اختبار الفرضيات البسيطة (تتمة)

اختبار الفرق بين متوسطي مجتمعين طبيعيين(لهما تباينين معلومين known)

لنفترض أننا نعالج خاصة معينة تخضع للتوزيع الطبيعي في مجتمعين طبيعيين ونريد مقارنة متوسطي هذه الخاصة فيهما. ولهذا نفترض أن متوسطي هذين المجتمعين هما: μ_1 , μ_2 ، ونريد مقارنة هذين المتوسطين عن طريق دراسة الفرق بينهما. لذلك نقوم بسحب عينتين مستقلتين بحجمين كبيرين n_1, n_2، ولنفترض أن متوسطي هاتين العينتين كانا يساويان $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ وأن تبايناهما كانا يساويان s_1^2 s_2^2 على الترتيب.

ولإجراء هذا الاختبار نتبع نفس الأسلوب السابق مع مراعاة بعض الفروقات الناتجة عن طبيعة الاختبار المطلوب، والتي تنعكس على الفرضيات وعلى مؤشر الاختبار. فنضع الفرضيتين العدم والبديلة كما يلي:

$$H_0: (\mu_1 - \mu_2) = \Delta_0$$
$$H_1: (\mu_1 - \mu_2) \neq \Delta_0$$

أما مؤشر الاختبار فنحسبه من العلاقة التالية:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \Delta_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

وبعد حساب تلك القيمة نقوم بمقارنتها بالقيمة الحرجة المعيارية Z_0 المقابلة لنصف مستوى الدلالة المحدد ثم نقرر النتيجة.

مثال: نفترض أننا نريد أن ندرس أداء الطالب في مقرر الرياضيات في مدرستين مختلفتين، فسحبنا عينة عشوائية من طلاب المدرسة الأولى بحجم $n_1 = 40$ وعينة عشوائية من طلاب المدرسة الثانية بحجم $n_2 = 50$ فكان متوسطا الدرجات فيهما $\bar{x}_1 = 65$, $\bar{x}_2 = 60$ وتبايناهما $s_1^2 = 160$, $s_2^2 = 250$. والمطلوب اختبار الفرضية التي تقول أن الفرق بين متوسطي الدرجات في المدرستين غير جوهري وذلك بمستوى دلالة قدره 0.05.

الحل:

نضع الفرضيتين العدمية والبديلة كما يلي:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \mu_0 = 0 \; ; \; H_2 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

ثم نقوم بحساب مؤشر الاختبار فنجد أن:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \mu_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{(65 - 60) - 0}{\sqrt{\frac{160}{40} + \frac{250}{50}}} = +1.67$$

وبمقارنة ذلك مع القيمة الحرجة المعيارية $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ المقابل لنصف مستوى الدلالة 0.025

نجد أن القيمة المطلقة لـ $|t|$ أصغر من Z_0. لذلك نقبل الفرضية H_0 القائلة بعدم وجود فرق جوهري بين متوسطي درجات الطلاب في مقرر الرياضيات في هاتين المدرستين.

ملاحظة : إذا كان تباينا المجتمعين مجهولين فلا يجوز إجراء هذا الاختبار إلا إذا كان المجتمعان متجانسان أي كان تباينهما متساويان أي أن: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

وعندها نقدر التباين الموحد لهما من تبايني العينة بالعلاقة : $S^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$

وعندها يتحول مؤشر الاختبار إلى الشكل التالي :

$$t = \frac{(x_1 - \bar{x}) - y_0}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

ثم نتابع العمل كالعادة .

اختبارحول متوسطي عينتين مستقلتين من مجتمع واحد:(حالة خاصة)

إذا سحبنا عينتين بحجمين n_2,n_1 من مجتمع واحد فإن الفرق بين المتوسطين μ_1 , μ_2 يصبح مساوياً للصفر حكماً، لأنهما متوسطان لمجتمع واحد، وعندها يكون لدينا $\mu_1 - \mu_2 = 0$ حكماً، وفي هذه الحالة لا داعي لوضع الفرضيتين واختبارهما، ويتحول اختبار الفرق بين متوسطي المجتمعين إلى اختبار الفرق بين متوسطي العينتين المسحوبتين من المجتمع نفسه ويأخذ مؤشر الاختبار الشكل التالي:

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

لذلك نستخدم المؤشر السابق لاختبار جوهرية الفرق بين متوسطي العينتين $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ ، ونحسب قيمته، ثم نقارنها مع القيمة الحرجة المعيارية Z_0 المقابل لنصف مستوى الدلالة المحدد. فإذا كانت القيمة المطلقة لـ t أصغر من $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ نقول بعدم وجود فرق جوهري بين متوسطي العينتين. والعكس بالعكس.

مثال:

لدراسة متوسط النفقات الشهرية لطلاب السنة الأولى في كلية الصيدلة على المواد المخبرية سحبنا عينتين بحجمين $n_1=40$, $n_2=30$ من طلاب نفس الكلية والسنة، فكان متوسطا النفقات في العينتين:

$\overline{x}_1 = 1000$, $\overline{x}_2 = 1100$ وكان تبايناهما $s_1^2 = 50000$, $s_2^2 = 60000$ على الترتيب.

فهل تدلنا هذه المعطيات على وجود فرق جوهري بين متوسطي هاتين العينتين؟. اختبر ذلك بمستوى دلالة 0.05.

الحل: بما أن العينتين قد سحبتا من مجتمع واحد، فهذا يعني أنه لا داعي لوضع الفرضيتين H_0 , H_1. ونقوم بإجراء اختبار حول وجود فرق جوهري بين متوسطي العينتين. ونحسب قيمة مؤشر الاختبار السابق فنجد أن:

$$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{1000 - 1100}{\sqrt{\dfrac{50000}{40} + \dfrac{60000}{30}}} = -1.75$$

وبمقارنة القيمة المطلقة لـ t مع قيمة Z المقابل لنصف مستوى الدلالة 0.025 فنجد أن $|t|$ أصغر من $Z_{0.025} = 1.96$ لذلك لا نستطيع أن نقول بوجود فرق جوهري بين متوسطي العينتين. وهذا يعني أن الفرق الحاصل بينهما ناتج عن الجوانب العشوائية.

اختبار الفرق بين نسبتين في مجتمعين طبيعيين:(لهما تباينين معلومين known)

لاختبار الفرق بين نسبتي خاصة معينة في مجتمعين طبيعيين R_1 , R_2، نستخدم الفرق بين هاتين النسبتين في العينتين والذي نرمز لهما بـ r_1 , r_2 ولحجمي العينتين بـ n_1 , n_2 على الترتيب، ولذلك نضع الفرضيتين العدمية والبديلة كما يلي:

$$H_0 : R_1 - R_2 = R_0$$
$$H_1 : R_1 - R_2 \neq R_0$$

ثم نقوم بحساب مؤشر الاختبار المعرف بالعلاقة التالية:

$$t = \frac{(r_1 - r_2) - R_0}{\sqrt{\frac{r_1 \cdot q_1}{n_1} + \frac{r_2 \cdot q_2}{n_2}}}$$

وبعدها نقوم بمقارنة القيمة المطلقة لـ t مع Z_0 المقابل لنصف مستوى الدلالة المحدد ونقرر النتيجة كما فعلنا في الاختبارات السابقة .

