المطلوب هو:

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$$

لحساب هذا الاحتمال نقوم بإيجاد الدرجة المعيارية المقابلة لكل من طرفي المجال كما يلي:

$$z_1 = \frac{(\mu - 2\sigma) - \mu}{\sigma} = -2$$

$$z_2 = \frac{(\mu + 2\sigma) - \mu}{\sigma} = +2$$

وبذلك نجد أن الاحتمالات المعيارية تساوي:

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = \phi(z_2) - \phi(z_1) = \phi(2) - \phi(-2)$$

ومن جدول تابع التوزيع المعياري نجد أن الاحتمال المطلوب يساوي:

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0.9772 - (1 - 0.9772) = 0.9544$$

وهو يساوي المساحة غير المخططة فوق المجال الثاني والمبنية على الشكل أعلاه، وهذا يعني احتمال أن يقع X في المجال الثاني يساوي 0.9544، أي أن حوالي %95 فقط من قيمه الممكنة تقع في ذلك المجال.

- **الاحتمال المقابل لمجال الثقة الثالث:** وهو $P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma)$

بطريقة مشابهة نجد أن احتمال وقوع X في المجال الثالث للثقة يساوي:

$$P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) = 0.9973$$

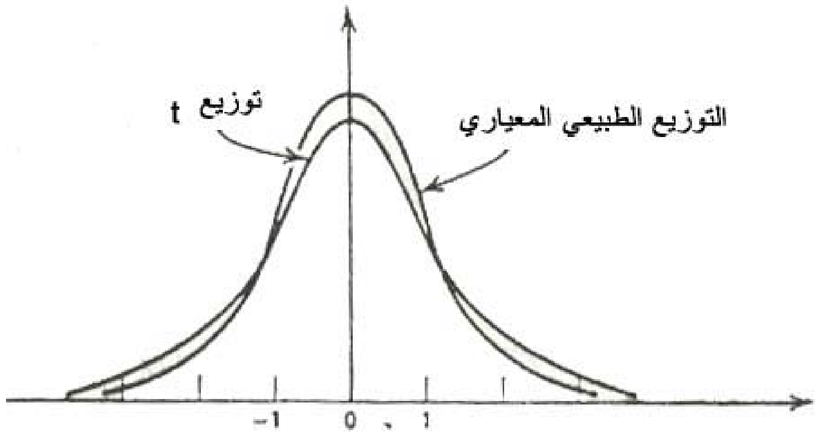
ملاحظة: هناك تطبيقات هامة كثيرة لهذه المجالات ولاحتمالاتها المقابلة لذلك يجب على الطلاب إعطاءها اهتماماً خاصاً.

توزيع t (t- Distribution) :

إذا كانت العينة صغيرة بمعنى أن حجمها أقل من (30) مفردة والانحراف المعياري للمجتمع الطبيعي غير معلوم فإن التوزيع الإحصائي المتبع في مثل هذه الحالات هو توزيع **t** والذي يسميه البعض توزيع العينات الصغيرة. وأن الشكل العام لمنحني هذا التوزيع يشبه منحني التوزيع الطبيعي المعياري فهو متناظر بالنسبة لمبدأ الإحداثيات (أي، مركزه صفر) ولكن انحرافه المعياري يختلف عن الواحد. وأن صيغة معادلته الرياضية هي:

$$f(t) = C\left(1 + \frac{t^2}{\upsilon}\right)^{-\frac{\upsilon+1}{2}}$$

حيث $-\infty < t < +\infty$ ويسمى العدد υ درجة الحرية، وC ثابت عددي موجب ومعين ويأخذ شكله البياني الشكل الآتي:



منحني توزيع t

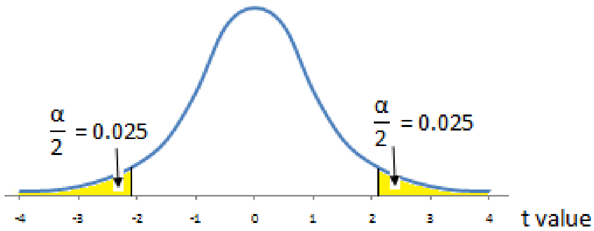
$t_\alpha(\upsilon)$ هي القيمة التي على يمينها المساحة تساوي α حيث υ درجات الحرية و α مستوى الدلالة.

نقدم فيما يلي جدول توزيع t:

جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY

Student's t Distribution Table

For example, the t value for 18 degrees of freedom is 2.101 for 95% confidence interval (**2-Tail** α = 0.05).



