# العينات والتقدير وفترات الثقة (تتمة)

**فترات الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين $(\mu_1-\mu_2)$:**

إذا كانت $x_1,x_2,\ldots,x_{n_1}$ عينة عشوائية من مجتمع طبيعي $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ وكانت $x_1,x_2,\ldots,x_{n_2}$ عينة عشوائية أخرى من مجتمع طبيعي $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ مستقل عن الأول بحيث $\sigma_1^2,\sigma_2^2$ معلومتين فإن فترة الثقة للفرق بين المتوسطين $\mu_1-\mu_2$ هو:

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}\le \mu_1-\mu_2\le(\bar{x}_1-\bar{x}_2)+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}$$

حيث $\bar{x}_1-\bar{x}_2$ يمثل التقدير بنقطة للفرق بين المتوسطين $\mu_1-\mu_2$ أي أن:

$$\mu_1-\mu_2=\bar{x}_1-\bar{x}_2$$

**مثال:** إذا تم اختيار 75 طالبة و50 طالباً وكان متوسط الدرجات من عينة الطالبات والانحراف المعياري هما: $\bar{x}_1=80\ ,\ s_1=7$ وكان متوسط الدرجات والانحراف المعياري لعينة الطلاب هما: $\bar{x}_2=70\ ,\ s_2=6$.

المطلوب: إيجاد فترة ثقة 95% للفرق بين المتوسطين.

**الحل:**

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}\le \mu_1-\mu_2\le(\bar{x}_1-\bar{x}_2)+Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}$$
$$(80-70)-1.96\sqrt{\frac{7^2}{75}+\frac{6^2}{50}}\le \mu_1-\mu_2\le(80-70)+1.96\sqrt{\frac{7^2}{75}+\frac{6^2}{50}}$$
$$7.703\le \mu_1-\mu_2\le 12.297.$$

**فترات الثقة للفرق بين متوسطي مجتمعين $(\mu_1-\mu_2)$ في حالة تساوي تبايني المجتمعين $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ وعدم معلومية قيمتيهما مع تبعية المجتمعين للتوزيع الطبيعي:**

يتم استخدام التباين العام ( المشترك ) :

$$s_p^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$$

ويكون:

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-t_{\frac{\alpha}{2}}\, s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} \le \mu_1-\mu_2 \le (\bar{x}_1-\bar{x}_2)+t_{\frac{\alpha}{2}}\, s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

**مثال:** إذا تم اختيار عينتين من الأرانب الأولى تتكون من 13 أرنبا وأعطيت الغذاء A والثانية من 15 أرنباً وأعطيت الغذاء B فكانت المقاييس المسحوبة من العينتين كما يلي:

العينة الأولى: $\bar{x}_1=25.62\ ,\ s_1=6.05\ ,\ n_1=13$

العينة الثانية: $\bar{x}_2=28.33\ ,\ s_2=10.58\ ,\ n_2=15$

المطلوب: إيجاد فترة ثقة 95% للفرق بين متوسطي المجتمعين $(\mu_1-\mu_2)$ مع العلم أن المجتمعين يتبعان التوزيع الطبيعي وأن $\sigma_1^2=\sigma_2^2$.

**الحل:**

$$s_p^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}=\frac{(13-1)(6.05)^2+(15-1)(10.58)^2}{13+15-2}=77.1669$$

$$s_p=8.784$$

$$n_1+n_2-2=26$$

$$t_{(0.025,26)}=2.056$$

$$(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-t_{\frac{\alpha}{2}}\, s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} \le \mu_1-\mu_2 \le (\bar{x}_1-\bar{x}_2)+t_{\frac{\alpha}{2}}\, s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$$

$$(25.62-28.33)-2.056(8.784)\sqrt{\frac{1}{13}+\frac{1}{15}} \le \mu_1-\mu_2 \le (25.62-28.33)+2.056(8.784)\sqrt{\frac{1}{13}+\frac{1}{15}}$$

$$-9.553 \le \mu_1-\mu_2 \le 4.133.$$

## تقدير نسبة خاصة معينة في المجتمع:

لنفترض أننا نريد تقدير نسبة المدخنين في المجتمع المدروس من خلال عينة حجمها n فرداً. وعند دراسة أفراد تلك العينة وجدنا أن عدد المدخنين فيها يساوي m فرداً.

