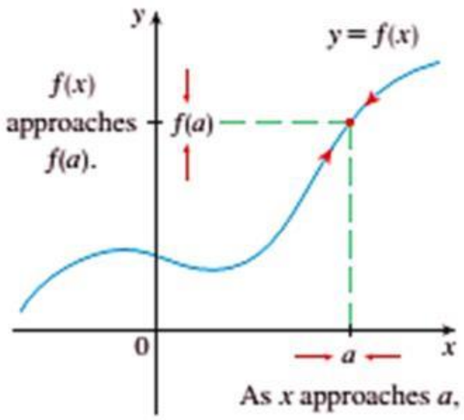
الاستمرار, المشتقات والتفاضل

1- استمرار الدوال (Continuity of Functions):

تعريف : يقال إن الدالة f المعرّفة على المجموعة A التي تحوي النقطة a مستمرة في النقطة a إذا كانت:

1) $\lim_{x \to a} f(x)$ موجودة. 2) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$



ملاحظة: نلاحظ من تعريف استمرار الدالة في نقطة, أنه لتكون f مستمرة عند a يجب تحقق شروط ثلاثة هي:

1) أن تكون الدالة f معرفة عند a .

2) أن تكون للدالة f نهاية عندما $x \to a$.

3) أن تكون هذه النهاية مساوية لقيمة الدالة عند a .

مثال(1): أثبت أن الدالة المعرفة بالشكل الآتي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$$

غير مستمرة عند النقطة x=0.

الحل:

نلاحــــــظ أن: $f(0)=1$ لكـــــن $\lim_{x\to0+} f(x) = \lim_{x\to0+} \frac{1}{x} = +\infty$ و

$$\lim_{x\to0-} f(x) = \lim_{x\to0-} \frac{1}{x} = -\infty$$

بالتالي الدالة $f(x)$ غير مستمرة عند $x=0$.

مثال(2) : أثبت أن التابع: $f(x) = 2x+5$ مستمر على R .

الحل:

بما أن الخط البياني لهذا التابع مستقيم وخال من نقط الانقطاع عند أية قيمة من مجموعة تعريفه فنهايته تساوي قيمته عند أي قيمة من مجموعة تعريفه R وهذا يعني أن التابع مستمر عند كل قيمة لمتغيره.

مثال(3): أثبت أن الدالة المعرفة بالشكل الآتي:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1}, x\neq 1\\ 2, x=1\end{cases}$$ غير مستمرة عند النقطة a=1.

الحل: لدينا $f(1)=2$ فرضاً, لكن:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=3\neq f(1)$$

أي أن الدالة f غير مستمرة عند النقطة $a=1$.

2- مشتق دالة:

نسمي نهاية نسبة تزايد الدالة $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ إلى تزايد المتغير المستقل Δx عندما يسعى تزايد المتغير المستقل إلى الصفر إذا كانت موجودة بمشتق الدالة y=f(x). ونكتب:

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

أو:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}f(x)$$

ملاحظات:

1- تسمى الدالة التي تملك مشتق على مجموعة X بالدالة القابلة للمفاضلة على هذه المجموعة. أو بكلام آخر نقول عن الدالة y=f(x) أنها قابلة للمفاضلة في النقطة x إذا كانت قابلة للاشتقاق في هذه النقطة.

2- إذا كانت الدالة قابلة للمفاضلة في نقطة ما، فإن الدالة تكون مستمرة في هذه النقطة. غير أن العكس غير صحيح بالضرورة. حيث أن الدالة غير المستمرة يمكن أن تكون قابلة للاشتقاق.
مشتق الدالة المستمرة ليس بالضرورة أن تكون دالة مستمرة.

