المتتاليات Sequences

تُعرف المتتالية كدالة منطلقها الأعداد الطبيعية. على سبيل المثال، لتكن المتتالية:

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & \ldots, & n, & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4, & \ldots, & a_n, & \ldots \end{array} \quad \text{Sequence}$$

العناصر $a_1, a_2, \ldots, a_n$ هي حدود المتتالية، الحدّ a_n هو الحدّ رقم n من المتتالية (الحد النوني)، ويُرمز للمتتالية كاملة بالرمز $\{a_n\}$.

مثال:

a) حدود المتتالية $\{a_n\}=\{3+(-1)^n\}$ هي:

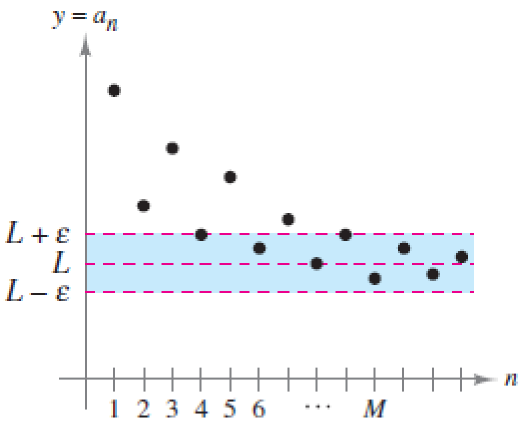
$$3+(-1)^1, 3+(-1)^2, 3+(-1)^3, 3+(-1)^4, \ldots$$
$$2, \quad 4, \quad 2, \quad 4, \quad \ldots$$

b) حدود المتتالية $\{b_n\}=\left\{\dfrac{n}{1-2n}\right\}$ هي:

$$\frac{1}{1-2(1)}, \frac{2}{1-2(2)}, \frac{2}{1-2(3)}, \ldots$$
$$-1, \quad \frac{-2}{3}, \quad \frac{-3}{5}, \quad \ldots$$

نهاية متتالية Limits of a sequence

تعريف نهاية متتالية Definition of the limit of a sequence



ليكن L عدد حقيقي، نهاية المتتالية $\{a_n\}$ تكون L حيث تكتب بالشكل $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ إذا كان من أجل كل $\varepsilon > 0$ يوجد $M > 0$ بحيث يكون $|a_n - L| < \varepsilon$ وذلك أياً كان $n > M$.

إذا كانت النهاية L للمتتالية موجودة، عندها تكون المتتالية متقاربة من L. وإذا كانت نهاية المتتالية غير موجودة، عندها تكون المتتالية متباعدة diverges.

بمعنى آخر، إذا أخذنا عدد صحيح موجب تماماً $\varepsilon > 0$ (مهما يكن هذا العدد صغيراً) ، فإنه بإمكاننا ايجاد عدد $M > 0$ بحيث أنه من بعد هذا العدد ($n > M$) فإن المسافة بين L و a_n تكون أصغر من ε.

بيانياً، التعريف السابق يوضح أنه بعد حد معيّن ($n > M$ و $\varepsilon > 0$) فإنّ حدود المتتالية المتقاربة من L تتوضع بين المستقيمين: $y = L + \varepsilon$ و $y = L - \varepsilon$ كما هو موضح في الشكل السابق.

مبرهنة: نهاية متتالية

ليكن L عدد حقيقي، وليكن f تابع حقيقي بحيث $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$. إذا كانت $\{a_n\}$ متتالية بحيث $f(x) = a_n$ من أجل كل عدد صحيح موجب عندها يكون $\lim\limits_{x \to \infty} a_n = L$.

مثال: أوجد نهاية المتتالية التي حدها العام $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

الحل:

نعلم سابقاً أنّ $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$. لذا نستطيع تطبيق المبرهنة السابقة لنستنتج أنّ:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

مبرهنة: خواص نهايات متتاليات Properties of Limits of Sequences

ليكن $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = L$ وليكن $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = k$ عنها يكون:

1. $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n \pm b_n) = L \pm k$
2. $\lim\limits_{n \to \infty} c a_n = c L , \quad c \in \mathbb{R}$
3. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n b_n = Lk$
4. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{k} , \quad k \neq 0, b_n \neq 0$

مثال: حدد فيما إذا كانت المتتالية متقاربة أو متباعدة

a) بما أن حدود المتتالية $\{a_n\}=\{3+(-1)^n\}$ تتناوب بين الـ 2 و الـ 4 $(2, 4, 2, 4, \ldots)$
فإنّ النهاية $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ غير موجودة، وبالتالي المتتالية متباعدة.

b) المتتالية $\{b_n\}=\left\{\dfrac{n}{1-2n}\right\}$، بتقسم البسط والمقام على n نحصل على:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1-2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{1}{n}\right)-2}=\frac{-1}{2}$$

إذاً المتتالية متقاربة من $\dfrac{-1}{2}$.

