اختبار الفرضيات البسيطة

تمهيد :

يتناول اختبار الفرضيات مسألة اتخاذ قرار احتمالي حول قبول أو رفض تلك الفرضيات. وتتناول الفرضيات توقعات معينة حول أي مؤشر من مؤشرات المجتمع، كالمتوسط أو النسبة أو الإجمالي أو الفرق... الخ. حيث نفترض أنها تساوي قيمة معينة مسبقاً، ثم يتم إجراء الاختبار لاتخاذ قرار حول ذلك. كما تتناول الفرضيات موضوعات أخرى مثل شكل أو نوع التوزيعات الاحتمالية فنفترض أن لها شكلاً منتظماً أو طبيعياً أو غير ذلك...

فمثلاً قد يدعي أحدهم أن متوسط الدخل الشهري للموظفين في بلده يساوي 15000 ليرة، أو أن إجمالي أيام العمل في شركته يساوي 350 يوم عمل في السنة، أو أن نسبة الأمية في مدينته تساوي 40%... الخ.

وعندما نسمع أو نقرأ هذه الادعاءات لا نستطيع التسليم بها. لذلك نعتبر هذه الادعاءات افتراضات حتى يتم اختبارها والتحقق من صحتها، وعندها يتم قبولها أو رفضها.

وللتحقق من صحة أية فرضية نقوم بسحب عينة عشوائية من عناصر المجتمع المدروس، ونأخذ منها المعلومات المطلوبة ونجري الحسابات اللازمة لتقدير قيمة المؤشر الذي تتناوله الفرضية، ثم نقوم بمقارنة تلك القيمة التقديرية مع القيمة المفترضة ونتخذ القرار المناسب.

ولاختبار الفرضيات صلة وثيقة بمجالات الثقة التي تقابل احتمالات الثقة المطلوبة لأننا لا نقبل الفرضية إلا إذا كانت واقعة ضمن مجال الثقة المفروض، والمقابل لمعامل الثقة المعلوم.

وتتألف عملية اختبار الفرضيات من عدة خطوات أساسية تطبق بشكل عام على جميع الاختبارات والمؤشرات. لذلك سنطبقها على مؤشر لا على التعيين نسميه θ (تيتا) وهو قد يكون المتوسط أو النسبة أو التباين أو غير ذلك.

الخطوات الأساسية لإجراء الاختبار:

1- تحديد مستوى الدلالة: ونرمز له بـ α ، وغالباً ما يوضع مساوياً لـ 0.10 أو لـ 0.05. وهو يعبر عن احتمال رفض فرضية العدم H_0 رغم أنها صحيحة في حقيقتها.

2- وضع فرضية العدم: وهو افتراض يضعه الباحث على شكل مساواة بين طرفين، ويدل على عدم وجود اختلاف جوهري بين الطرفين، ونرمز لفرضية العدم بالرمز H_0 . كأن نفترض أن قيمة المؤشر θ تساوي قيمة معينة هي θ_0، ونكتبها على الشكل التالي:

$$H_0 : \theta = \theta_0 \quad (1\text{-}4)$$

وهنا نلاحظ أن منطقة قبول هذه الفرضية تشكل مجال الثقة المناسب حول θ_0 وباحتمال ثقة $(1-\alpha)$

ويمكن كتابة الفرضية H_0 على شكل عدم وجود فرق بين الطرفين كما يلي:

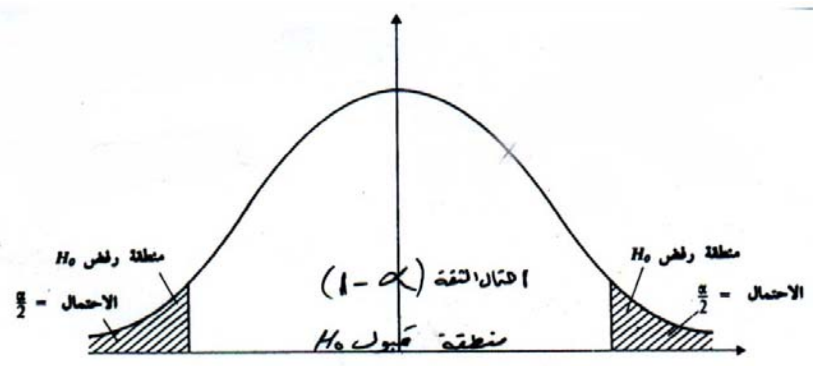
$$.H_0 : \theta - \theta_0 = 0$$

3- وضع الفرضية البديلة وتحديد منطقة الرفض: وهي الفرضية المناقضة للفرضية العدم السابقة، ونرمز لها بالرمز H_1، وهي تأخذ أحد ثلاثة أشكال أساسية هي:

- الشكل الأول وهو يكتب كما يلي:

أي أن منطقة الرفض تقع على الجانبين $\quad H_1 : \theta \neq \theta_0 \quad (2\text{-}4)$

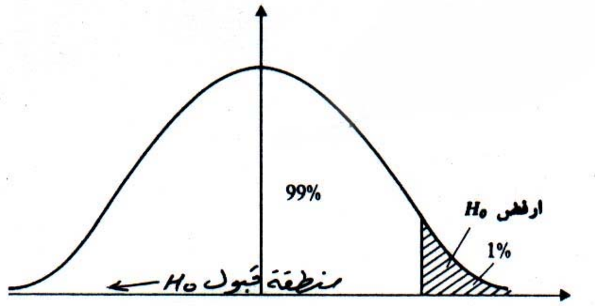
و يسمى هذا النوع من الاختبارات ثنائي الجانب، لأنه يحتمل الزيادة والنقصان عن θ_0 وتكون منطقة الرفض على جانبي مجال الثقة الذي مركزه θ_0 وكل جانب يقابل نصف مستوى الدلالة $\frac{\alpha}{2}$ كما على الشكل التالي:



- والشكل الثاني للفرضية البديلة يكتب كما يلي:

أي أن منطقة الرفض تقع في الجهة اليمنى فقط $(3\text{-}4)$ $\quad H_1 : \theta > \theta_0$

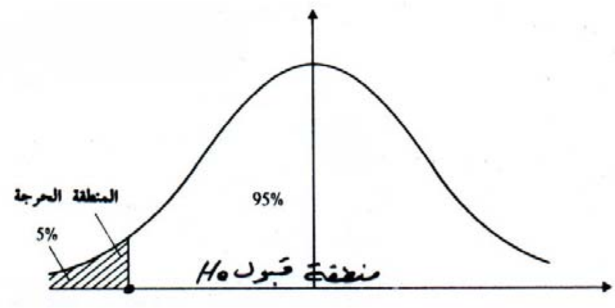
وعندها يكون الاختبار أحادي الجانب (يميني) لأنه يحتمل الزيادة فقط عن θ_0 وتكون منطقة الرفض بجهة اليمين فقط؛ وتقابل كامل مستوى الدلالة α كما على الشكل التالي:



شكل (4-2)

- والشكل الثالث للفرضية البديلة يكتب كما يلي: $H_1 : \theta < \theta_0$

وعندها يكون الاختبار أحادي الجانب يساري لأنه يحتمل النقصان فقط عن $\theta 0$ وتكون منطقة الرفض على اليسار فقط وتقابل كامل مستوى الدلالة α . كما على الشكل التالي:



4- تحديد مؤشر الاختبار (إحصاء الاختبار): وهو المؤشر الذي سيستعمل في اتخاذ القرار. وهو عادة يحسب من معطيات فرضية العدم ومعطيات العينة. وهو غالباً ما يكون على الشكل التالي:

$$t_c = \frac{\tilde{\theta} - \theta_0}{\tilde{\sigma}_{\tilde{\theta}}}$$

5- سحب العينة بعد تحديد حجمها الأدنى: ويتم تحديد حجم العينة بأخذ أية عينة اختباريه وحساب تباينها s^2 ثم تطبيق العلاقة التالية:

$$n_0 = \frac{4\ s^2}{d^2}$$ (الحجم المقابل لمستوى دلالة 0.05 ولدقة مقدارها d)

ويتم سحب العينة بواسطة إحدى الطرق العشوائية المعروفة . ومنها يتم حساب تقدير لـ θ والخطأ المعياري $\sigma_{\tilde{\theta}}$.