مثال:

لدراسة نسبتي المدخنين في مجتمعين سحبنا منهما عينتين بحجمين $n_1 = 300$ و $n_2 = 250$ فوجدنا أن نسبتي المدخنين فيهما تساوي $r_1 = 0.20$ و $r_2 = 0.25$ على الترتيب:

اختبر الفرضية القائلة بعدم وجود فرق جوهري بين النسبتين في المجتمعين ، وذلك بمستوى دلالة قدره 0.05

الحل:

نضع فرضية العدم القائلة بعدم وجود فرق بين النسبتين في المجتمعين كما يلي:

$$H_0 : R_1 - R_2 = 0$$

$$H_1 : R_1 - R_2 \neq 0$$

ثم نحسب مؤشر الاختبار فنجد أن:

$$t = \frac{(0.20 - 0.25) - 0}{\sqrt{\frac{(0.20)\,(0.80)}{300} + \frac{(0.25)\,(0.75)}{250}}} = -1.398$$

وبمقارنة القيمة المطلقة لـ t مع القيمة الحرجة المعيارية Z_0 المقابل لنصف مستوى الدلالة 0.05 والذي يساوي $Z_{0.025} = 1.96$ ، نجد أن القيمة المطلقة لـ t أصغر من Z_0. إذن نقبل الفرضية العدمية والقائلة بعدم وجود فرق جوهري بين نسبتي المدخنين في المجتمعين.

اختبارات حول تباين مجتمع طبيعي (اختبار χ^2):

كثيراً ما نتناول عند وضع الفروض تباين المجتمع فنفترض أن ذلك التباين يساوي قيمة معينة. وبذلك يمكننا وضع الفرضيتين العدمية والبديلة على الشكل التالي:

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$
$$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

(الاختبار أحادي يميني)

وللتحقق من ذلك نقوم بسحب عينة من ذلك المجتمع ونحسب تباينها s^2 أما بالنسبة لمؤشر الاختبار المستخدم في عملية الاختبار فهو المؤشر الذي يعتمد على تباين العينة s^2 ويعطى بالعلاقة التالية:

$$\chi^2 = \frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma_0^2}$$

وبما أن هذا المؤشر يخضع للتوزيع الاحتمالي $f(\chi^2)$ ذي (n-1) درجة حرية . فإننا نقوم بمقارنة قيمته المحسوبة مع القيمة الحرجة χ_0^2 المأخوذة من جداول $f(\chi^2)$ والمقابلة لمستوى الدلالة المحدد α بكامله ولـ (n-1) درجة حرية. فإذا كانت القيمة المحسوبة χ^2 أصغر من القيمة الحرجة χ_0^2 فإننا نقبل الفرضية H_0 والقائلة بأن تباين المجتمع يساوي σ_0 . ونرفض الفرضية H_0 في حالة العكس.

ويستفاد من هذا الاختبار في دراسة تجانس المجتمعات قبل تطبيق العلاقة الخاصة (a 12-4) السابقة.

مثال: يقول أحدهم أن تباين درجات الطلاب في مقرر الإحصاء يساوي 256. وللتحقق من ذلك سحبنا عينة من هؤلاء الطلاب بحجم $n = 28$، فوجدنا أن تباينها يساوي $s^2 = 236$. اختبر صحة القول السابق بمستوى دلالة قدره 0.10.

الحل:

نضع الفرضيتين العدمية والبديلة كما يلي:

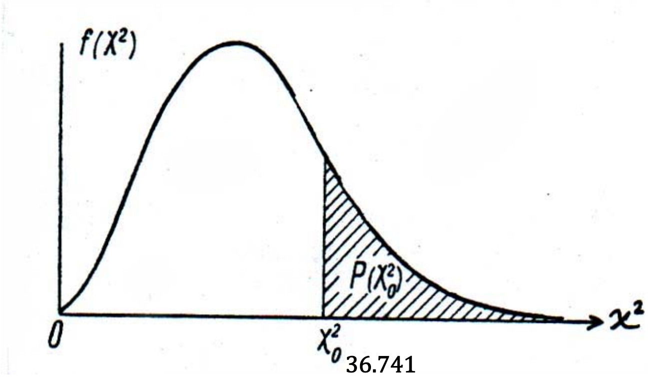
$$H_0 : \sigma^2 = 256 = \sigma_0^2$$
$$H_1 : \sigma^2 > 256$$

ثم نحسب قيمة مؤشر الاختبار فنجد أن:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)\, s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(28-1) \cdot 236}{256} = 24.89$$

ومن جداول χ^2 نجد أن قيمة χ_0^2 المقابلة لمستوى الدلالة 0.10 بكامله ولـ (28-1) درجة حرية تساوي $\chi_{0.10}^2 = 36.741$.

وبمقارنة قيمة χ^2 المحسوبة مع χ_0^2 الحرجة، نجد أن القيمة χ^2 المحسوبة أصغر من القيمة الحرجة χ_0^2، لذلك نقبل الفرضية العدمية القائلة بأن تباين المجتمع المفروض يساوي 256. والشكل الآتي يوضح ذلك.



اختبارات حول التوزيع التكراري (اختبار χ^2):

قد نتعرض أحياناً إلى اختبار فرضية حول التكرارات المطلقة أو النسبية المقابلة لقيم متحول عشوائي معين. فيكون لدينا تكرارات مفترضة (أو متوقعة)، وأخرى فعلية محسوبة من العينة التجريبية، ونريد أن نتأكد من صحة التكرارات المفترضة بواسطة مقارنتها مع التكرارات الفعلية المحسوبة من العينة. لذلك نرمز لكل من هذه التكرارات بالرموز التالية (علماً بأن لهما نفس المجموع أو الحجم n):

قيم المتغير X	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_i	...	x_k	$\sum$
التكرارات المفترضة	m_1	m_2	m_3	m_4	...	m_i	...	m_k	n
التكرارات الفعلية	n_1	n_2	n_3	n_4	...	n_i	...	n_k	n

ونضع الفرضيتين العدمية والبديلة على الشكل التالي:

H_0- لا يوجد اختلاف جوهري بين التكرارات المطلقة المفترضة والتكرارات المطلقة الفعلية.

H_1- يوجد اختلاف جوهري بين التكرارات المطلقة المفترضة والفعلية وهو أكبر مما يتوقع لذلك فإن الاختبار يكون أحاديا ومن جهة اليمين .

ثم نقوم بحساب مؤشر الاختبار (χ^2) الذي يعطى بواسطة العلاقة التالية:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - m_i)^2}{m_i}$$

وهو متغير يخضع للتوزيع الاحتمالي لـ χ^2 ذي (k-1) درجة حرية، علماً بأن k هو عدد القيم الأساسية المرتبة في الجدول. لذلك نقوم بمقارنة قيمة χ^2 المحسوبة من العلاقة السابقة مع قيمة χ_0^2 الحرجة المأخوذة

من الجدول والمقابلة لكامل مستوى الدلالة المحدد α، ولـ (k-1) درجة حرية. فإذا كانت χ^2 أصغر من χ_0^2 نقبل الفرضية H_0، والعكس بالعكس.