القواعد الأساسية في الاشتقاق:

بفرض أن الدوال المدروسة معرفة ومستمرة على مجال ما فإن:

1) $y=c \Rightarrow y'=0$

2) $y=u+v-w \Rightarrow y'=u'+v'-w'$

3) $y=uv \Rightarrow y'=u'v+uv'$

$y=uvw \Rightarrow y'=u'vw+v'uw+w'uv$

$$4)\quad y=\frac{u}{v}\ \Rightarrow y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$$

$$5)\quad y=x^{-m}=\frac{1}{x^m}\ \Rightarrow y'=\frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}}=-mx^{-m-1}\ ;$$ صحيح m عدد

$$6)\quad y=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}\ \Rightarrow y'=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x=1+\tan^2 x$$

$$7)\quad y=c\tan x=\frac{\cos x}{\sin x}\ \Rightarrow y'=\frac{-1}{\sin^2 x}=-\operatorname{cosec}^2 x=-\left(1+c\tan^2 x\right)$$

$$8)\quad y=f(z)\ ;\ z=\varphi(x)$$
$$y=f(\varphi(x))\ \Rightarrow y'_x=y'_z\cdot z'_x$$

مثال 1: أوجد مشتق الدالة : $y=\tan^3\frac{x}{2}$

الحل:

$$y'=3\tan^2\frac{x}{2}\left(\tan\frac{x}{2}\right)'=3\tan^2\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}\left(\frac{x}{2}\right)'=\frac{3}{2}\tan^2\frac{x}{2}\sec^2\frac{x}{2}$$

$$9)\quad y=\ln x\ \Rightarrow y'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

$$10)\ y=\ln z\ ;\ z=\varphi(x)\Rightarrow y'=\frac{z'}{z}$$

$$11)\quad y=a^x\ ;\ a>0\ \Rightarrow y'=a^x\ln a\Rightarrow \left(e^x\right)'=e^x$$

مثال 2 : أوجد مشتق الدالة $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x}}$

الحل:

$$f(x)=x^{-\frac{3}{2}}\Rightarrow f'(x)=-\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-1}=-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}=-\frac{3}{2x^2\sqrt{x}}$$

مثال 3 : أوجد مشتق الدالة $f(x)=\frac{x^3}{\cos x}$

الحل:

$$f'(x)=\frac{\left(x^3\right)'\cos x-x^3(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{2x^2\cos x+x^3\sin x}{\cos^2 x}$$

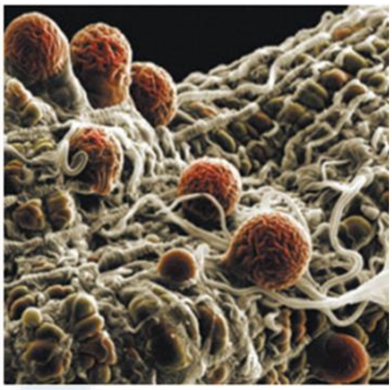
مثال: طفيليات الملاريا: يحتوي الجدول الآتي معلومات تجريبية متعلقة بطفيليات الملاريا. الزمن t مقاس بالأيام وN هو عدد الطفيليات لكل ميكروليتر من الدم.

1- أوجد النسب الطبيعية لتغيرات N بالنسبة لtضمن المجالات:

$[3,5]$, $[3,4]$, $[2,3]$, $[1,3]$.

2- أوجد قيمة $N'(3)$.

t	N
1	228
2	2,357
3	12,750
4	26,661
5	372,331
6	2,217,441



3- التفاضل:(Differential)

تفاضل دالة y=f(x) هو مقدار يتناسب مع تزايد المتغير المستقل Δx ويختلف عن تزايد الدالة Δy بدالة لامتناهية في الصغر $\alpha(\Delta x)\Delta x$ من مرتبة أعلى في الصغر بالمقارنة مع تزايد المتغير المستقل Δx عندما $\Delta x \to 0$.

لذلك نقول أن الدالةy=f(x) قابلة للمفاضلة في النقطة x إذا كان تزايد هذه الدالة Δy في هذه النقطة يكتب على الشكل:

$$\Delta y = k\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \qquad (1)$$

حيث $\alpha(\Delta x) \to 0$ عندما $\Delta x \to 0$

K معامل التناسب يتعلق بـ x ولا يتعلق Δx.