وبذلك نجد أن نسبة المدخنين في العينة، والتي سنرمز لها بالحرف r تساوي:

$$r=\frac{m}{n}$$

وهكذا تكون نسبة غير المدخنين والتي سنرمز بـ q تساوي:

$$q=\frac{n-m}{n}=1-r$$

وبناءً على ذلك نقوم بتقدير نسبة المدخنين في المجتمع، والتي سنرمز لها بـ R، بواسطة نسبتهم في العينة r.

ونكتب ذلك على الشكل التالي:

$$\widetilde{R}=r=\frac{m}{n}$$

ويسمى هذا التقدير بالتقدير بنقطة.

ويمكن البرهان على أن الخطأ المعياري للتقدير r، والذي سنرمز بـ $\sigma_r$ يقدر بواسطة العلاقة:

$$\widetilde{\sigma}_r=\sqrt{\frac{r\cdot q}{n}}$$

علماً أن: q=1-r، وأن التباين المصحح للنسبة r يساوي : $s^2=r\cdot q$

**مثال:**

لتقدير نسبة المدخنين من الموظفين، سحبنا عينة عشوائية من الموظفين بحجم n=160 موظفاً، فوجدنا أن 35 منهم يدخنون. وبذلك نجد أن نسبة المدخنين في العينة تساوي:

$$r=\frac{m}{n}=\frac{35}{160}=0.2188=(21.88\%)$$

وبذلك نجد أن نسبة المدخنين في مجتمع الموظفين تقدر بما يلي:

$$\widetilde{R}=r=0.2188$$

وأن الخطأ المعياري في تقدير r يقدر بـ:

$$\widetilde{\sigma}_r=\sqrt{\frac{r\cdot q}{n}}=\sqrt{\frac{(0.2188)(1-0.2188)}{160}}$$
$$=\sqrt{0.0010683}=0.0327$$

أي أن نسبة المدخنين في المجتمع المذكور تقدر بـ 21.88% وبخطأ معياري قدره 3.27%.

**تقدير الفرق بين نسبتي مجتمعين طبيعيين:**

$$\widetilde{\sigma}_{\bar{x}_1-\bar{x}_2}=\sqrt{\widetilde{\sigma}^2_{\bar{x}_1}+\widetilde{\sigma}^2_{\bar{x}2_1}}=\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}$$

وبطريقة مشابهة يمكننا تقدير الفرق بين نسبتين في مجتمعين ($R_1$-$R_2$) بواسطة الفرق بين النسبتين في العينتين ، واللتين سنرمز لهما بـ ($r_1$-$r_2$). فيكون لدينا (مع الحفاظ على الترتيب):

$$R_1 - R_2 = r_1 - r_2$$

وإن تقدير الخطأ المعياري لذلك التقدير يحسب من خلال العلاقة التالية:

$$\tilde{\sigma}_{r_1 - r_2} = \sqrt{\frac{r_1 \cdot q_1}{n_1} + \frac{r_1 \cdot q_1}{n_2}}$$

**مثال:**

نفترض أننا نريد تقدير الفرق بين متوسطي الدخل الشهري للصيادلة الجدد في مدينتين، وتقدير الفرق بين نسبتي المدخنين فيهما، فسحبنا من كل منهما عينتين الأولى بحجم $n_1$=30 ، والثانية بحجم $n_2$=20 ، فكان متوسط الدخل في العينة الأولى $\bar{x}_1 = 20000$ ، وفي العينة الثانية $\bar{x}_2 = 15000$ ل.س /شهريا. وكان الانحراف المعياري للعينة الأولى $s_1 = (360)$ والانحراف المعياري للعينة الثانية $s_2 = (150)$ ,....

كما كانت نسبة المدخنين فيهما $r_1 = 0.35$ و $r_2 = 0.27$ على الترتيب. فكيف يمكننا أن نقارن بين هذين المجتمعين ونقدر الفروقات بينهما؟.

للإجابة على ذلك نقوم بتقدير الفرق بين متوسطي الدخل فنجد أن:؟

$$\mu_1 - \mu_2 = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 20000 - 15000 = 5000$$

أما بالنسبة لتقدير الخطأ المعياري لذلك التقدير فيحسب ......... وبذلك نجد أنه يساوي:

$$\tilde{\sigma}_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\tilde{\sigma}^2_{\bar{x}_1} + \tilde{\sigma}^2_{\bar{x}_{21}}} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(360)^2}{30} + \frac{(150)^2}{20}}$$

$$= \sqrt{4320 + 1125} = 73.79$$

أي أن الفرق بين متوسطي الدخل في هاتين المدينتين يقدر بـ 5000 ل.س، وبخطأ معياري قدره 73.79 ليرة.