6- حساب قيمة مؤشر الاختبار: وذلك بتطبيق العلاقة (4-5) السابقة لحساب قيمة مؤشر الاختبار t_c.
وذلك من خلال تعويض θ_0 من فرضية العدم H_0 وتعويض $\tilde{\theta}$ و $\tilde{\sigma}_{\tilde{\theta}}$ من معلومات العينة المسحوبة .

7- اتخاذ القرار المناسب: ويتم ذلك بواسطة مقارنة القيمة المطلقة لمؤشر الاختبار t مع القيمة الحرجة له، وهي التي سنرمز لها بالرمز t_0، وهي تؤخذ من الجداول الإحصائية المخصصة، وذلك حسب التوزيع الاحتمالي، ونوع الاختبار المفروض (ثنائي أو أحادي الجانب)، ومقدار درجات الحرية المحسوبة من حجم العينة n.

- فإذا كان الاختبار ثنائي الجانب فإن الفرضية H_0 تكون مقبولة إذا كانت قيمة t واقعة ضمن مجال الثقة الذي مركزه θ_0 ويكون القرار كما يلي:

  - إذا كانت $|t_c| < t_0$ نقبل فرضية العدم H_0 ونرفض الفرضية البديلة H_1
  - أما إذا كانت $|t_c| \geq t_0$ نرفض فرضية العدم H_0 ونقبل الفرضية البديلة H_1.

- وعندما يكون الاختبار أحادي يميني $(H_1 : \theta > \theta_0)$ فإن القرار يكون حسب التالي:

  - إذا كانت $t_c < t_0$ فإننا نقبل فرضية العدم H_0 ونرفض الفرضية البديلة H_1
  - إذا كانت $t_c \geq t_0$ فإننا نرفض فرضية العدم H_0 ونقبل الفرضية البديلة H_1.

- وعندما يكون الاختبار أحادي يساري فإن القيمة الحرجة لـ t_c تكون سالبة نرمز لها (t_0) وإن القرار يكون حسب التالي:

  - إذا كانت $t_c > -t_0$ فإننا نقبل فرضية العدم H_0 ونرفض الفرضية البديلة H_1
  - إذا كانت $t_c < -t_0$ فإننا نرفض فرضية العدم H_0 ونقبل الفرضية البديلة H_1.

ولقد وضعنا إشارة سالب أمام t_0 في حالة الاختبار الأحادي اليساري لأن الجداول المرفقة تعطينا القيم الموجبة لـ t_0. أما قيمة المؤشر t_c فهي تبقى حسب قيمتها الجبرية التي تحصل علها من العينة ولا تؤخذ هنا بالقيمة المطلقة.

وعند استخراج قيمة t_0 من الجداول الإحصائية نميز الحالات التالية:

1- إذا كان حجم العينة كبيراً ($n>30$) فإننا نقوم بمقارنة القيمة المحسوبة لـ t_c مع قيمة Z_0 المأخوذة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري. ويتم استخراج قيمة Z_0 من الجدول حسب نوع الفرضية البديلة H_1.

- فإذا كانت H_1 ثنائية الجانب فإننا نأخذ قيمة Z_0 المقابلة لنصف مستوى الدلالة المفروض $\frac{\alpha}{2}$. من جدول التوزيع الطبيعي المعياري (أي المقابلة للاحتمال $\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$)

ونرمز لها بـ $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ أو اختصاراً بـ Z_0.

- أما إذا كانت H_1 أحادية الجانب فإننا نأخذ قيمة Z_0 المقابلة لكامل مستوى الدلالة المفروض α أي المقابلة للاحتمال $(1-\alpha)$ ونرمز لها بـ $Z_{1-\alpha}$ أو اختصاراً بـ Z_0.