مثال:

اختبر بمستوى دلالة 0.05 فيما إذا كانت هناك فروقات جوهرية بين التكرارات المطلقة لإجابات 36 طالباً حول أحد البرامج التعليمية والتي كانت كما يلي:

الإجابة	موافق	لا أدري	معارض	المجموع
التكرارات n_i	13	7	16	36

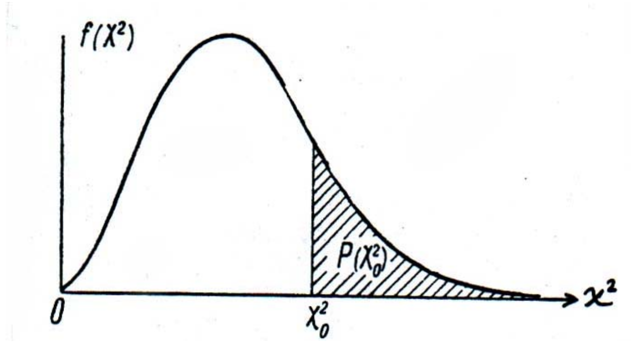
لإجراء الاختبار المطلوب نضع فرضية العدم على الشكل التالي:

H_0- عدم وجود فروقات بين التكرارات النسبية الإجابات المختلفة. أي أن التكرارات المطلقة للإجابات تتوزع بشكل متساو على الإجابات وإن وكل منها يساوي $\frac{36}{3} = 12$، ولإجراء الحسابات اللازمة نضع كل ذلك في جدول كالتالي:

الإجابة	موافق	لا أدري	معارض	المجموع
االتكرارات الفعلية n_i	13	7	16	36
التكرارات المتوقعة m_i	12	12	12	36
$(n_i - m_i)^2$	1	25	16	-
$\frac{(n_i - m_i)^2}{m_i}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{25}{12}$	$\frac{16}{12}$	$\chi^2 = \frac{52}{12} = 4.33$

ومن الجدول نجد أن قيمة χ^2 المحسوبة تساوي $\chi^2 = 4.33$.

من جدول التوزيع χ^2 نجد أن القيمة الحرجة χ_0^2 المقابلة لمستوى دلالة 0.05 ولـ(3-1) درجة حرية تساوي $\chi_0^2 = 5.99$.



وبمقارنة قيمة χ^2 المحسوبة مع χ_0^2 الحرجة، نجد أن χ^2 أصغر من χ_0^2 الحرجة. لذلك نقبل الفرضية H_0 القائلة بعدم وجود فروقات جوهرية بين تكرارات إجابات المبحوثين، ونرفض الفرضية البديلة القائلة بوجود فروقات بين تلك التكرارات.

اختبار استقلال المتحولات أو ارتباطها بواسطة χ^2:

يوجد تطبيقات أخرى كثيرة لاختبار χ^2 على الجداول المزدوجة التي تتضمن متحولين ولكل منهما عدة حالات متميزة، وذلك من أجل دراسة وجود علاقة ارتباطية بين هذين المتحولين. ولنأخذ مثالاً على ذلك الجدول التالي الذي يبين تكرارات إجابات 70 طالباً حسب نوع الإجابة والجنس وذلك حول أحد البرامج أو الأسئلة المطروحة للبحث والتي كانت كما يلي :

الجنس / نوع الإجابة	الذكور	الإناث	المجموع
موافق	15	5	20
لا أدري	6	10	16
معارض	14	7	21
معارض جداً	5	8	13
المجموع	40	30	70

لإجراء اختبار حول وجود علاقة بين نوع الإجابة والجنس نضع الفرضيات كما يلي:

H_0- عدم وجود علاقة بين نوع الإجابة والجنس (فرضية العدم) وهذا يعني أن تكرارات الإجابات يجب أن تتوزع حسب نسبة كل من الجنسين في العينة، أي بنسبة $\frac{40}{70}$ للذكور و $\frac{30}{70}$ للإناث. وبالتالي فإن التكرارات المتوقعة تحسب من العلاقة التالية: (بشرط أن تبقى المجاميع الهامشية نفسها) .

تـم = مجموع إجابات كل نوع × النسبة المقابلة للجنس المطلوب

$$m_{ij} = n_i \cdot \frac{n_j}{n}$$

وبتطبيق ذلك نحصل على التكرارات المتوقعة المبينة في الجدول التالي:

الجنس / الإجابة	الذكور	الإناث	المجموع
موافق	$11.43 = \frac{40 \times 20}{70}$	$8.57 = \frac{30 \times 20}{70}$	20
لا أدري	$9.14 = \frac{40 \times 16}{70}$	$6.86 = \frac{30 \times 16}{70}$	16
معارض	$12 = \frac{40 \times 21}{70}$	$9 = \frac{30 \times 21}{70}$	21
معارض جداً	$7.43 = \frac{40 \times 13}{70}$	$5.57 = \frac{30 \times 13}{70}$	30
المجموع	40	30	70

ثم نقوم بحساب قيمة مؤشر الاختبار χ^2 من العلاقة:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{\ell} \frac{(n_{ij} - m_{ij})^2}{m_{ij}}$$

ولحساب قيمة χ^2 نعد الجدول الحسابي التالي:

جدول مساعد لحساب قيمة χ^2

الحسابات / الجنس j		التكرارات الفعلية n_{ij}	التكرارات المتوقعة m_{ij}	$(n_{ij} - m_{ij})^2$	$\frac{(n_{ij} - m_{ij})^2}{m_{ij}}$
1	الذكور	15	11.43	12.75	1.12
		6	9.14	9.86	1.08
		14	12	4	0.33
		5	7.43	5.9	0.79
2	الإناث	5	8.57	12.75	1.49
		10	6.86	9.86	1.44
		7	9	4	0.44
		8	5.57	5.9	1.06
المجموع		70	70	-	$\chi^2 = 7.75$

ومن هذا الجدول نجد أن قيمة مؤشر الاختبار $\chi^2 = 7.75$.

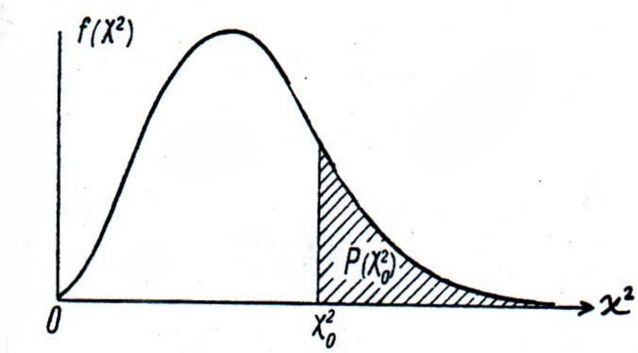
ولإجراء الاختبار اللازم نبحث في جدول التوزيع χ^2 عن قيمة χ_0^2 الحرجة والمقابلة لمستوى دلالة 0.05 ولدرجة حرية تساوي :

$$V = (k-1)\ (\ell-1) = (4-1)\ (2-1) = 3$$

فنجد أن قيمة χ_0^2 الحرجة تساوي $\chi_0^2 = 7.81$.

