جَـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

# التكامل غير المحدود

# Indefinite Integral

## الدالة الأصلية: (Primitive Function)

درسنا في المحاضرة السابقة المسألة الآتية: لدينا دالة معطاة $F(x)$ وطلب منا إيجاد مشتقها أي إيجاد الدالة $f(x)=F'(x)$ . في هذه المحاضرة سندرس المسألة العكسية: لدينا دالة معطاة $f(x)$ والمطلوب إيجاد الدالة $F(x)$ التي مشتقها يساوي $f(x)$ أي أن $F'(x)=f(x)$ .

تعريف: تسمى الدالة $F(x)$ دالة أصلية للدالة $f(x)$ على المجال $[a,b]$ إذا كانت $F'(x)=f(x)$ في كل نقطة من نقاط المجال $[a,b]$ .

**مثال 1:**

إحدى الدوال الأصلية للدالة $x^2$ هي $\frac{x^3}{3}$ حيث $\left(\frac{x^3}{3}\right)'=x^2$ . وهذه الدالة غير وحيدة لأن $\left(\frac{x^3}{3}+1\right)'=x^2$ و $\left(x^3/3+2\right)'=x^2$ تعتبر دوال أصلية للدالة $x^2$ , وبالتالي فإن للدالة $x^2$ عدد لانهائي من الدوال الأصلية التي تختلف عن بعضها البعض بحدٍ ثابت.

وبالتالي إذا أضفنا للدالة الأصلية F(x) لدالة ما f(x) معرفة على المجال المفتوح (a,b) جميع الثوابت الممكنة فإننا نحصل على جميع الدوال الأصلية للدالة f(x). أي:

$$F(x)+c \quad ; -\infty<c<\infty$$

هي مجموعة جميع الدوال الأصلية للدالة f(x) لأن:

$$\left(F(x)+c\right)'=F'(x)+c'=f(x)$$

**تعريف 2:**

الصيغة العامة لجميع الدوال الأصلية لدالة مستمرة f(x) تدعى بالتكامل غير المحدود لهذه الدالة ونرمز له

بالرمز $\int f(x)dx$ .

نسمي $f(x)$ بالدالة المكاملة و $f(x)dx$ بعبارة ما تحت التكامل. عندئذٍ نستطيع أن نكتب:

$$\int f(x)dx=F(x)+c$$

يدعى c بالثابت الاختياري.

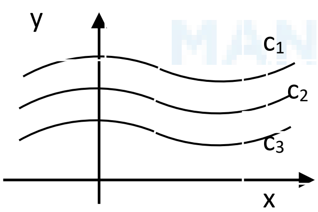
**مثال 2:**

وجدنا أن إحدى الدوال الأصلية للدالة $x^2$ هي $x^3/3$ لذلك فإن:

$$\int x^2dx=x^3/3+c$$

هندسياً فإن التكامل غير المحدد $y=F(x)+c$

عبارة عن منحنيات متوازية كما في الشكل




## الخواص الرئيسية للتكامل غير المحدد

1- تفاضل التكامل غير المحدد يساوي عبارة التكامل أما مشتق التكامل غير المحدد فيساوي الدالة المكاملة. أي:

$$d\int f(x)dx = f(x)dx \qquad (1)$$
$$\left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$$

2- التكامل غير المحدد لتفاضل دالة مستمرة قابلة للاشتقاق يساوي إلى هذه الدالة مضافاً إليها ثابت التكامل.

$$\int d\varphi(x) = \int \varphi'(x)dx$$

حيث $\varphi'(x)$ دالة مستمرة و $\varphi(x)$ الدالة الأصلية لـ $\varphi'(x)$ ولذلك:

$$\int d\varphi(x) = \varphi(x) + c \qquad (2)$$

**ملاحظة:**

في العلاقات (1) و (2) الرمزين d و $\int$ بشكلٍ متتالٍ يفنيان بعضهما البعض (إذا لم نأخذ الثابت بعين الاعتبار). أي أن عمليتي التفاضل والتكامل عمليتان رياضيتان متعاكستان.

-3

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx \qquad (3)$$

حيث A ثابت.

**ملاحظة:**

من أجل A=0 فإن العلاقة (3) غير صحيحة لأن الطرف الأيسر منها عبارة عن ثابت اختياري في حين أن الطرف الأيمن يساوي الصفر.

4- إذا كانت f(x) ، g(x) و h(x) دوال مستمرة على المجال (a,b) فإن:

$$\int [f(x)+g(x)-h(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx - \int h(x)dx \qquad (4)$$

## جدول التكاملات غير المحدودة البسيطة:

يمكن الحصول بسهولة على جدول بالتكاملات البسيطة بالانطلاق من كون التكامل عملية معاكسة للتفاضل.