-2 إذا كان حجم العينة صغيراً (n أصغر من 30): فإننا نقوم بمقارنة القيمة المحسوبة لـ t_c مع القيمة الحرجة ستودينت t_0 المأخوذة من جدول t لتوزيع ستودينت. ويتم استخراج قيمة t_0 من جدول توزيع ستودينت حسب نوع الفرضية البديلة H_1.

- فإذا كانت H_1 ثنائية الجانب فإننا نأخذ قيمة t_0 المقابلة لنصف مستوى الدلالة المفروض $\frac{\alpha}{2}$ ولـ(n - 1) درجة حرية. ونرمز لها بـ $t_{\frac{\alpha}{2}}$ أو اختصاراً t_0.

- أما إذا كانت H_1 أحادية الجانب فإننا نأخذ قيمة t_0 المقابلة لكامل مستوى الدلالة المفروض ولـ (n-1) درجة حرية. ونرمز لها بـ $t_{(\alpha,n-1)}$ أو اختصاراً t_0.

ويمكننا في بعض الحالات الخاصة الاعتماد على الجدول المختصر التالي:

مستوى الدلالة α	نصف مستوى الدلالة $\frac{\alpha}{2}$	قيمة Z_0 الطبيعية المقابلة لنصف مستوى الدلالة $\frac{\alpha}{2}$	قيمة t_0 المقابلة لدرجات الحرية (n-1) ولنصف مستويات الدلالة $\frac{\alpha}{2}$		
			n-1 = 10	n-1 = 20	n-1 = 25
0.10	0.05	1.65	1.812	1.725	1.708
0.05	0.025	$2 \approx 1.96$	2.228	2.086	2.060
0.01	0.005	2.58	3.169	2.845	2.787

<u>ملاحظة هامة</u> : عند إجراء اختبار فرضية العدم H_0 مقابل الفرضية H_1 سنتخذ قراراً حول قبول H_0 أو رفضها، وإن ذلك قد يكون صحيحاً ولكنه يحتمل الخطأ وهنا سنحصل على عدة حالات نضعها في الجدول التالي :

الجدول (2-4)

نتيجة القرار / حقيقة الفرضية H_0	قبول H_0	رفض H_0
صحيحة	قرار صحيح واحتماله $(1-\alpha)$	قرار خاطئ من النوع الأول واحتماله (α)
خاطئة	قرار خاطئ من النوع الثاني واحتماله β	قرار صحيح واحتماله $(1-\beta)$

وكلما كان (α) صغيراً كانت الثقة كبيرة وكلما كان β صغيراً كان الاختبار قوياً

لذلك يسمى الاحتمال $(1-\beta)$ بقوة الاختبار ويعتمد عليه في البحوث الملحقة

وسنقوم فيما يلي باستعراض بعض نماذج الاختبارات الهامة وهي:

اختبارات حول متوسط المجتمع:

عندما يدور الاختبار حول متوسط المجتمع والذي سنرمز له بالرمز $\bar{y}$ (وهو متوسط مجهول) فإن فرضية العدم تكون من الشكل التالي:

$$H_0 : \bar{y} = \bar{y}_0$$

وهي تعني أننا نفترض أن متوسط المجتمع المجهول $\bar{y}$ يساوي قيمة معينة هي $\bar{y}_0$. ونقبل أية قيمة تقديرية لـ $\bar{y}$ واقعة ضمن مجال الثقة المنشأ حولها.

أما بالنسبة للفرضية البديلة فغالباً ما تكون من الشكل التالي:

$$H_1 : \bar{y} \neq \bar{y}_0 \qquad \text{(الاختبار ثنائي الجانب)}$$

وهذا يعني أن متوسط المجتمع لا يساوي القيمة المفترضة $\bar{y}_0$.