وبمقارنة قيمة χ^2 المحسوبة مع χ_0^2 الحرجة، نجد قيمة χ^2 المحسوبة أصغر من χ_0^2 الحرجة.

لذلك نقبل فرضية العدم H_0 والقائلة بعدم وجود علاقة بين نوعية الإجابات والجنس



ملاحظة هامة :

يشترط عند تطبيق اختبار x^2 ما يلي:

1- أن تكون العينة مسحوبة عشوائيا وان تكون لا يقل مجموع التكرارات عن 50. (أي أن لا يقل حجم العينة عن 50).

2- أن تكون فرضية العدم تدل على استقلال حالات المتحول الذي في العمود عن حالات المتحول الذي في السطر .

3- أن تكون المشاهدات قابلة للتبويب بين حالات المتحولين والمدروسين .

4- أن لا يقل التكرار المتوقع في أي خلية عن 5 . وإذا حصل ذلك في أحد الخلايا علينا أن نقوم بدمج عمود أو سطر تلك الخلية مع أحد العمودين أو السطرين المجاورين له.

اختبارات الأزواج المتقابلة :

قبل اعتماد أي دواء يقوم الباحثون بتجربة ودراسة تأثيره على مجموعة من المرضى المتطوعين ويسجلون أحوال هذه المجموعة قبل إجراء التجربة وأحوالها بعد إجراء التجربة وبذلك يكون لدينا الحالتان الآتيتان:

حالة عناصر المجموعة قبل إجراء التجربة (المعلومات القبلية) ونرمز لها بـ X

حالة عناصر المجموعة بعد إجراء التجربة (المعلومات البعدية) ونرمز لها بـ Y

وهذا يعني إننا سنحصل من كل عنصر من عناصر المجموعة المذكورة على عددين متقابلين ، أي سنحصل على أزواج متقابلة من المعلومات نرمز لها بـ x_i , y_i ونضعها في جدول كالتالي :

رقم العنصر	1	2	3	4	5	....	i	....	A	$\sum$
القيم القبلية x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	....	x_i	....	x_n	
القيم البعدية Y_i	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	....	y_i	....	y_n	
الفروقات $D_i=x_i-y_i$	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	....	D_i	....	D_n	$\sum D_i$
D_i^2	D_1^2	D_2^2	D_3^2	D_4^2	D_5^2	....	D_i^2	....	D_n^2	$\sum D_i^2$

ولدراسة تأثير تطبيق الدواء المذكور على عناصر المجموعة المذكورة نقوم بحساب الفروقات للأزواج المتقابلة ونرمز لها بـ D_i .

$$D_i = x_i - y_i$$

ثم نقوم بحساب المتوسط الجبري لهذه الفروقات من العلاقة :

$$\bar{D} = \frac{\sum D_i}{n}$$

ثم نقوم بحساب تباين هذه الفروقات من العلاقة :

$$S_D^2 = \frac{\sum_{2=1}^{n}(D_I - \bar{D})^2}{n-1} = \frac{1}{n-1}\left[\sum D_I^2 - n(\bar{D})^2\right]$$

ثم نقوم بحساب الانحراف المعياري لها :

$$S_D = \sqrt{D_D^2}$$

وبما أن الفروقات D_i تشكل عينة عشوائية من المعلومات الإحصائية متوسطها $\bar{D}$ وتباينها S_D^2 . فإنه يمكننا أن نفترض أنها تخضع للتوزيع الطبيعي العام $N(\bar{D}, S_D^2)$ الذي متوسطه $\bar{D}$ وتباينه S_D^2.

ولاختبار مدى تأثير الدواء المذكور على عناصر المجموعة المذكورة تضع الفرضيتين كما يلي :

فرضية العدم : لا يوجد تأثير للدواء على عناصر المجموعة ، أي أن قيمة مجموع الفروقات D_i معدوم وإن متوسطها يساوي الصفر ونكتب ذلك كما يلي :

$$H_0 : \bar{D} = 0$$

الفرضية البديلة : يوجد تأثير للدواء على عناصر المجموعة وأن متوسط الفروقات أكبر من الصفر (أو أصغر من الصفر) ونكتب ذلك كما يلي :

$$H_, : \bar{D} > 0$$

ثم نقوم بحساب قيمة مؤشر الاختبار t من العلاقة :

$$t = \frac{\bar{D} - 0}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}}$$

وهو متحول يخضع لتوزيع ستودينت (إذا كانت n<30) ذي (n-1) درجة حرية ′ ولكنه يخضع للتوزيع الطبيعي المعياري N(0.1) إذا كانت n≥30 . وبعدها نقارن قيمة t المحسوبة مع القيمة t_0 الحرجة والمقابلة لـ (n -1) درجة حرية ولمستوى الدلالة α ونتخذ القرار المناسب كما يلي :

- إذا كانت $t > t_0$ فإننا نرفض فرضية العدم H_0 ونقبل الفرضية التي تقول أنه يوجد تأثير للدواء على عناصر المجموعة .
- أما إذا كانت $t < t_0$ فإننا نقبل فرضية العدم ونعترف بعدم تأثير الدواء على عناصر المجموعة ونقرر عدم اعتماد ذلك الدواء .

ملاحظة : إذا كانت الفرضية البديلة من الشكل $H_, : \bar{D} < 0$ فإننا سنحصل على قيمة سالبة لـ t لذلك نقارنها مع $(-t_0)$ فإذا كانت $t<(-t_0)$ فإننا نرفض فرضية العدم H_0 والعكس بالعكس .

ملاحظة : إذا كان حجم العينة n>30 فإننا نستبدل مؤشر الاختبار السابق t بمؤشر الاختبار Z/*المعرف* بالعلاقة :

$$Z = \frac{T - \frac{n(n+1)}{y}}{\sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{2y}}}$$

وهو يسمى باختيار (ويلكوكسن wilcoxon) للإزدواج المتقابلة لعينة عشوائية بحجم n .

وحيث أن T أصغر المجموعين التاليين :

1- مجموع القيم المطلقة للرتب السالبة للفروقات غير المعدومة T^- .
2- مجموع القيم للرتب الموجبة للفروقات غير المعدومة T^+ .