مبرهنة: مبرهنة الإحاطة Squeeze Theorem

إذا كان $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=L$ وكان يوجد عدد صحيح موجب N بحيث $a_n\le c_n\le b_n$
وذلك أياً كانت $n\ge N$ عندها $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=L$.

مثال: أثبت أنّ المتتالية $\{c_n\}=\left\{(-1)^n\dfrac{1}{n!}\right\}$ متقاربة، وأوجد نهايتها

الحل:

لتطبيق مبرهنة الإحاطة علينا إيجاد متتاليتين متقاربتين من نفس العدد ومتعلقتان بالمتتالية المعطاة.

يمكن أن نختار $a_n=\dfrac{-1}{2^n}$ و $b_n=\dfrac{1}{2^n}$ كلاهما متقارب من الـ 0. بمقارنة $n!$ و 2^n نلاحظ أنّ:

$$n!=1\times2\times3\times4\times5\times\ldots\times n=24\times\underbrace{5\times6\times\ldots\times n}_{n-4}$$

$$2^n=2\times2\times2\times2\times2\times\ldots\times2=16\times\underbrace{2\times2\times\ldots\times2}_{n-4}$$

ومنه نستنتج أنه من أجل $n\ge4$ يكون $2^n<n!$. بالتالي:

$$\frac{-1}{2^n} \le (-1)^n \frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^n}, \quad n \ge 4$$

وبالتالي حسب مبرهنة الإحاطة نستنتج أنّ: $\lim_{n\to\infty}(-1)^n \frac{1}{n!} = 0$.

من الملاحظ أن المتتالية السابقة $\{c_n\}$ مؤلفة من حدود موجبة وحدود سالبة. إذا أوجدنا متتالية القيمة المطلقة لهذه المتتالية $\{|c_n|\}$ نلاحظ أنها تتقارب من الـ 0 أيضاً وذلك بحصرها من متتاليتين $0 \le \frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^n}, n \ge 4$. في مثل هذه الحالة غالباً ما يكون من الأسهل دراسة متتالية القيمة المطلقة ومن ثم تطبيق المبرهنة أدناه.

مبرهنة: مبرهنة القيمة المطلقة Absolute Value Theorem

من أجل المتتالية $\{a_n\}$ إذا كانت $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$ عندها يكون $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

التعرف على الحد العام لمتتالية Finding the nth Term of a Sequence

في بعض الأحيان فإن حدود المتتالية تُوَلد ببعض القواعد التي لا تُعطى صراحة في الحد العام للمتتالية، في مثل هذه الحالات يمكن أن يُطلب منّا إيجاد حدها العام a_n، وعندما نحدد الحد العام يصبح بالإمكان تحديد التقارب أو عدم التقارب للمتتالية.

مثال: أوجد المتتالية $\{a_n\}$ والتي حدودها الخمسة الأولى هي: $\frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{8}{5}, \frac{16}{7}, \frac{32}{9}, \ldots$

الحل:

نلاحظ أنّ البسط هو عبارة عن تتالٍ لقوى العدد 2 وأنّ المقام هو عدد صحيح موجب فردي.

بمقارنة a_n مع n نحصل على:

$$\frac{2^1}{1}, \frac{2^2}{3}, \frac{2^3}{5}, \frac{2^4}{7}, \frac{2^5}{9}, \ldots, \frac{2^n}{2n-1}$$

مثال: أوجد الحد العام للمتتالية التي حدودها الخمسة الأولى هي:

$\frac{-2}{1}, \frac{8}{2}, \frac{-26}{6}, \frac{80}{24}, \frac{-242}{120}$ واستنتج فيما إذا كانت المتتالية متقاربة أو متباعدة.

الحل:

نلاحظ أنّ البسط في كل حد هو $3^n - 1$، أما المقام:

$$1 = 1!$$
$$2 = 1 \times 2 = 2!$$
$$6 = 1 \times 2 \times 3 = 3!$$
$$24 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 4!$$
$$120 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 5!$$

بالتالي فإنّ المقام هو $n!$، وبما أنّ الحدود متناوبة بالإشارة فهي مضروبة بـ $(-1)^n$. أي أن:

$$a_n = (-1)^n \left(\frac{3^n - 1}{n!} \right)$$

وبما أن $\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n - 1}{n!} = 0$، فإن المتتالية متقاربة بالإطلاق من الصفر وبالتالي $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. إذاً المتتالية $\{a_n\}$ متقاربة من الـ 0.