أما بالنسبة لتقدير الفرق بين نسبتي المدخنين فتستخدم العلاقة التالية:

$$= 0.35 - 0.27 = 0.08\,(\mathbf{R_1} \widetilde{-\ \mathbf{R_2}}) = (\mathbf{r_1} - \mathbf{r_2})$$

ولتقدير الخطأ المعياري المتعلق بذلك الفرق نطبق العلاقة التالية:

$$\tilde{\sigma}_{r_1-r_2}=\sqrt{\frac{r_1\cdot q_1}{n_1}+\frac{r_2\cdot q_2}{n_1}}=\sqrt{\frac{(0.35)(1-0.35)}{30}+\frac{(0.27)(1-0.27)}{23}}$$
$$=\sqrt{0.0076+0.0099}=0.1323$$

أي أن الفرق بين نسبتي المدخنين في المدينتين يقدر بـ 0.08 وبخطأ معياري يساوي0.1323 .

### حساب حجم العينة n:

إن حجم العينة اللازم سحبه في دراسة معينة يتوقف على مقدار تجانس المجتمع بالنسبة للخاصة المدروسة، وعلى مقدار الدقة المطلوبةd وعلى معامل الثقة المفروض zوعلى مقادير أخرى كالتكلفة وطريقة السحب. وهو بصورة عامة يجب أن يحقق الشروط الآتية:

1. أن يتناسب طرداً مع احتمال الثقة المطلوب أو مع مربع معامل احتمال zالذي يؤخذ من جدول التوزيع الطبيعي.

2. أن يتناسب طرداً مع تباين العينة $s^2$ لأن ذلك التباين يعبّر عن تشتت القيم في العينة والمجتمع، فكلما كان التشتت كبيراً لزم أن يكون حجم العينة كبيراً.

3. أن يتناسب عكساً مع مربع الدقة المرغوبة $d^2$ . علماً بأن الدقة هي الحد الأعلى للخطأ المسموح به. ويتم تحديده مسبقاً من قبل المسؤولين عن البحث أو الدراسة.

وبما أن الدقة هي الحد الأعلى للخطأ المسموح به لتقدير متوسط المجتمع. فهي يجب أن تحقق العلاقة الآتية:

$$d=Z\sigma_{\bar{x}}=z\frac{S}{\sqrt{n}}$$

وبتربيع الطرفين وحساب n منها نجد أن الحد الأدنى لحجم العينة يساوي:

$$n_0=\frac{Z^2\sigma^2}{d^2}$$

وهنا يُلاحظ أنه لا يمكن تطبيق هذه العلاقة إلا بعد تحديد كل من $Z$ و d من قبل المسؤولين.

أما بالنسبة للتباين $S^2$ فيقدر بواسطة سحب عينة اختباريه من واحدات المجتمع ثم استخلاص تقدير لقيمة $S^2$ وبالطريقة نفسها يمكننا استنتاج العلاقة التي نحسب منها حجم العينة اللازم $n_0$ لتقدير نسبة خاصة معينة في المجتمع، وهي العلاقة الآتية:

$$n_0=\frac{z^2\cdot r\cdot q}{d^2}$$

ولتطبيقها نحتاج إلى تحديد z و d بشكلٍ مسبق، ثم حساب القيمة التقديرية r من خلال سحب عينة اختباريه من المجتمع المدروس.

**مثال:**

أوجد حجم العينة اللازم لتقدير متوسط خاصة معينة في المجتمع، ثم حجمها لتقدير نسبة المدخنين فيه، إذا علمت أننا نريد أن يكون ذلك التقدير باحتمال ثقة قدرة 0.95 (أي بمستوى دلالة أقل من 0.05)، وأن الدقة المطلوبة في تقدير المتوسط تساوي d=5 وفي تقدير نسبة المدخنين d=0.10 وأن العينة الاختباريه أعطتنا أن $s^2 = 90$ وأن نسبة المدخنين فيه كانت تساوي r = 0.60.

**الحل:**

من الشروط السابقة نجد أن قيمة z المقابلة لاحتمال الثقة المذكور هي: z=2.