أي أن :

$$T = Min[T^- , T^+]$$

ولتطبيق هذا الاختيار يجب أن نقوم بالإجراءات التالية :

1- حساب الفروقات بين القيم المتقابلة $D_i = x_i - y_i$.
2- ترتيب الفروقات بالقيمة المطلقة : أي ترتيب المقادير $|x_i - y_i|$ ترتيبا تصاعديا .
3- وضع إشارة سالب أمام رقم الترتيب إذا كان الفرق $(x_i - y_i)$ سالباً . وإشارة موجب أمام رقم الترتيب إذا كان الفرق $(x_i - y_i)$ موجباً .
4- تقوم بحساب مجموع القيم المطلقة للرتب السالبة للفروقات غير المعدومة T^- .
5- تقوم بحساب مجموع القيم العادية للرتب الموجب للفروقات غير المعدومة T' .
6- نحدد أي المجموعين أصغر T^- أم T^+ ونجعله مساوياً للعدد T .
7- نعوض في العلاقة (4- 27) فنحصل على قيمة Z المحسوبة .
8- نقارن قيمة Z المحسوبة مع قيمة Z_0 الحرجة المأخوذة من جدول تابع التوزيع الطبيعي المعياري . فإذا كانت قيمة $Z < Z_0$ تقبل فرضية العدم H_0 التي تقول أن متوسط الفروقات معدوم . والعكس بالعكس .

مثال: لدراسة تأثير أحد الأدوية على مقدار ضغط الدم لدى المصابين به قررنا إجراء تجربة فعلية على /8/ من المرضى وسجلنا مقادير ضغط الدم لديهم قبل التجربة وبعدها فكانت النتائج كما يلي:

رقم المريض	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
قيم الضغط قبل التجربة x_i	170	175	180	175	160	170	175	180	X
قيم الضغط بعد التجربة y_i	150	160	170	160	170	160	170	185	X

والمطلوب : اختبار مدى تأثير هذا الدواء على ضغط الدم لدى عناصر المجموعة .

يجب أن نقوم أولاً بحساب الفروقات المتقابلة من العلاقة $D_i = X_i - y_i$

ثم نقوم بحساب متوسطها الجبري $\overline{D}$ من العلاقة:

$$\overline{D} = \frac{\sum D_i}{n}$$

ثم نقوم بحساب تباينها المصحح S_D^2 من العلاقة:

$$S_D^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum D_i^2 - n(\bar{D})^2\right] = \frac{1}{n-1}\sum(D_i - \bar{D})^2$$

ثم نضع الفرضين كما يلي :

$H_0 : \bar{D} = 0$ $H_, : \bar{D} > 0$

جدول مساعد لإجراء الحسابات :

i	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
الفروقات المتقابلة $D_i = X_i - y_i$	20	15	10	15	-10	10	5	-5	+60
D_i^2	400	225	100	225	100	100	25	25	1200

وبذلك نجد أن متوسط الفروقات :

$$\bar{D} = \frac{\sum D_i}{n} = \frac{60}{8} = 7.5$$

ولحساب التباين S_D^2 نطبق العلاقة :

$$S_S^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum D_i^2 - n(\bar{D})^2\right] = \frac{1}{7}[1200 - 8.(7.5)^2] = 107.14$$

وبذلك نجد أن :

$$S_D = \sqrt{107.14} = 10.35$$

ثم نقوم بحساب قيمة مؤشر الاختبار من العلاقة :

$$t = \frac{\bar{D} - 0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \frac{7.5}{\frac{10.35}{\sqrt{8}}} = 2.05$$

ثم نقارن هذه القيمة t مع قيمة t_0 الحرجة عندما $\alpha = 0.05$ وعندما n-1 =7 درجة حرية والتي تساوي 1.895 . فنجد أن $t > t_0$ ، لذلك نرفض فرضية العدم وتقبل الفرضية البديلة التي تقول أن الدواء يؤثر على مقدار ضغط الدم ويؤدي إلى انخفاضه.

اختبار حول تساوي تبايني مجتمعين طبيعيين :

لقد أشرنا سابقاً أن بعض حالات المقارنة بين متوسطي مجتمعين تقتضي أن يكون المجتمعان متجانسين وأن يكون تبايناهما متساويان أي أن يكون $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$. وحتى نتأكد من توفر هذه الخاصة في المجتمعين علينا أن نقوم بإجراء اختبار لتساوي تباينهما ونضع الفرضيتين كما يلي :

فرضية العدم $H_o : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

الفرضية البديلة $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

ولاختبار فرضية العدم نقوم بسحب عينتين عشوائيتين من هذين المجتمعين بحجم n_1 للعينة الأولى و n_2 للعينة الثانية , ولنفترض أن تباين العينة الأولى كان S_1^2 وتباين العينة الثانية كان S_2^2 (ونظراً لضرورات استخدام الجداول الإحصائية يجب أن نضع التباين الأكبر تحت اسم S_1^2 والأصغر تحت اسم S_2^2 وإذا كان ذلك غير متوفر نغير ترقيم المجتمعين والعينتين والحجمين والتباينين) ثم نقوم بحساب قيمة مؤشر الاختبار المناسب لهذه الحالة وهو المؤشر F التالي :

$$F = \frac{\dfrac{(n_1 - 1)\, S_1^2}{\sigma_1^2\, (n_1 - 1)}}{\dfrac{(n_2 - 1)\, S_2^2}{\sigma_2^2\, (n_2 - 1)}}$$

وبما أن فرضية العدم تنص على أن: $\sigma_2^2 \sigma_1^2 =$ فإن صيغة هذا المؤشر تأخذ الشكل البسيط التالي :

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \qquad \text{(28-4)}$$

(حيث أن : $S_1^2 > S_2^2$)

وهو يخضع لتوزيع فيشر F ذي $(n_1 - 1)$ درجة حرية للتباين الأكبر S_1^2 و $(n_2 - 1)$ درجة حرية للتباين الأصغر S_2^2.

ثم نقوم بمقارنة قيمة F المحسوبة من العلاقة (1) مع قيمة $F\alpha$ الحرجة المقابلة لدرجتي الحرية $(n_1 - 1)$ و $(n_2 - 1)$ ولمستوى الدلالة المحدد مثلاً بـ (α =0.05) ونقرر قبول أو رفض فرضية العدم كما يلي :

- إذا كانت قيمة $F < F_\alpha$ نقبل فرضية العدم H_o التي تنص على تجانس المجتمعين وتساوي التباينين .

- إذا كانت قيمة $F > F_\alpha$ نرفض فرضية العدم H_o ونقبل الفرضية البديلة التي تنص على عدم تجانس المجتمعين وعدم تساوي التباينين .

مثال : لاختبار تجانس تباين الوزن لدى طلاب الجامعة رأينا أن نقسم المجتمع إلى مجتمعين :

1) مجتمع الذكور 2) مجتمع الإناث . وأن نضع الفرضيتين كما يلي :

$$H_o \;:\; \sigma_1^2 \;=\; \sigma_2^2$$

$$H_1 \;:\; \sigma_1^2 \;>\; \sigma_2^2$$

ولنفترض أننا سحبنا عينتين عشوائيتين : من الذكور بحجم $n_1 = 25$ ومن الإناث بحجم $n_2 = 20$ فوجدنا أن تباينيهما المصححين $S_1^2 = 64$ و $S_2^2 = 25$.