المتتاليات المطردة والمتتاليات المحدودة Monotonic Sequences and Bounded Sequences

تعريف المتتاليات المطردة Definition Of Monotonic Sequence

نقول عن متتالية $\{a_n\}$ أنها مطردة (متزايدة أو متناقصة) إذا تحقق $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_n \le \ldots$ (متزايدة) أو $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots \ge a_n \ge \ldots$ (متناقصة).

مثال: حدد فيما إذا كانت كل من المتتاليات التالية مطردة أم لا.

$$a)\ a_n = 3 + (-1)^n \qquad b)\ b_n = \frac{2n}{1+n} \qquad c)\ c_n = \frac{n^2}{2^n - 1}$$

الحل:

a) هذه المتتالية متناوبة بين ال 2 و الـ 4 بالتالي فهي غير مطردة.

b) المتتالية مطردة لأن كل حد أكبر من الحد الذي قبلة، وللتأكد من ذلك يمكننا مقارنة b_n مع b_{n+1}

$$b_n = \frac{2n}{1+n} \overset{?}{<} \frac{2(n+1)}{1+(n+1)} = b_{n+1}$$

$$\frac{2n}{1+n} \overset{?}{<} \frac{2n+2}{2+n}$$

وبما أنّ n موجبة فإننا نستطيع ضرب طرفي المتراجحة بـ $(1+n)(2+n)$ ينتج:

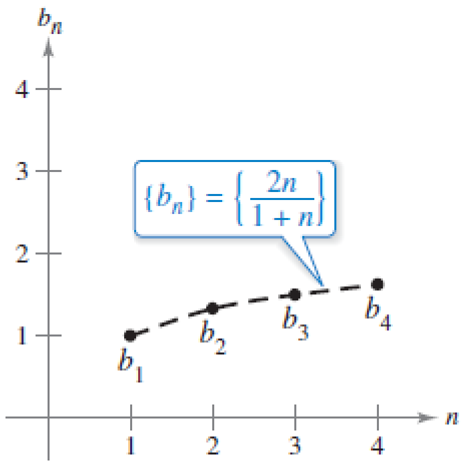
$$2n(2+n) \overset{?}{<} (2n+2)(1+n)$$

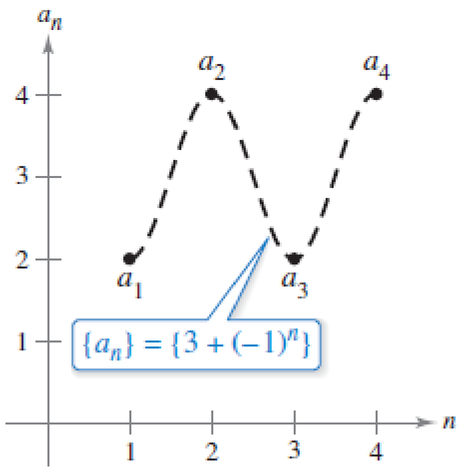
$$4n+2n^2 \overset{?}{<} 2+4n+2n^2$$

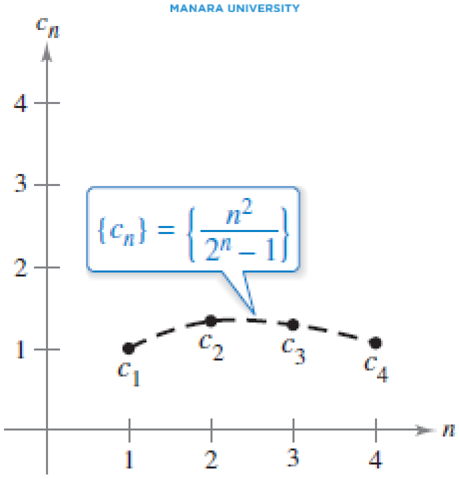
$$0<2$$

والمتراجحة محققة، بالتالي المتتالية b_n مطردة.

c) المتتالية $\{c_n\}$ ليست مطردة لأن الحد الثاني أكبر من الحد الأول وأكبر من الحد الثالث أيضاً.
(لاحظ أنه إذا حذفنا الحد الأول تصبح المتتالية $c_2, c_3, c_4, \ldots$ مطردة).







