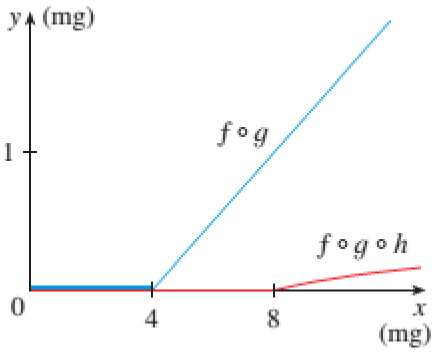
الدّوال (Functions)



١,١ الدوال

تعريف: لتكن A و B مجموعتين غير خاليتين من مجموعة الأعداد الحقيقية R . إذا أمكننا أن نقرن كل عنصر x من المجموعة A ، وفق قاعدة ما ، بعنصر وحيد $f(x)$ من المجموعة B نكون قد عرفنا دالة حقيقية للمتحول x على المجموعة A و تأخذ قيمها في المجموعة B و يرمز لها بالرمز y=f(x) وتسمى A مجموعة تعريف الدالة f وتسمى المجموعة $\{y \in R : y = f(x), x \in A\}$ مجموعة قيم الدالة f ويرمز لها بـ $f(A)$.

مثال: بفرض

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x &\to x^2 \end{aligned}$$

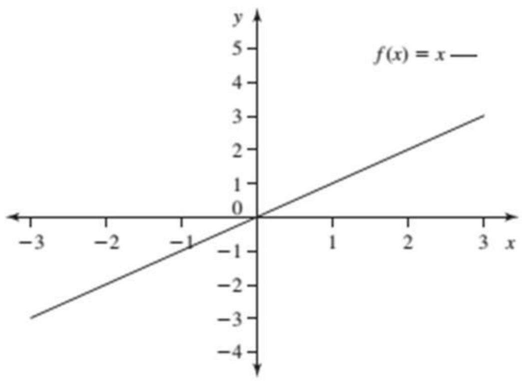
عندئذ منطقة تعريف f هي المجموعة R و منطقة القيم هي المجال $[0,\infty)$ لأن مربع العدد الحقيقي غير سالب، أي أن $f(R) = [0,\infty)$.

تعريف: تسمى الدالة $f : A \to B$:

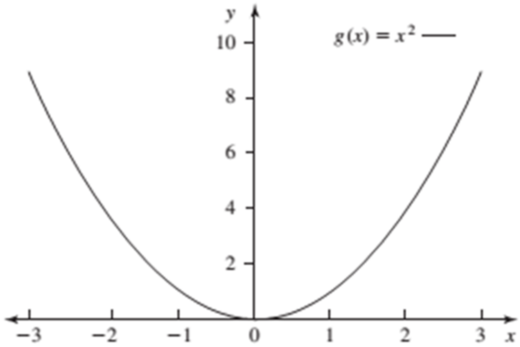
١- زوجية إذا كان f(x)=f(-x) لكل $x \in A$.

٢- فردية إذا كان f(-x)=-f(x) لكل $x \in A$.

مثال: الدالة $f(x) = x, x \in \mathbb{R}$ هي دالة فردية لأن : $f(-x) = -x = -f(x)$ لكل $x \in R$.



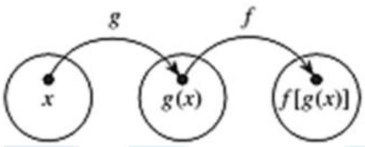
مثال: الدالة $g(x) = x^2, x \in R$ دالة زوجية لأن: $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ لكل $x \in R$.



تعريف: إذا كانت g دالة معرفة على المجموعة A وكانت f دالة معرفة على المجموعة B حيث $g(A) \subset B$ فإن الدالة $f \circ g$ المعرفة على A بالعلاقة:

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)], \forall x \in A$$

تسمى مركب الدالتين f و g



مثال: إذا كانت $x \geq 0$.$f(x) = \sqrt{x}$ و $x \in R$.$g(x) = x^2 + 1$ أوجد:

$$a)\ (f \circ g)(x) \quad b)\ (g \circ f)(x)$$

الحل: من أجل إيجاد $(f \circ g)(x)$ نضع $f(u) = \sqrt{u}$ و $g(x) = x^2 + 1$. عندئذ:

$$y = f(u) = f[g(x)] = f(x^2 + 1) = \sqrt{x^2 + 1}$$

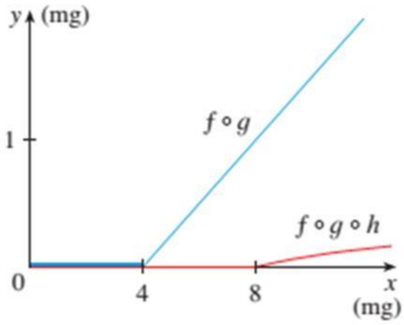
ومن أجل إيجاد $(g \circ f)(x)$ نضع $g(u) = u^2 + 1$ و $f(x) = \sqrt{x}$ عندئذ:

$$y = g(u) = g[f(x)] = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + 1 = x + 1 .$$

ولإيجاد مجموعة تعريف الدالة $f \circ g$ ننظر إلى مجموعة تعريف f (والتي هي $[0,\infty)$) ومجموعة قيمها هي $[0,\infty)$. إن مجموعة قيم f محتواه في مجموعة تعريف g (والتي هي R $g[0,\infty) \subset R$)، بالتالي مجموعة تعريف الدالة $f \circ g$ هي المجال $[0,\infty)$.

مثال: جرعة المضاد الحيوي: تستخدم المضادات الحيوية لعلاج التهابات الجيوب البكتيرية. إذا تم إعطاء جرعة x mg فموياً، نعتبر أن الكمية التي يتم امتصاصها إلى الدم عبر المعدة هي $h(x) = 8x/(x+8)mg$. واذا دخل x mg إلى الجريان الدموي، نعتبر أن الكمية التي لم تتم تصفيتها في الكبد هي $g(x) = \frac{1}{4}x$. أخيراً، إذا كانت

الكمية التي لم تتم تصفيتها في الكبد هي x mg ، نعتبر أن الكمية التي تصل إلى جوف الجيب هي $f(x) = x - 1\ mg$ باعتبار أن $x > 1$ وخلاف ذلك يكون $f(x) = 0$.



أولاً: استخدم تركيب الدوال للحصول على الدالة التي تربط الجرعة الفموية بالكمية من الدواء الواصلة إلى جوف الجيب.

ثانياً: لنفترض أن المضاد الحيوي تم إعطاؤه عن طريق حقنة. أوجد الدالة التي تربط الجرعة بكمية الدواء الواصل إلى جوف الجيب.

الحل:

أولاً: كمية الدواء التي لم تتم تصفيتها في الكبد هي:

$$g(h(x)) = \frac{1}{4} h(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{8x}{x+8}\right) = \frac{2x}{x+8}$$

والآن: $$\frac{2x}{x+8} > 1 \Leftrightarrow 2x > x+8 \Leftrightarrow x > 8$$

وبالتالي إذا كان $x > 8$ فإن كمية الدواء التي تصل إلى جوف الجيب هي :

$$f(g(h(x))) = f\left(\frac{2x}{x+8}\right) = \frac{2x}{x+8} - 1 = \frac{x-8}{x+8}$$.

وفي حال كان $f(g(h(x))) = 0$ فإن الكمية الواصلة إلى جوف الجيب:

$$f(g(h(x))) = \begin{cases} \dfrac{x-8}{x+8} & if\ x > 8 \\ 0 & if\ x \le 8 \end{cases}$$

ثانياً: إذا تم إعطاء الدواء عن طريق حقنة فالكمية الواصلة إلى جوف الجيب:

$$f(g(x))=\begin{cases}\frac{1}{4}x-1 & if\ x>4\\ 0 & if\ x\le 4\end{cases}$$

٢,١ دوال كثيرات الحدود (Polynomial functions)

بفرض أن $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ حيث $a_0,a_1\ ,a_2,\ldots,a_n$ ثوابت وn عدد صحيح موجب تسمى الدالة f كثير حدود في المتحول x. إذا كان $a_n\neq 0$ فإننا نقول عن كثيرة الحدود f أنها من الدرجة n.