ولإجراء الاختبار نحسب قيمة مؤشر الاختبار F فنجد أن :

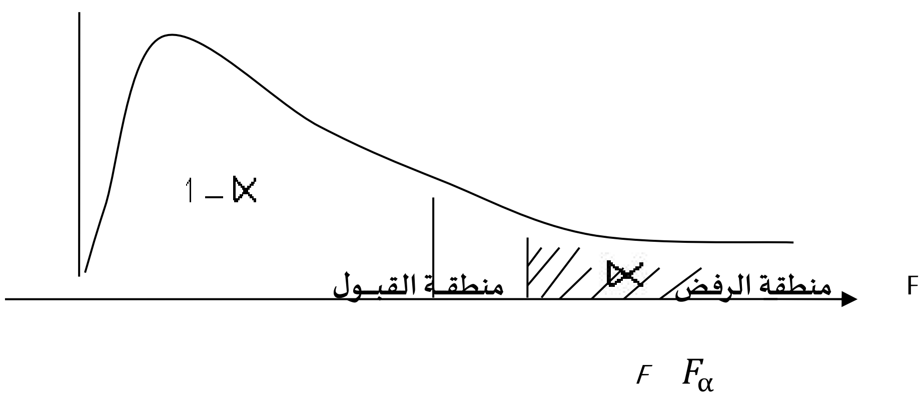
$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{64}{25} = 2.56$$

ولإجراء المقارنة نبحث في جدول التوزيع F عن قيمة F الحرجة المقابلة لدرجتي الحرية $n_1 - 1 = 24$ و $n_2 - 1 = 19$ ولمستوى الدلالة $\alpha = 0.05$ فنجد أن :

$$F_\alpha = 2.11$$

وبذلك نجد أن قيمة F المحسوبة (2.56) أكبر من قيمة F_α الحرجة (2.11) . ولهذا فإننا نرفض فرضية العدم H_o ونقبل الفرضية البديلة التي تقول أن تباين الأوزان لدى الطلاب الذكور أكبر من تباين الأوزان لدى الطالبات الإناث .

والشكل البياني التالي يوضح ذلك :



تحليل التباين أحادي الاتجاه ANOVA one way :

وهو عبارة عن تعميم لفكرة اختبار الفرق بين متوسطي مجتمعين طبيعيين حيث يتناول هذا التحليل دراسة واختبار الفرضيات حول وجود أو عدم وجود فروقات بين متوسطات أحد المتحولات في عدة مجتمعات (ثلاثة مجتمعات فأكثر) . لذلك نرمز لعدد هذه المجتمعات بالرمز k ($k \geq 3$) ونضع الفرضيتين كما يلي :

فرضية العدم (جميع المتوسطات متساوية) ونكتبها كما يلي :

$$H_o : \overline{y_1} = \overline{y_2} = \overline{y_3} = \overline{y_4} \ldots \ldots \ldots \ldots = \overline{y_k}$$

الفرضية البديلة (يوجد فرق بين متوسطي مجتمعين على الأقل) ونكتبه كما يلي :

$$H_1 : \overline{y_i} \neq \overline{y_j}$$

من أجل $i \neq j$.

وحيث أن : $i , j : 1 , 2 , 3 \ldots\ldots\ldots k$.

ولإجراء هذا الاختبار نقوم بالإجراءات التالية :

1- نسحب عينة عشوائية من كل مجتمع من المجتمعات المذكورة بحجوم مختلفة أو متساوية ونرمز لها على الترتيب بالرموز $n_1 , n_2 , n_3 , n_4 \ldots\ldots\ldots n_k$ ونرمز لمجموعها بالرمز n (أي أن $\sum n_j = n$) .

2- نحسب متوسطات المتحول المدروس في هذه العينات ونرمز لها على الترتيب بالرموز

$$\overline{x_1} , \quad \overline{x_2} , \quad \overline{x_3} , \quad \overline{x_4} \quad \ldots \ldots \ldots \quad \overline{x_k}$$

3- نحسب المتوسط العام لقيم المتحول المدروس في جميع هذه المجتمعات وذلك من خلال حساب متوسط المتوسطات في العينات وذلك بتطبيق العلاقة :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j \ \overline{x_j}}{n}$$

(حيث أن $n = \sum n_i$)

4- نحسب التباينات ضمن أو داخل كل عينة على حدة ولنفترض أنها كانت تساوي على الترتيب ما يلي :

$$S_1^2 , \quad S_2^2 , \quad S_3^2 , \quad S_4^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad S_k^2$$

5- نحسب متوسط التباينات الداخلية فنحصل على ما يسمى تباين الأخطاء ويحسب من العلاقة :

$$SE^2 = \frac{\sum_{j=1}^{k} n_j \ S_j^2}{n}$$

6- ثم نحسب التباين بين العينات وذلك بأخذ متوسط مربعات انحرافات المتوسطات العينية $\overline{x_J}$ عن المتوسط العام $\bar{x}$ ونرمز له بالرمز SB^2 ويحسب من العلاقة :

$$SB^2 = \frac{\sum n_i \ \left(\overline{x_J} - \bar{x}\right)^2}{n}$$

7- نحسب التباين العام لجميع القياسات في جميع العينات والذي يساوي متوسط مربعات انحرافات تلك القياسات عن المتوسط العام $\bar{x}$ ونرمز له بالرمز ST^2 ونحسبه من العلاقة :

$$ST^2 = \frac{\sum\sum\left(x_{ij} - \bar{x}\right)^2}{n}$$

8- ومن خواص هذه التباينات أنها مرتبطة ببعضها البعض وأن التباين العام ST^2 يساوي مجموع التباينين SE^2 و SB^2 أي أن :

$$ST^2 = SE^2 + SB^2$$

9- يمكننا مما سبق أن نختصر بعض الفقرات في حساب هذه التباينات . لذلك نقتصر على حساب مجاميع المربعات التالية :

a. المجموع العام لمربعات الانحرافات عن المتوسط العام $\bar{x}$ ونرمز له بـ SST وهو يساوي :

$$SST = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left(x_{ij} - \bar{x}\right)^2$$

ويكون له $(n-1)$ درجة حرية .

b. مجموع مربعات الانحرافات داخل العينات ولجميع العينات ونسميه مجموع الأخطاء ونرمز له بـ SSE ويحسب من العلاقة :

$$SSE = \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n_j}\left(x_{ij} - \overline{x_J}\right)^2$$

ويكون له $(n-k)$ درجة حرية .

c. مجموع مربعات الانحرافات بين العينات (مربعات انحرافات متوسطات العينات عن المتوسط العام) ونرمز له بـ SSB ويحسب من العلاقة :

$$SSB = \sum_{j=1}^{k} n_i \left(\overline{x_j} - \bar{x}\right)^2$$

ويكون له $(k-1)$ درجة حرية .

وهكذا نجد أنه يمكن البرهان على أن هذه المجاميع ترتبط مع بعضها البعض ونكتب ذلك على الشكل التالي :

$$SST = SSE + SSB$$

10- نقوم بحساب قيمة مؤشر الاختبار F المعرف بالعلاقة :

$$F = \frac{\frac{SSB}{k-1}}{\frac{SSE}{n-k}} = \frac{MSSB}{MSSE}$$

وإن المؤشر F يمثل متحولاً عشوائياً ويخضع للتوزيع الاحتمالي F (توزيع فيشر) وذي $(k-1)$ درجة حرية للبسط و $(n-k)$ درجة حرية للمقام .