تعريف المتتاليات المحدودة Definition Of Bounded Sequences

1. نقول عن المتتالية $\{a_n\}$ أنها محدودة من الأعلى bounded above إذا وجِد عدد حقيقي M بحيث يكون $a_n \leq M$ وذلك من أجل جميع قيم n. نسمي M في هذه الحالة الحد الأعلى للمتتالية upper bound.
2. نقول عن المتتالية $\{a_n\}$ أنها محدودة من الأعلى bounded below إذا وجِد عدد حقيقي N بحيث يكون $a_n \leq N$ وذلك من أجل جميع قيم n. نسمي N في هذه الحالة الحد الأعلى للمتتالية lower bound.
3. نقول عن المتتالية $\{a_n\}$ أنها محدودة bounded إذا كانت محدودة من الأعلى ومحدودة من الأسفل.

جميع المتتاليات في المثال السابق هي متتاليات محدودة:

$$2 \leq a_n \leq 4, \quad 1 \leq b_n \leq 2, \quad 0 \leq c_n \leq \frac{4}{3}$$

مبرهنة: مبرهنة المتتاليات المطردة المحدودة Bounded Monotonic Sequences

إذا كانت المتتالية $\{a_n\}$ محدودة ومطردة تكون متقاربة.

مثال:

a) المتتالية $\{a_n\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ مطردة ومحدودة فحسب المبرهنة السابقة هي متقاربة.

b) المتتالية المتباعدة $\{b_n\} = \left\{\frac{n^2}{(n+1)}\right\}$ مطردة ولكنها غير محدودة (محدودة من الأدنى فقط).

c) المتتالية المتباعدة $\{c_n\}=\left\{(-1)^n\right\}$ محدودة لكنها غير مطردة.

2-النهايات (Limits):

تعريف النهاية (Definition of Limit):

إن مفهوم النهاية من أهم المفاهيم في الرياضيات ويعتمد عليه كثير من المفاهيم الرئيسية الأخرى كمفهوم الاتصال (الاستمرار) و الاشتقاق والتكامل .

وكان العالم الفرنسي كوشي (couchy) أول من عرف بدقة مفهوم النهاية في صورته الحالية .

ولفهم مفهوم النهاية للدالة $f(x)$ في نقطة x_o من مجالها أو خارج مجالها لابد من معرفة تغيرات قيم هذه الدالة عندما تكون قيم x تقترب من القيمة x_o أكثر فأكثر فإذا كانت تغيرات قيم هذه الدالة تقترب من قيمة معينة قلنا أن $f(x)$ تقترب من l عندما x تقترب من x_o ونكتب :

$$\lim_{x\longrightarrow x_o} f(x)=l \quad , \quad l\in R$$

وتقرأ نهاية الدالة $f(x)$ هي l عندما x تؤول إلى x_o.

مثال : أوجد $\lim\limits_{x\longrightarrow 2}(3x^2-3)$

هنا $f(x)=3x^2-3$ حدودية من الدرجة 2 ومجالها R ونلاحظ كلما اقتربت X من 2

كلما اقتربت $f(x)$ من 9 لذلك نقول أن $\lim\limits_{x\longrightarrow 2} f(x)=9$. وفي هذا المثال كان بإمكاننا أن نعوض قيمة (x=2) في $f(x)$ ونحصل على $f(2)=9$

لكن يوجد حالات يصعب فيها التعويض وقد يؤدي إلى نتائج غير معروفة .

مثال : أوجد $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\dfrac{2x^2+x-3}{x-1}$

نلاحظ أن الدالة النسبية $f(x)=\dfrac{2x^2+x-3}{x-1}$ غير معروفة عند (x=1) وهذا يعني أنه عند إيجاد $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=l$ عندما x تؤول إلى 1 لا يمكن التعويض مباشرة في قاعدة الارتباط للدالة لأن عند التعويض نحصل على قيمة غير معرفة $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. وهنا نحاول التخلص من القيمة غير المعرفة وذلك بتحليل الدالة $f(x)$ ونحصل على :

$$f(x)=\frac{(2x+3)(x-1)}{x-1}=2x+3 \quad , \quad (x\neq 1)$$

ومنه

$$\lim_{x \longrightarrow 1} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 1} 2x + 3 = 5$$

وهنا نلاحظ أنه لا يتم التعويض مباشرة لـ (x=1) لكن يمكننا ملاحظة أن $f(x)$ تقترب من 5 كلما اقترب المتغير x من 1 سواء من اليمين مثلاً (1,0009) , (1,001 ,......) ومن اليسار مثلاً (0,9999 , 0,9995 , ...)