	90%	95%	97.5%	99%	99.5%	99.95%	**1-Tail Confidence Level**
	80%	90%	95%	98%	99%	99.9%	**2-Tail Confidence Level**
	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.0005	**1-Tail Alpha**
df	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001	**2-Tail Alpha**
1	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567	636.6192	
2	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248	31.5991	
3	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409	12.9240	
4	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041	8.6103	
5	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321	6.8688	
6	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074	5.9588	
7	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995	5.4079	
8	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554	5.0413	
9	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498	4.7809	
10	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693	4.5869	
11	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058	4.4370	
12	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545	4.3178	
13	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123	4.2208	
14	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768	4.1405	
15	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467	4.0728	
16	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208	4.0150	
17	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982	3.9651	
18	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784	3.9216	
19	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609	3.8834	
20	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453	3.8495	
21	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314	3.8193	
22	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8188	3.7921	
23	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073	3.7676	
24	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969	3.7454	
25	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874	3.7251	
26	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787	3.7066	
27	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707	3.6896	
28	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633	3.6739	
29	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564	3.6594	
30	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500	3.6460	

مثال: أوجد $t_{0.1}(8)$

الحل: نقوم بالبحث في جدول t أسفل عمود مستوى الدلالة 0.1 أمام درجات الحرية 8 فنجد أن:

$$t_{0.1}(8) = 1.397$$

مثال: أوجد قيمة α إذا كان $t_{\alpha}(5) = 4.032$

الحل: نقوم بالبحث العكسي داخل جدول t أمام درجات الحرية 5 من القيمة 4.032 فنجد القيمة أسفل مستوى الدلالة 0.005 أي أن $\alpha = 0.005$.

ملاحظات هامة: إن الاختلاف الأساسي بين توزيع t والتوزيع الطبيعي المعياري Z هو أن الانحراف المعياري للعينة هو المستخدم في الأول بدلاً من الانحراف المعياري للمجتمع في الثاني، وفيما عدا ذلك فالتوزيعان متماثلان وكلما زادت n كلما اقترب التوزيع t من توزيع Z ويعتمد توزيع t على ما يعرق بدرجات الحرية υ حيث $\upsilon = n-1$.

شروط توزيع t :

يمكن تحديد الشروط الثلاثة الآتية لاستخدام توزيع t :

1- أن يكون للمجتمع المسحوبة من العينة التوزيع الطبيعي

2- أن يكون الانحراف المعياري للمجتمع غير معروف (مجهول)

3- أن تكون العينة صغيرة $(n < 30)$.

مثال: إذا كانت أطوال الطلاب تتبع توزيع طبيعي معياري متوسطه يساوي 167 cm وسحبت منه عينة مؤلفة من 4 طلاب. ما احتمال أن يزيد متوسطها عن 183 cm إذا كان انحرافها المعياري 10 cm .

الحل:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{183 - 167}{10/\sqrt{4}} = 3.2$$

$$P(\bar{x} > 183) = P(t_{\alpha}(3) > 3.18) = 0.025$$

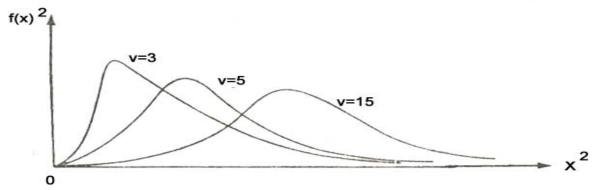
(4-3-2): توزيع كاي مربع χ^2:

وهو توزيع احتمالي خاص يُستخدم لاختبار مدى تطابق المعطيات الميدانية أو التجريبية مع المعطيات الفرضية أو الضابطة. ولتطبيقه تُستخدم علاقة رياضية معينة لحساب قيمة مؤشر الاختبار χ^2 ثم مقارنتها مع القيمة الحرجة χ_0^2 المقابلة لمستوى الدلالة **α** ودرجة الحرية المحددة **k**، ويتم الحصول على χ_0^2 من جداول خاصة بالتوزيع χ^2. فإذا كانت قيمة χ^2 المحسوبة أصغر من χ_0^2 الحرجة نقبل فرضية العدم الموضوعة، كما هو موضح على الشكل التالي، وفي حالة العكس نرفض تلك الفرضية لعدم وجود دليل كافٍ على إثباتها.