٣,١ الدوال الكسرية (Rational functions)

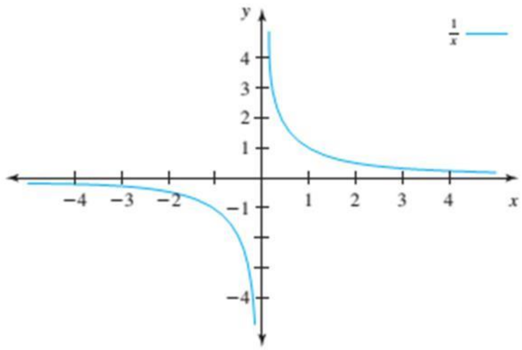
الدالة الكسرية هي الدالة الناتجة عن قسمة كثيرتي حدود $p(x)$ و $q(x)$:

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)};\ for\ q(x)\neq 0$$.

من الأمثلة الهامة على التوابع الكسرية هو

القطع الزائد:

$$y=\frac{1}{x};x\neq 0$$



٤,١ دوال القوى

هي الدوال من الشكل $f(x)=x^r$ حيث r عدد حقيقي.

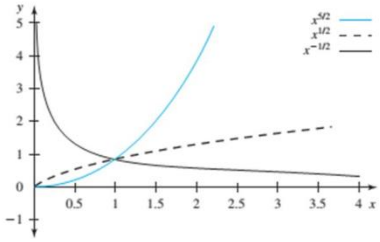
أمثلة:

$y=x^{1/3},x\in\mathbb{R}$

$y=x^{5/2},x\geq 0$

$y=x^{1/2},x\geq 0$

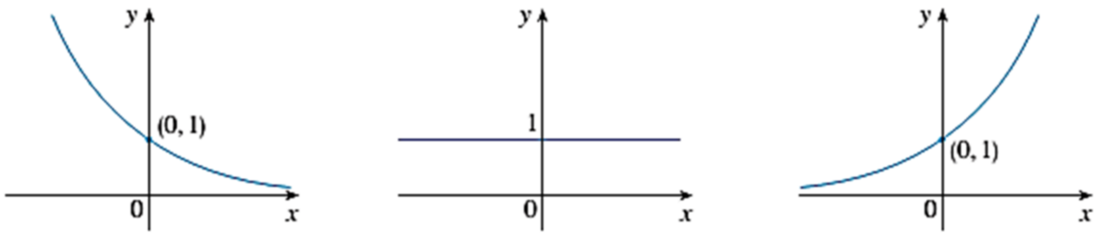
$y=x^{-1/2},x>0$



٥,١ الدوال الأسّيّة (Exponential functions)

الدالة الأسية هي الدالة من الشكل $f(x)=a^x; a\neq 0,1$.

لاحظ أنه بما أن $\left(\frac{1}{b}\right)^x=\frac{1}{b^x}=b^{-x}$ فإن بيان الدالة $y=\left(\frac{1}{b}\right)^x$ هو مجرد انعكاس لبيان الدالة $y=b^x$ بالنسبة للمحور y.



(a) $y=b^x,\ 0<b<1$ (b) $y=1^x$ (c) $y=b^x,\ b>1$

قوانين القوى:

1. $b^{x+y}=b^x b^y$ 2. $b^{x-y}=\frac{b^x}{b^y}$ 3. $(b^x)^y=b^{xy}$ 4. $(ab)^x=a^x b^x$

الدالة الأسية الطبيعية: هي الدالة $f(x)=e^x; e\cong 2.71828$.

<u>مثال:</u> اكتب المقادير الآتية بأبسط شكل:

1) $\frac{4^{-3}}{2^{-8}}$ 2) $\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$ 3) $\frac{x^{2n}x^{3n-1}}{x^{n+2}}$ 4) $\frac{\sqrt{a\sqrt{b}}}{\sqrt[3]{ab}}$