بتقسيم طرفي العلاقة السابقة على Δx وأخذ النهاية من أجل $\Delta x \to 0$ نجد:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k$$

أي أن $f'(x) = k$ وبالتالي من أجل الدوال الحقيقية بمتحول واحد فإن قابلية المفاضلة ووجود المشتق مفهومان متكاملان. عندئذٍ نستطيع أن نكتب العلاقة (1) على الشكل:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

تعريف:

يسمى المقدار $f'(x)\Delta x$ بتفاضل الدالة $y = f(x)$ في النقطة x ويرمز لهذا التفاضل بـ dy أو $df(x)$

إذن:

$$dy = f'(x)\Delta x \qquad (2)$$

ومن أجل $y = x$ نجد:

$$dy = dx = x'\Delta x = \Delta x$$

أي أن تفاضل المتحول المستقل يساوي تزايد هذا المتحول. عندئذٍ نستطيع أن نكتب العبارة (2) على الشكل:

$$dy = f'(x)dx \qquad (3)$$

من العلاقة (3) نجد $f'(x)=\frac{dy}{dx}$ وهو رمز المشتق الذي مر معنا سابقاً. نلاحظ أخيراً أن التفاضل dy يتعلق بـ x و dx في حين أن المشتق $f'(x)$ يتعلق بـ x فقط.

خواص التفاضل:

بفرض أن الدوال التالية قابلة للاشتقاق فإن:

1) $y = c \Rightarrow dy = 0$

2) $d(u+v-w) = du+dv-dw$

3) $d(uv) = vdu+udv$

4) $d(\frac{u}{v}) = \frac{vdu-udv}{v^2}$

5) $y = f(u)$; $u=\varphi(x) \Rightarrow dy = y'_u du$; $du = u'_x dx$

جدول تفاضلات بعض الدوال:

1) $du^n = nu^{n-1}du$

2) $da^u = a^u \ln a\, du$;$(a>0)$, $de^u = e^u\, du$

3) $d(\log_a u) = \frac{du}{u \ln a}$;$(a>0 \;,\; a \neq 1)$

$d(\ln u) = \frac{du}{u}$

4) $d(\sin u) = \cos u du$

5) $d(\cos u) = -\sin u du$

6) $d(\tan x) = \frac{du}{\cos^2 u}$

7) $d(c\tan u) = \frac{du}{\sin^2 u}$

8) $df(u) = f'(u)du$

مثال: أوجد تفاضل الدالة:

$$y = \sin\sqrt{x}$$

الحل:

$$y = \sin u,\ u = \sqrt{x} \Rightarrow dy = \cos u du = \cos(\sqrt{x})d(\sqrt{x}) = \cos(\sqrt{x})\frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

مثال: أوجد تفاضل الدالة:

$$y = \ln(x^2+1)$$

الحل:

$$dy = [\ln(x^2+1)]' dx = \frac{2x}{x^2+1}dx$$

تمارين

1- أوجد مجموعة تعريف كل من الدوال الآتية:

$a)\quad y = -3x^2+5x-2$ $\qquad b)\quad y = \sqrt{x-2}$

$c)\quad y = \dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$ $\qquad d)\quad y = \sqrt{x^2-1}$

$e)\quad y = \ln(1+x)$ $\qquad f)\quad y = \dfrac{x+1}{2x^2+x-1}$

2- أوجد مشتقات الدوال الآتية:

$1)\quad y = 3x^2-x+2$ $\qquad 2)\quad y = \dfrac{x^2}{2}+\dfrac{2}{x^2}$

$3)\quad y = 2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ $\qquad 4)\quad y = \dfrac{ax+b}{a+b}$

$5)\quad y = x^2(2x+1)$ $\qquad 6)\quad y = (x+1)\sqrt{x}$

7) $y = x^2 \sin x$

8) $y = \dfrac{2x}{1-x^2}$

9) $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$

10) $y = \sin^2 x$

11) $y = \sin x^2$

12) $y = \cos^3 \dfrac{x}{2}$

13) $y = \ln \ln x$

14) $y = \cos \dfrac{x^3}{2}$

15) $y = \ln^2 x$

16) $y = \ln x^2$

17) $y = \ln \tan \dfrac{x}{2}$

18) $y = x^n + n^x$

3- أوجد مشتقات الدوال الضمنية الآتية:

$a)\ \ x^2 + y^2 - xy = 1$ $\qquad b)\ \ x^3 + y^3 - 3xy = 0$

$c)\ \ y = x + \ln y$

4- أوجد تفاضل الدوال الآتية:

1) $y = 3x^2$, 2) $y = x\sin x + \cos x$

3) $y = \dfrac{x}{1-x^2}$; 4) $y = \sqrt{1-x^2}$

5) $y = \ln x$, 6) $y = x^2$ حيث $x = 2 - t + t^2$