لتكن $f(x)$ دالة معرفة على المجموعة A . لتكن a نقطة من A .

نقول عن العدد المحدود l إنه نهاية الدالة $f(x)$ عند النقطة $x = a$ ، إذا تحقق الشرط :

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists \ \delta(\varepsilon) > 0 \quad : \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

عندئذٍ نقول إن نهاية الدالة $f(x)$ في النقطة $x \neq a$ (أي عندما تنتهي x إلى a) هي l وتكتب : $\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = l$.

مثال: أثبت بالاعتماد على التعريف أن: $\lim_{x \longrightarrow 2} (2x - 1) = 3$

الحل: لدينا: $f(x) = 2x - 1$ ، $a = 2, l = 3$ و هنا يجب إثبات أنه كلما أعطينا قيمة $0 < \varepsilon$ يمكن إيجاد $0 < \delta$ بحيث:

$$0 < |x - a| < \delta \text{ كلما كانت } |f(x) - l| < \varepsilon$$

أي أن: $0 < |x - 2| < \delta$ كلما كانت $|(2x - 1) - 3| < \varepsilon$

لإيجاد δ نكتب المتراجحة السابقة بالصيغة :

$$|2x - 4| < \varepsilon \Leftrightarrow 2|x - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}$$

إذا باختيار $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ يتم المطلوب .

مثال: أوجد قيمة للعدد $0 < \delta$ بحيث يتحقق

$$|x - 3| < \delta \Rightarrow |(3x - 1) - 8| < \varepsilon; x \neq 3$$

حيث ε عدد موجب معطى.

الحل: نستطيع كتابة :

$$|3x - 1 - 8| = |3x - 9| = |3(x - 3)| = 3|x - 3| \Leftrightarrow |x - 3| < \frac{\varepsilon}{3}$$

والآن نختار $\frac{\varepsilon}{3} = \delta$ نجد: $|x - 3| < \delta \Leftrightarrow |(3x - 1) - 8| < \varepsilon$

مثال :

أثبت أن : $\lim_{x \longrightarrow 3} (2x + 3) = 9$ باستخدام التعريف

الحل : ليكن $\varepsilon > 0$ وسنبحث عن $\delta > 0$ التي تحقق شرط النهاية لذلك نكتب

$$|f(x)-l| = |2x+3-9| = |2x-6| = 2|x-3| < \varepsilon$$

ومنه $|x-3| < \frac{\varepsilon}{2}$ إذن باختيار $0 < \delta \le \frac{\varepsilon}{2}$ يكون الشرط $|2x+3-9| < \varepsilon$

محقق أي أن $\lim\limits_{x \longrightarrow 3} (2x+3) = 9$

خواص النهايات:

1- إذا كانت $f(x)$ دالة ثابتة في جوار x_0 فإن: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = const$

2- $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

حيث نهاية كل من $f(x)$ و $g(x)$ موجودة ولا تساوي اللانهاية لكي لا نحصل عل على عدم تعيين من الشكل $\infty - \infty$.

3- $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

حيث نهاية كل من $f(x)$ و $g(x)$ موجودة ولا تساوي اللانهاية أو الصفر لكي لا نحصل على عدم تعيين من الشكل $0 \cdot \infty$.

4- $$\lim\limits_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$$

حيث نهاية كل من $f(x)$ و $g(x)$ موجودة ولا تساوي اللانهاية أو الصفر لكي لا نحصل عل على عدم تعيين من الشكل $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$.

5- $$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^n = \left[\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right]^n$$

6- $$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$$

تمارين

I- أوجد الحد العام لكل من المتتاليات الآتية:

$$1)\left(\frac{2}{3}\right), \left(\frac{3}{7}\right)^2, \left(\frac{4}{11}\right)^4, \left(\frac{5}{15}\right)^8, \ldots$$

$$2)\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, \ldots$$

3) $3, 2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 2\frac{1}{4}, \ldots.$

4) $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2\sqrt{2}}, \ldots$

5) $3, (2.1)^2, (2.01)^3, (2.001)^4, \ldots$

أوجد النهايات الآتية:

$$1 - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{16}+\frac{9}{64}+\ldots+\frac{1+2^n}{4^n}\right)$$

$$2 - \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$$

$$3 - \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$$

$$4 - \lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

$$5 - \lim_{x\to o} x^2 \sin\frac{1}{x}$$

$$6 - \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x}$$