الحل:

$$1)\ \frac{4^{-3}}{2^{-8}}=\frac{(2^2)^{-3}}{2^{-8}}=\frac{2^{-6}}{2^{-8}}=2^{-6}\times 2^{8}=2^{-6+8}=2^2=4$$

$$2)\ \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}=\frac{1}{(x^4)^{1/3}}=\frac{1}{(x)^{4/3}}=x^{-4/3}$$

$$3)\ \frac{x^{2n}\,x^{3n-1}}{x^{n+2}}=\frac{x^{5n-1}}{x^{n+1}}=x^{5n-1}\,x^{-n-2}=x^{5n-n-1-2}=x^{4n-3}$$

$$4)\ \frac{\sqrt{a\sqrt{b}}}{\sqrt[3]{a\,b}}=\frac{(a\,b^{1/2})^{1/2}}{(a\,b)^{1/3}}=\frac{a^{1/2}\,b^{1/4}}{a^{1/3}\,b^{1/3}}=(a^{1/2}\,b^{1/4}).(a^{-1/3}\,b^{-1/3})=a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\,b^{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{6}}\,b^{\frac{-1}{12}}$$

٦,١ الدوال العكسية (Inverse functions)

يقال عن الدالة f أنها دالة متباينة على

المجموعة A إذا تحقق الشرط:

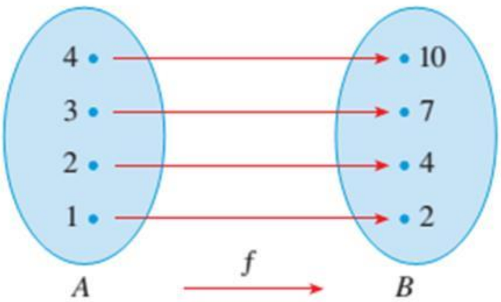
$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

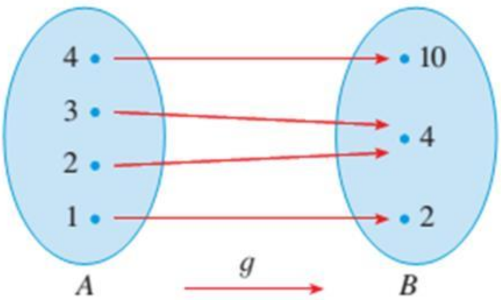
أو الشرط:

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

مثال: الدالة $f(x)=x^3$ دالة مباينة لأنه إذا كان $x_1 \neq x_2$ فإن $x_1^3 \neq x_2^3$.

أما الدالة $f(x)=x^2$ فهي غير متباينة لأن: $f(-1)=1=f(1)$.



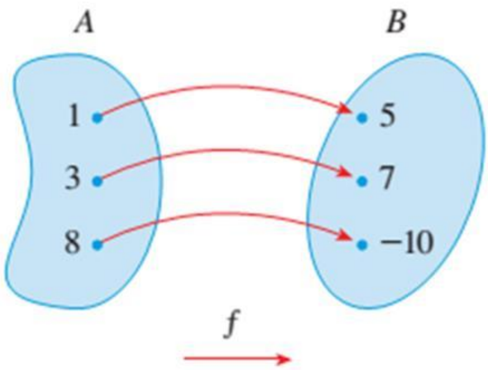


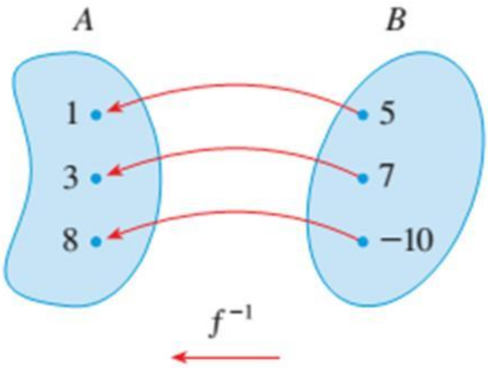
تعريف: لتكن $f : A \to B$ دالة متباينة مجموعة قيمها $f(A)$ عندئذ للدالة العكسية f^{-1} مجموعة التعريف $f(A)$ و مجموعة القيم A وتعرف بالشكل:

$$f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow y=f(x), \forall y \in f(A)$$

مجموعة تعريف f^{-1} تساوي مجموعة قيم f .

مجموعة قيم f^{-1} تساوي مجموعة تعريف f .





مثال: أوجد معكوس الدالة $x \geq 0$ $\quad f(x) = x^3 + 1,$.