أما مؤشر الاختبار المستخدم في هذه الحالة فهو:

$$t = \frac{\overline{x} - \overline{y}_0}{\tilde{\sigma}_{\overline{x}}} = \frac{\overline{x} - \overline{y}_0}{s/\sqrt{n}}$$

حيث إن $\overline{x}$, s هما متوسط العينة وانحرافها المعياري. ويتم اتخاذ القرار المناسب حسب قيمة t_c وحسب حجم العينة المسحوبة كما بيّنا سابقاً. حيث نقوم بمقارنة القيمة المطلقة لـ t_c مع القيمة الحرجة المعيارية $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ والمقابلة لنصف مستوى الدلالة $\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ والتي تؤخذ من جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

أما إذا كانت الفرضية البديلة أحادية الجانب فنقارن قيمة t_c مع قيمة $Z_{1-\alpha}$ المقابلة لكامل مستوى الدلالة (α).

وإذا كان حجم العينة n صغيراً نقارن t مع t_0 المأخوذة من جدول توزيع ستودينت كما أشرنا سابقاً .

مثال: ادعى موظف المالية أن متوسط دخل الطبيب في اليوم يساوي 5000 وحدة نقدية. وللتحقق من ذلك سحبنا عينة عشوائية من 35 طبيباً، فوجدنا أن متوسط الدخل فيها كان $\overline{x} = 4660$ وحدة نقدية في اليوم، وأن الانحراف المعياري للعينة كان $s = 1207$.

والمطلوب : اختبار صحة الادعاء بمستوى دلالة قدره 0.05 (أي باحتمال ثقة 0.95).

لإجراء ذلك الاختبار نضع الفرضيتين العدمية والبديلة على الشكل التالي:

$$H_0 : \overline{y} = 5000$$
$$H_1 : \overline{y} \neq 5000$$

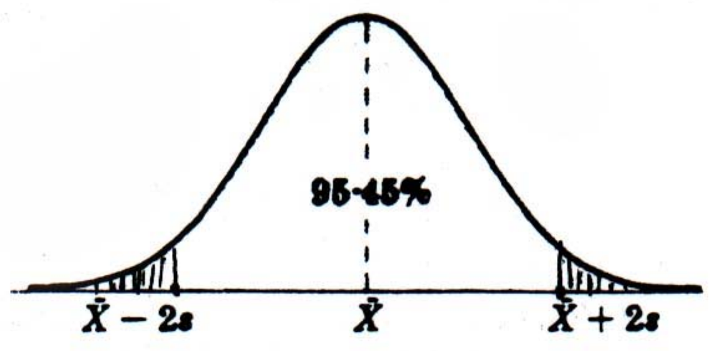
ثم نقوم بحساب قيمة مؤشر الاختبار t التالي:

$$t_c = \frac{\overline{x} - \overline{y}_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{4660 - 5000}{1207 / \sqrt{35}} = -1.667$$

وبما أن حجم العينة كبير نسبياً فإننا نقوم بمقارنة قيمة المؤشر t مع قيمة $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ المقابل لنصف مستوى الدلالة (0.025). وهي تساوي

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = Z_{1-0.025} = Z_{0.975} = 1.96$$

وبالمقارنة نجد $|t_c| < 1.96$ ، أي أن القيمة المطلقة لـ t_c أصغر من Z_0. إذن نقبل الفرضية H_0 لأنه ليس لدينا دليلاً كافياً على رفضها،



شكل (4-4)

مثال: قيل أن متوسط مدة نزيف الدم بعد قلع الضرس يبلغ 12 ساعة. وللتأكد من ذلك قمنا بأخذ عينة عشوائية بحجم n = 11 شخصا فوجدنا أن متوسط المدة كان $\bar{x} = 13$ وأن الانحراف المعياري للعينة كان s = 0.994. اختبر صحة الادعاء السابق بمستوى دلالة 0.01 (باحتمال ثقة 0.99).