11- حتى نتخذ القرار المناسب حول الفرضية H_0 نقوم بمقارنة قيمة F المحسوبة من العلاقة (4-40) مع قيمة F_α الحرجة المقابلة لدرجتي الحرية $(k-1)$ للبسط و $(n-k)$ للمقام وعند مستوى دلالة α (مثلاً $\alpha = 0.05$) ونتخذ القرار حسب الحال :

إذا كانت $F < F_\alpha$ فإننا نقبل فرضية العدم H_0 ونقول أن جميع متوسطات المجتمعات متساوية أي أن $\overline{y_1} = \overline{y_2} = \overline{y_3} = \cdots \ldots \ldots = \overline{y_k}$.

أما إذا كانت $F > F_\alpha$ فإننا نرفض فرضية العدم H_0 ونقبل الفرضية البديلة H_1 التي تقول أن متوسطات أو بعض متوسطات هذه المجتمعات غير متساوية (اثنين منها على الأقل).

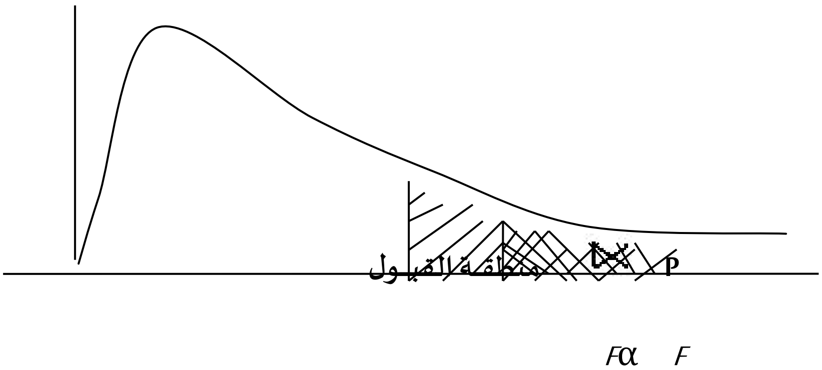
12- وأخيراً نضع هذه النتائج في جدول خاص يسمى جدول تحليل التباين ANOVA ويأخذ الشكل التالي :

مصدر التباين	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسط المربعات	قيمة F المحسوبة	قيمة Fα الحرجة	قيمة احتمال الدلالة P
من ما بين العينات	SSB	k – 1	$MSSB = \frac{SSB}{k-1}$	$F = \frac{MSSB}{MSSE}$	$F_{\alpha,\ \frac{k-1}{n-k}}$	

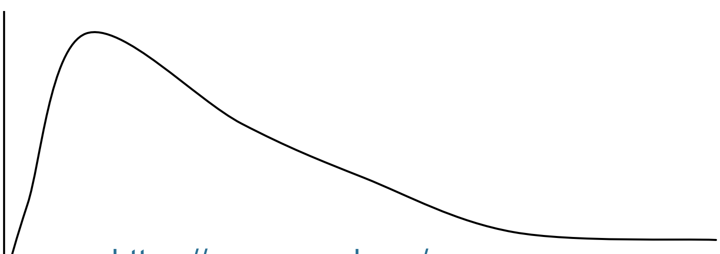
والمجتمعات						
من داخل العينات	SSE	**n – k**	$MSSE = \dfrac{SSE}{n-k}$			
التباين الكلي	SST	**n – 1**	**–**			

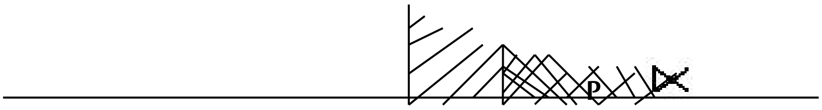
ملاحظة 1 :

إن قيمة احتمال الدلالة P هي قيمة الاحتمال الذي يتبقى على يسار القيمة المحسوبة F ويتم حسابه آلياً اعتماداً على التكامل . ويمكننا الاعتماد عليه في اتخاذ القرار حول قبول أو رفض فرضية العدم H_0 . فإذا كانت قيمة هذا الاحتمال أصغر من مستوى الدلالة α فإن هذا يعني أن قيمة F المحسوبة المقابلة لـ P أكبر من قيمة $F\alpha$ الحرجة المقابلة لـ α وعندها نرفض الفرضية H_0 والشكل التالي يوضح ذلك :



أما إذا كانت قيمة P أكبر من مستوى الدلالة α فإن هذا يعني أن قيمة F المحسوبة والمقابلة لـ P تكون أصغر من القيمة الحرجة $F\alpha$ المقابلة لـ α وعندها نقبل فرضية العدم H_0 والشكل التالي يوضح ذلك :





$F \quad F\alpha$

ملاحظة 2 :

إذا كانت نتيجة الاختبار رفض فرضية العدم H_o لعدم تساوي بعض المتوسطات فإنه لا بد لنا من أن نتعرف أو نحدد مصادر عدم التساوي , لذلك نقوم بإجراء مقارنات ثنائية بين كل متوسطين من مجتمعين مختلفين ونطبق أحد الاختبارين التاليين :

a. **اختباربونفيروني Bonferrone Test** الذي يعتمد على المؤشر التالي :

$$t = \frac{(x_i - \overline{x_j}) - 0}{MSSE \sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}}}$$

$i \neq j \ , \ i , j = 1 , 2 , 3 \ldots\ldots\ldots k$

حيث يتم حساب المقدار Se من العلاقة :

$$Se = \sqrt{\frac{(n_i - 1)\, S_i^2 + (n_j - 1)\, S_j^2}{n_i + n_j - 2}}$$

علماً بأن القيمة الحرجة لـ Z أو لـ t تقابل مستوى دلالة يساوي $\frac{\alpha}{m}$ حيث أن m هو عدد المقارنات الممكنة ويساوي $c_k^2 \ = m$.

b. **اختبارشفييه Schefees Test** الذي يعتمد على المؤشر التالي :

$$t^2 = \frac{(\overline{x_\iota} - \overline{x_j})^2}{MSSE \left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$$

ويتم مقارنة القيمة t^2 مع القيمة الحرجة $F\alpha$ مضروبة بـ $(k-1)$.