الحل: لإيجاد الدالة العكسية، نقوم بإجراء ثلاث خطوات:

١- نكتب $y = f(x)$:

$$y = x^3 + 1$$

٢- نوجد x بدلالة y:

$$x^3 = y - 1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-1}$$

إن مجموعة قيم f هي المجال $[1, \infty)$ وهذا المجال سيكون مجموعة تعريف الدالة f^{-1} ومنه نجد أن:

$$f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-1}, \qquad y \geq 1$$

٣- نبدل كل x بـ y و كل y بـ x. نجد أن:

$$y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}, \qquad x \geq 1$$

٧,١ دالة اللوغاريتم:

تعريف: تسمى الدالة العكسية للدالة $f(x) = a^x$ دالة اللوغاريتم ذي الأساس a ونكتب:

$$f^{-1}(x) = \log_a x$$

نلاحظ أن :

$$a^{\log_a x} = x \ \text{ for } x > 0$$

$$\log_a a^x = x \ \text{ for } x \in \mathbb{R}$$

خواص دالة اللوغاريتم:

$$\log_a(s.t)=\log_a(s)+\log_a(t)$$
$$\log_a(s/t)=\log_a(s)-\log_a(t)$$
$$\log_a(s^r)=r\log_a(s) \qquad ; \quad r\in\mathbb{R}$$

مثال: أوجد قيمة المقدار $\log_2 80-\log_2 5$.

الحل:

$$\log_2 80-\log_2 5=\log_2\left(\frac{80}{5}\right)=\log_2 16=\log_2 2^4=4$$

اللوغاريتم الطبيعي: إذا كان أساس دالة اللوغاريتم يساوي e فإننا ندعوها بدالة اللوغاريتم الطبيعي ونكتب:

$$\log_e x=\ln x$$

مثال: اكتب كلاً مما يلي بأبسط شكل:

$$\text{(a)}\ \log_2[8(x-2)] \quad \text{(b)}\ \log_3 9^x \quad \text{(c)}\ \ln e^{3x^2+1}$$

الحل:

a)

$$\log_2[8(x-2)]=\log_2 8+\log_2(x-2)=\log_2 2^3+\log_2(x-2)=3+\log_2(x-2)$$

b)

$$\log_3 9^x=\log_3 3^{2x}=2x$$

c)

$$\ln e^{3x^2+1}=(3x^2+1)\ln e=3x^2+1$$

جامعة المنارة
MANARA UNIVERSITY

العلاقة بين اللوغاريتم الطبيعي واللوغاريتم:

من أجل أي $a>0,\quad a\neq 1$ يكون:

$$\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}$$

مثال: اكتب كلاً مما يلي بدلالة e :

$$\text{(a) } 2^x \quad \text{(b) } 10^{x^2+1} \quad \text{(c) } \log_3 x \quad \text{(d) } \log_2(3x-1)$$

الحل:

$$\text{(a) } 2^x=\exp(\ln 2^x)=\exp(x\ln 2)=e^{x\ln 2}$$

$$\text{(b) } 10^{x^2+1}=\exp(\ln 10^{x^2+1})=\exp\left[(x^2+1)\ln 10\right]=e^{(x^2+1)\ln 10}$$

$$\text{(c) } \log_3 x=\frac{\ln x}{\ln 3}$$

$$\text{(d) } \log_2(3x-1)=\frac{\ln(3x-1)}{\ln 2}$$

تمارين

I - أوجد حل كلا من المعادلات الآتية:

$$1)\,3^{\log_9(5x-5)}=5\,,\ 2)\left(\frac{1}{25}\right)^{x+2}=5^{x+5}\,,3)\log_{x-5}49=2$$

$$4)\ \log_5(7-x)=\log_5(3-x)+1\ ,\ 5)\ x^{\log x}=1000x^2$$

II - بين فيما إذا كانت الدوال الآتية زوجية أم فردية أم لا زوجية ولا فردية:

$$1)\,f(x)=4x^3-4x\ ,\ 2)\,g(x)=9-5x^3\ ,\ 3)\,h(x)=\sqrt{x^2+1}\ ,4)\,k(x)=|x|+3$$

III - أوجد مجموعة تعريف كلا من الدوال الآتية:

$$1)\,f(x)=\sqrt{1-x^2}\ ,\,2)\,g(x)=\sqrt{3+x}+\sqrt[4]{7-x}\ ,\,3)\,h(x)=\log x\ ,\,4)\,k(x)=\frac{a+x}{a-x}$$