وأن حجم العينة اللازم لتقدير المتوسط يُحسب من العلاقة الآتية:

$$n_0 = \frac{z^2 s^2}{d^2} = \frac{(2)^2 \cdot 90}{(5)^2} = 14.4 \approx 15$$

أي أن الحد الأدنى لحجم العينة الذي يحقق الشروط السابقة لتقدير المتوسط هو 15 فرداً.

أما بالنسبة لحجم العينة اللازم لتقدير النسبة R فنحسبه من العلاقة:

$$n_0 = \frac{z^2 \cdot r \cdot q}{d^2} = \frac{(2)^2 \cdot (0.60) \cdot (0.40)}{(0.10)^2} = 96$$

وهو الحد الأدنى لحجم العينة اللازم لتحقيق الشروط السابقة في تقدير النسبة R.

## تمرينات

1. لنفترض أن مجتمعاً مؤلفاً من العناصر المعلومة التالية:

$$Yi \quad : 12 \quad ,14 \quad ,16 \quad ,18 \quad ,15 \quad ,17 \quad ,16 \quad ,19 \quad ,15 \quad ,17$$

. اسحب بشكل عشوائي وبدون إعادة عينة بحجم $n = 3$.

. أوجد تقديراً لمتوسط المجتمع وقارنه مع المتوسط الحقيقي $\bar{y}$.

. أوجد تقديراً لتباين ذلك المجتمع وقارنه مع التباين الحقيقي.

. أوجد مجال ثقة لمتوسط المجتمع وباحتمال قدره 0,95.

. حاول أن تسحب عينة أخرى وبنفس الحجم ثم أوجد مختلف التقديرات السابقة.

2. سحبنا عينة بدون إعادة وبحجم $n = 3$ من مجتمع مؤلف من 50 أسرة فوجدنا أن دخولها الشهرية تساوي (ألف ل.س).

$$X_i : 12 ,10 ,14 ,18 ,17 ,11 ,19 , 20 ,13$$

والمطلوب:

. إيجاد تقدير لمتوسط الدخل في المجتمع $\bar{y}$.

. إيجاد تقدير لتباين الدخل فيه $\sigma^2$.

. إيجاد تقدير للتباين $\sigma_{\bar{x}}^2$.

. إيجاد تقدير نسبة الدخول التي هي أقل من 15 وتقدير تباينها.

. إيجاد مجال الثقة المقابل للاحتمال 0,95 لكل من المتوسط والنسبة.

3. لنفترض أن مجتمعاً مؤلفاً من 500 عنصراً. ونريد أننسحب منه مع الإعادة عينة عشوائية لتقدير متوسطه بدقة $\mathrm{d} = 5$ ، وباحتمال قدره 0,95 . فما هو حجم العينة اللازم تحديده لتأمين الدقة المطلوبة وبالاحتمال المفروض؟، وذلك إذا علمت أن تباينه يقدر ب: $s^2 = 250$ .

4. احسب حجم العينة اللازم لتحقيق دقة d=0.01، وباحتمال 0.95 في حالة السحب مع الإعادة عند تقدير نسبة المدخنين علماً بأن التقدير الأولي لنسبة المدخنين كان r=0.25.

5. سحبنا مع الإعادة من بين الطالبات عينة بحجم $n = 15$ طالبة، ومن بين الطلاب عينة بحجم $n = 20$ طالباً، ودرسنا متوسط نفقاتهم على مستلزماتهم الجامعية في الشهر، فوجدنا أن متوسط نفقات الطالبة في العينة $\bar{x}_1 = 1000$ ل.س ، وأن متوسط نفقات الطالب في العينة $\bar{x}_2 = 1500$ ل.س، وأن تباين النفقات في عينة الطالبات كان يساوي $s_1^2 = 600$ ل.س ، وأن تباين النفقات في عينة الطلاب كان يساوي $s_1^2 = 500$ ل.س؟ ، وأن نسبة ما تنفقه الطالبات في العينة على الكتب كانت تساوي $r_1 = 0{,}10$ ، بينما كانت نسبة ما ينفقه الطلاب في العينة على الكتب كانت تساوي $r_1 = 0{,}20$ ،

والمطلوب:

. تقدير الفرق بين متوسطي النفقات للطالبات والطلاب ثم إيجاد مجال الثقة لذلك باحتمال قدره 0,95

.تقدير الفرق بين نسبتي النفقات على الكتب ثم إيجاد مجال الثقة لذلك باحتمال قدره $0,95$ .