وتكون الصيغة الرياضية لتوزيع χ^2 هي كما يلي:

$$f(x^2) = C \cdot (\chi^2)^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{\chi^2}{2}} \quad : \ \chi^2 > 0$$

حيث k درجة الحرية، وC ثابت عددي موجب ومعين ويأخذ شكله البياني الشكل الآتي



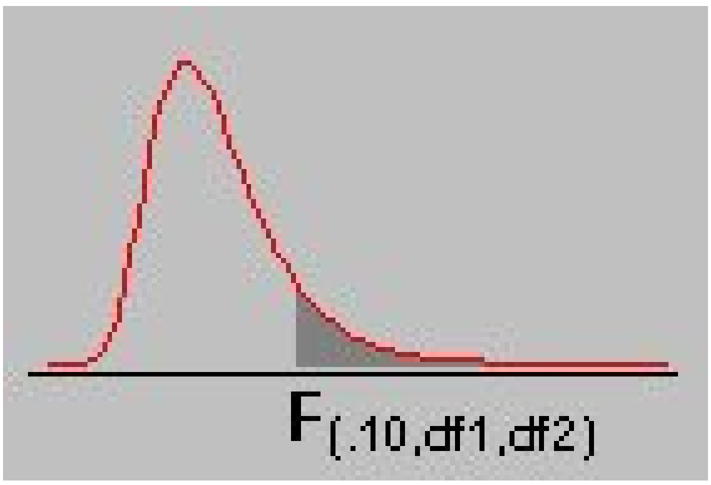
منحني توزيع χ^2

توزيع فيشر أو توزيع F:

وهو توزيع احتمالي خاص ومعقد يستخدم لاختبارات التجانس ولتحليل التباين ضمن المعطيات وبين العينات، ولتطبيقه تُستخدم علاقة رياضية معينة لحساب قيمة مؤشر الاختبار F ثم مقارنة هذه القيمة مع القيمة الحرجة F_0 المقابلة لمستوى الدلالة α ولدرجتي الحرية في العينتين. فإذا كانت قيمة F المحسوبة أصغر من الحرجة F_0 نقبل فرضية العدم الموضوعة، وفي حالة العكس نرفض تلك الفرضية لعدم وجود دليل كافٍ على إثباتها كما هو موضح على الشكل التالي. وتكون معادلته الرياضية كما يلي:

$$f(F) = C \cdot \frac{F^{\frac{k}{2}-1}}{k_2 + k_1 F^{\frac{k_2+k_1}{2}}} \quad : \ F > 0$$

حيث k_1 درجة الحرية للتباين الكبير الأول و k_2 درجة الحرية للتباين الثاني، وC ثابت عددي موجب ومعين وهو من الشكل الآتي:



منحني توزيع F

تمارين

1. إذا كان Z خاضعاً للتوزيع الطبيعي المعياري فاحسب الاحتمالات الآتية:

$P(-1 \leq Z \leq +1)$ ، $P(-2 \leq Z \leq +2)$ ،

$P(-2.58 \leq Z \leq +2.58)$ ، $P(-3 \leq Z \leq +3)$ ،

2. إذا كانت X قيمة المبيعات اليومية في إحدى الصيدليات تخضع للتوزيع الطبيعي وكان متوسطها $\overline{X} = 3000$ وتباينها $\sigma^2 = 14900$ والمطلوب:

. تحديد الصيغة الرياضية لقانون التوزيع الاحتمالي لـ X.

. حساب احتمال أن تتجاوز قيمة المبيعات اليومية 4000 ل.س، أي $P(X > 4000)$

. حساب الاحتمال التالي: $P(2000 \leq X \leq 4000)$

3. إذا كان وزن الطفل عند الولادة X يخضع للتوزيع الطبيعي العام الذي متوسطه $\bar{x} = 3$ **kg.** وتباينه $\sigma^2 = 0.64$ فالمطلوب:

. تحديد الصيغة الرياضية لقانون التوزيع الاحتمالي لـ X.

. حساب الاحتمالات الآتية:

$P(X \geq 4)$ ، $P(X \leq 2)$ ، $P(X \geq 3)$ ، $P(2 \leq X \leq 4)$

4. إذا كان X هو مقدار الدخل اليومي لعيادة أحد الأطباء وكان خاضعاً للتوزيع الطبيعي الذي متوسطه $\bar{x} = 4000$ وتباينه $\sigma^2 = 490000$ فالمطلوب:

. تحديد الصيغة الرياضية لقانون التوزيع الاحتمالي للمتحول لـ X.

. حساب الاحتمالات الآتية:

$P(3000 \leq X \leq 5000)$ ، $P(X \leq 5000)$ ، $P(X \leq 5000)$

$P(2000 \leq X \leq 5000)$

5. إذا كان X هو طول الشخص البالغ وكان خاضعاً للتوزيع الطبيعي العام الذي متوسطه $\bar{x} = 170$ وتباينه $\sigma^2 = 25$ فالمطلوب:

. تحديد الصيغة الرياضية للطول لـ X.

. حساب الاحتمالات الآتية:

$P(X \leq 160)$ ، $P(160 \leq X \leq 180)$ ، $P(X \geq 180)$ ،

$P(\bar{x} - 2\sigma \leq X \leq \bar{x} + 2\sigma)$