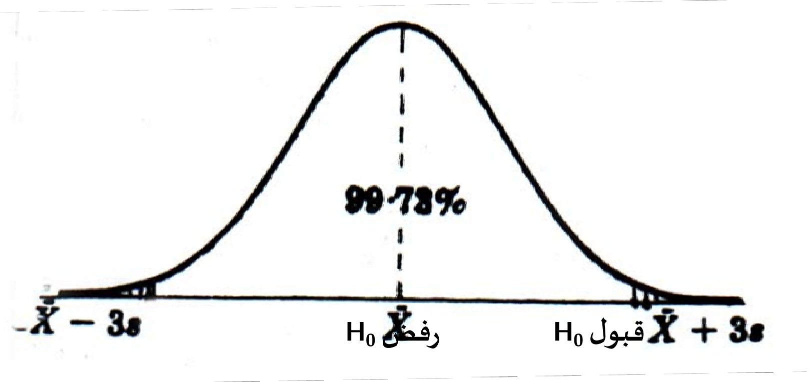
لاختبار ذلك نضع الفرضيتين العدمية والبديلة كما يلي:

$$H_0 : \bar{y} = 12$$
$$H_1 : \bar{y} \neq 12$$

(الاختبار ثنائي الجانب)

ثم نحسب قيمة مؤشر الاختبار فنجد أن:

$$t_c = \frac{13 - 12}{0.994 / \sqrt{11}} = 3.34$$



شكل (5-4)

وبما أن حجم العينة n صغير نقوم بمقارنة قيمة t_c مع قيمة t_0 الحرجة المقابلة لنصف مستوى الدلالة (0.005) أي المقابلة لـ $\frac{\propto}{2} = 0.025$ ولـ $n-1=10$ درجة حرية، والتي تساوي t_0=3.169.

وبالمقارنة نجد أن $|t_c| > t_0$ أي أن القيمة المطلقة لـ t_c أكبر من t_0 ، لذلك نرفض الفرضية الموضوعة H_0

اختبارات حول نسبة خاصة في المجتمع:

إن إجراء أي اختبار حول نسبة خاصة في المجتمع R لا يختلف كثيراً عن إجرائه حول المتوسط حيث نضع فرضية العدم على الشكل التالي:

$$H_0 : R = R_0$$

ونضع الفرضية البديلة على الشكل التالي: $H_1 : R \neq R_0$

وبعدها نسحب عينة عشوائية ولنفترض أن نسبة الخاصة المدروسة فيها كانت r. أما مؤشر الاختبار فيحسب من العلاقة:

$$t_c = \frac{r - R_0}{\tilde{\sigma}_r} = \frac{r - R_0}{\sqrt{\frac{r \cdot q}{n}}}$$

وبعدها نقوم بمقارنة قيمة t المحسوبة مع قيمة $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ الحرجة والمقابلة لنصف مستوى الدلالة المحدد. ونقبل الفرضية إذا كانت القيمة المطلقة لـ t_c أصغر من Z_0. وفي حالة العينات الصغيرة نقارن مع t_0 لستودينت والمقابلة لنصف مستوى الدلالة، ولـ (n-1) درجة حرية.

أما إذا كانت الفرضية البديلة أحادية الجانب فنقارن قيمة t قيمة Z_0 المقابلة لكامل مستوى الدلالة $\propto$. أما إذا كان حجم العينة n صغيراً فنقارن t مع قيمة t_0 المأخوذة من جدول توزيع ستودينت .

مثال: نشرت إحدى الصحف أن نسبة الذين ينظفون أسنانهم مساءً تساوي 14 %. وللتحقق من ذلك

سحبنا عينة عشوائية من 100 شخصاً فكانت هذه النسبة فيها 20 %. اختبر صحة النبأ باحتمال 0.95.

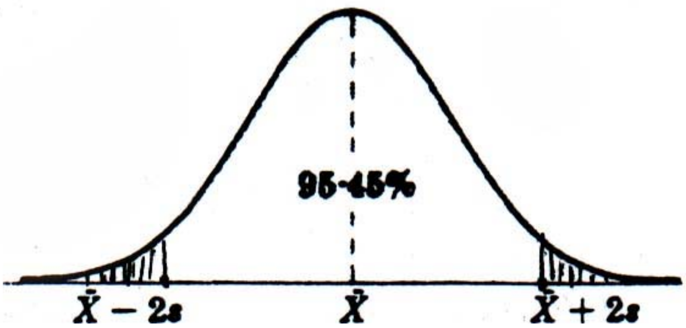
لإجراء الاختبار نضع الفرضيتين العدمية والبديلة كما يلي:

$$H_0 : R = 0.14$$

$$H_1 : R \neq 0.14$$

نحسب قيمة مؤشر الاختبار المناسب فنجد أن:

$$t_c = \frac{r - R_0}{\sqrt{\frac{r \cdot q}{n}}} = \frac{0.20 - 0.14}{\sqrt{\frac{(0.20)\,(0.80)}{100}}} = 1.5$$



وبما أن حجم العينة كبير نقوم بمقارنة قيمة t مع القيمة الحرجة المعيارية $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ المقابلة لنصف مستوى الدلالة 0.05 والتي تساوي $Z_0 = 1.96$، فنجد أن قيمة $|t_c|$ أصغر من 1.96. لذلك نقبل الفرضية العدمية القائلة أن تلك النسبة تساوي 14 %.

ملاحظة : لو وضعنا الفرضيتين كما يلي :

$$H_0 : R = 0.14$$

$$H_1 : R > 0.14$$

الاختبار أحادي يميني عندئذ نقوم بمقارنة قيمة t_c المحسوبة (1.5) مع قيمة Z_0 المقابلة لكامل مستوى الدلالة ∝ والتي تساوي (+1.64) فنجد أن:

$$t = 1.5 < (1.64)$$

لذلك نقبل فرضية العدم H_0 ونرفض الفرضية البديلة H_1 التي تقول أن النسبة R هي أكبر من 0.14 وباحتمال ثقة قدره 0.95

استخدام القيمة (p) لاختبار الفرضيات الإحصائية:

$p-value$ هي أصغر قيمة لمستوى الدلالة α يمكن عندها رفض فرضية العدم.

- إذا كانت $\alpha \le p-value$ فإننا نقبل فرضية العدم

- إذا كانت $\alpha > p-value$ فإننا نرفض فرضية العدم

وأغلب البرامج الإحصائية توفر هذه القيمة مباشرة عند إجراء الاستدلال الإحصائي على مجموعة من البيانات.

حساب $p-value$:

- إذا كان الاختبار ثنائي الجانب فإن :

$$p-value = P(Z \le -t_c) + P(Z \ge t_c)$$

- إذا كان الاختبار أحادي الجانب يساري فإن:

$$p-value = P(Z \le -t_c)$$

- إذا كان الاختبار أحادي الجانب يساري فإن:

$$p-value = P(Z \ge t_c)$$

مثال:

بفرض أن الأجر اليومي لعمال مؤسسة في منطقة ما يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط قدره 494 وحدة نقدية وانحراف معياري يساوي 124 وحدة نقدية وقد ادعى العمال بأن الأجر اليومي المدفوع لهم مختلف عن المؤسسات الأخرى في نفس المنطقة ثم أخذت عينة عشوائية حجمها 86 من تلك المنطقة فكان المتوسط الحسابي فيها 502 وحدة نقدية . استخدم $p-value$ عند مستوى دلالة $\alpha = 0.05$ لاختبار أن أرباب هذه المؤسسات يدفعون أجر مختلف عن 494 وحدة نقدية .

الحل:

$$H_0 : \mu = 494$$
$$H_1 : \mu \ne 494$$
$$t_c = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{502 - 494}{\frac{124}{\sqrt{86}}} = 0.6$$
$$P(Z \le -0.6) + P(Z \ge 0.6) = [1 - P(Z \le 0.6)] + [1 - P(Z \le 0.6)] = 2 - 2P(Z \le 0.6) =$$
$$= 2 - 2(0.7257) = 0.5486 \Rightarrow p > \alpha = 0.05$$

لذلك نرفض H_1 التي تقول إن أرباب العمل يدفعون أجر يختلف عن 494 ونقبل فرضية العدم H_0 التي تقول إن أرباب العمل يدفعون أجر لا يختلف عن 494 وحدة نقدية.