مثال: لدراسة متوسط عدد أفراد الأسرة في 3 ثلاث قرى (مجتمعات) سحبنا عينة عشوائية من الأسرة من كل قرية بحجم $n_1 = 4$, $n_2 = 6$, $n_3 = 3$ فكانت النتائج كما يلي :

المجتمع	حجم العينة	عدد أفراد الأسرة حسب نتائج الدراسة	متوسط العينة
القرية الأولى $j = 1$	4	10 7 6 9	8
القرية الثانية $j = 2$	6	7 8 6 6 54	6
القرية الثالثة $j = 3$	5	5 3 4 7 6	5

والمطلوب اختبار فرضية تساوي متوسط عدد أفراد الأسرة في هذه القرى :

$$H_0 : \overline{y_1} = \overline{y_2} = \overline{y_3}$$

مقابل الفرضية

$$H_1 : \overline{y_i} \neq \overline{y_j}$$

الحل : نجد أن المتوسط العام $\bar{x}$ يساوي :

$$\bar{x} = \frac{\sum n_j \cdot \bar{x}_j}{\sum n_j} = \frac{4.8 + 6.6 + 5.5}{4 + 6 + 5} = \frac{93}{15} = 6.2$$

وبعد ذلك نقوم بحساب المجاميع التالية :

$$\text{SST} = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{n_i} \left(x_{ij} - \bar{x}\right)^2 = (10 - 6.2)^2 + (7 - 6.2)^2 + (6 - 6.2)^2 + (9 - 6.2)^2 + (7 - 6.2)^2 + (8 - 6.2)^2 + (6 - 6.2)^2 + (6 - 6.2)^2 + (5 - 6.2)^2 + (4 - 6.2)^2 + (5 - 6.2)^2 + (3 - 6.2)^2 + (4 - 6.2)^2 + (7 - 6.2)^2 + (6 - 6.2)^2 = 50.4$$

$$\text{SSE} = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{n_j} \left(x_{ij} - \bar{x}_j\right)^2 = (10 - 8)^2 + (7 - 8)^2 + (6 - 8)^2 + (9 - 8)^2 + (7 - 6)^2 + (8 - 6)^2 + (6 - 6)^2 + (6 - 6)^2 + (5 - 6)^2 + (4 - 6)^2 + (5 - 5)^2 + (3 - 5)^2 + (4 - 5)^2 + (7 - 5)^2 + (6 - 5)^2 = 30$$

$$SSB = \sum_{j=1}^{3} n_j \left(\bar{x}_j - \bar{x}\right)^2 = 4\,(8-6.2)^2 + 6\,(6-6.2)^2 + 5\,(5-6.2)^2$$

$$SSB = 20.4$$

وبناءً على الحسابات السابقة نعد جدول تحليل التباين التالي :

مصدر التباين	مجموع المربعات	درجات الحرية	متوسط المربعات	قيمة F المحسوبة	قيمة Fα الحرجة المقابلة لـ 0.05	قيمة P
من ما بين العينات SSB	SSB = 20.4	k – 1 = 2	$MSSB = \frac{20.4}{2} = 10.2$	$F = \frac{MSSB}{MSSE}$ $F = 4.08$	3.89	0.0498
داخل العينات SSE	SSE = 30	n – k = 12	$MSSE = \frac{30}{12} = 2.5$			
الكلي SST	SST = 50.4	n – 1 = 14	–			

وبمقارنة قيمة F المحسوبة (4.08) مع قيمة F الحرجة المقابلة لدرجتي حرية (2 , 12) ولمستوى الدلالة (α = 0.05) والتي تساوي 3.89 نجد أن $F > F_\alpha$ لذلك نرفض فرضية العدم H_0 التي تقول أن متوسطات عدد أفراد الأسرة في هذه القرية متساوية .

وهنا نلاحظ أيضاً أن قيمة احتمال الدلالة P = 0.0498 أصغر من قيمة مستوى الدلالة 0.05 لذلك نرفض فرضية العدم H_0 .

ولتحديد مصدر عدم تساوي هذه المتوسطات نقوم بمقارنة كل زوج فيها وذلك بتطبيق اختبار شفييه فنجد أن :

$$F_{1,2} = \frac{(\overline{x_1} - \overline{x_2})^2}{MSSE\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} = \frac{(8-6)^2}{2.5\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)} = 3.84$$

$$F_{1,3} = \frac{(\overline{x_1} - \overline{x_3})^2}{MSSE\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_3}\right)} = \frac{(8-5)^2}{2.5\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)} = 8$$

$$F_{2,3} = \frac{(\overline{x_2} - \overline{x_3})^2}{MSSE\left(\frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3}\right)} = \frac{(6-5)^2}{2.5\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{5}\right)} = 1.091$$

ثم نقوم بمقارنة هذه النتائج مع القيمة الحرجة F_α المقابلة لـ (k - 1) و (n - k) درجتي حرية ومضروبة بالعدد (k - 1) والتي تساوي :

$$(k-1) \,.\, F\alpha = 2\,(3.89) = 7.78$$

وبالمقارنة نجد أن مصدر الاختلاف (عدم التساوي) بين المتوسطات ناجم عن المجتمعين الأول والثالث . أي أن متوسط عدد أفراد الأسرة بين القريتين الأولى والثالثة هو مصدر الاختلاف وهو الذي أدى إلى رفض فرضية العدم H_o .

تمرينات

1- سحبنا عينة بحجم n = 100 عنصراً من مجتمع طبيعي فوجدنا أن متوسطها $\overline{x} = 2.7$ وأن $s^2 = 23$. اختبر الفرضية $H_0 : \mu = 3$ بمستوى دلالة $\alpha = 0.10$.

2- ادعى أحد المرشحين أن 80 % من السكان سينتخبونه. ولكن عينة من 500 شخصاً بينت أن 300 شخصاً يؤيدون ذلك المرشح. اختبر ادعاء المرشح باحتمال قدره 0.95.

3- بينت إحدى الدراسات في العام الماضي أن متوسط دخل الطبيب يوميا كان 1500 ل. س وفي دراسة حالية شملت 150 طبيباً سحبوا بطريقة عشوائية وجدنا أن متوسط الدخل $\overline{x} = 1700$ ل. س وأن تباينه $s^2 = 2000$ فهل يعد هذا دليلاً كافياً، وباحتمال قدره 0.95 على تحسن دخل الأطباء ؟.

4- سحبنا عينتين بحجمين $n_1 = n_2 = 11$ عنصراً من مجتمعين طبيعيين متوسطيهما μ_1 , μ_2 ولها تباين موحد. فوجدنا أن $\overline{x}_1 = 60$, $\overline{x}_2 = 65$ وأن $s_1^2 = 31$ وأن $s_2^2 = 45$ فهل تقدم هذه المعلومات دلالة كافية ، وباحتمال قدره 0.90 ، على وجود فرق بين المتوسطين μ_1 , μ_2

5- عند اختبار عمر 16 مصباحاً كهربائياً وجدنا أن تقدير متوسط عمر المصباح (بالساعة) $\overline{x} = 3800$ وأن تباينه $s^2 = 40000$ ، اختبر ادعاء الشركة بأن متوسط عمر مصابيحها تساوي 4000 وذلك بمستوى دلالة 0.05.

6- لتقدير نسبة الأمية في مدينتين A , B سحبنا منهما عينتين بحجمين $n_1 = 30$ و $n_2 = 40$ عاملاً. فوجدنا أن نسبة الأميين فيهما $r_1 = 0.12$, $r_2 = 0.10$ فهل هذا يعطينا دلالة كافية لاعتبار هاتين النسبتين متساويتين وذلك بمستوى دلالة 0.08.

7- لنفترض أنه لدينا القياسات التالية:

100 , 105 , 102 , 110 , 112 , 115 , 120

اختبر فيما إذا كانت تنتمي إلى مجتمع متوسطه 130. وذلك بمستوى دلالة 0.50.