1) $\int x^m\, dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1} + c \quad ; \ (m \neq -1)$

2) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c$

3) $\int e^x\, dx = e^x + c$

4) $\int a^x\, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c \quad ; \ (a \neq 1\ , a > 0)$

5) $\int \cos x\, dx = \sin x + c$

6) $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$

7) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c$

8) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$

9) $\int tgx\, dx = -\ln|\cos x| + c$

10) $\int ctgx\, dx = \ln|\sin x| + c$

**مثال 3:**

يمكننا بسهولة إيجاد تكامل كل من $x^2$ و $2^x$ و $3^x e^x$ كما يلي:

$$\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + c$$

$$\int 2^x\, dx = \frac{2^x}{\ln 2} + c$$

$$\int 3^x e^x\, dx = \int e^{x\ln 3} e^x dx = \int e^{x(1+\ln 3)} dx = \frac{e^{x(1+\ln 3)}}{1+\ln 3} + c = \frac{3^x e^x}{1+\ln 3} + c$$

نورد الآن بعض الصيغ التي تفيد عند إجراء التكاملات: بفرض $a , b$ ثوابت

1) $dx = d(x+b)$ ,

2) $dx = \frac{1}{a} d(ax) \quad ; (a \neq 0)$

3) $dx = \frac{1}{a} d(ax+b) \quad ; (a \neq 0)$

4) $xdx = \frac{1}{2} d(x^2)$

5) $\sin xdx = -d(\cos x)$

6) $\cos xdx = d(\sin x)$

بشكلٍ عام: $d[\varphi(x)] = \varphi'(x)dx$

أمثلة 4:

1) $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{d(ax+b)}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c \;;\; a \neq 0$

2) $\int \sqrt{x-2}\, dx = \int (x-2)^{1/2} d(x-2) = \frac{(x-2)^{3/2}}{3/2} + c = \frac{2}{3}(x-2)^{3/2} + c$

3) $\int \sin 5x\, dx = \frac{1}{5}\int \sin 5x d(5x) = -\frac{1}{5}\cos 5x + c$

4) $\int \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + c$

5) $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + c$

6) $\int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2}d(x^2) = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$

## طرق إجراء التكامل غير المحدد:

### آ- طريقة تحليل الدالة المكاملة: (Method analysis integrand)

لتكن $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ عندئذٍ:

$$\int f(x)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$$

حيث تم اختيار الدالتين $f_1(x),\ f_2(x)$ بحيث يكون تكاملهما معروف من الجدول.

**مثال 5:**

1) $\int \frac{(1-\sqrt{x})^2}{x}dx = \int \frac{1+x-2\sqrt{x}}{x}dx = \int \frac{dx}{x} + \int dx - 2\int x^{-\frac{1}{2}}dx$

$= \ln|x| + x - 4\sqrt{x} + c$

**ملاحظة:**

لا توجد ضرورة لأن نضع بعد إجراء كل تكامل ثابت اختياري، لأن مجموع الثوابت الاختيارية هو أيضاً ثابت اختياري نضعه في النهاية.

2) $\int \frac{3-2ctg^2 x}{\cos^2 x}dx = 3\int \frac{dx}{\cos^2 x} - 2\int \frac{dx}{\sin^2 x} = 3\tan x - 2ctg\, x + c$

3) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \tan x - ctg\, x + c$

6) $\int \sin x\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}\int (\sin 4x - \sin 2x)dx$

$= \frac{1}{8}\int \sin 4x\,d(4x) - \frac{1}{4}\int \sin 2x\,d(2x) = -\frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{4}\cos 2x + c$

### ب- طريقة الإبدال (إدخال متحول جديد):(Method substation)

لتكن f(x) دالة مستمرة على المجال (a,b) و x=φ(t) دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على المجال (α,β)، بالإضافة إلى أن الدالة φ(t) تعكس المجال (α,β) في المجال (a,b). بالاعتماد على استقلالية التكامل غير المحدد عن المتحول المستقل وبالأخذ بعين الاعتبار أن $dx = \varphi'(t)dt$ نحصل على:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (5)$$

حيث أن التكامل الموجود في الطرف الأيمن من العلاقة (5) يجب أن يكون أسهل من التكامل الموجود في الطرف الأيسر.

**أمثلة 6:**

1) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \quad ; \ (a > 0)$

$$x = a\sin t \Rightarrow dx = a\cos t dt$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\; a\cos t dt = a^2 \int \cos^2 t dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}\int dt + \frac{a^2}{4}\int \cos 2t\, d(2t) = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + c$$

بالعودة إلى المتحول x لدينا:

$$\sin t = \frac{x}{a} \;\Rightarrow t = arc\sin\frac{x}{a}$$

$$\sin 2t = 2\sin t\cos\, t = 2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t} =$$

$$\frac{2x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a}} = \frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{a^2}{2} arc\sin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + c$$

**ملاحظة:**

من المفيد أحياناً أن نأخذ الصيغة (5) من اليمين إلى اليسار:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x)$$

أو

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(t)dt \qquad (6)$$

حيث: $t=\varphi(x)$

2) $\int x\sqrt{x-5}\, dx$

$$t = \sqrt{x-5} \;\Rightarrow x = t^2 + 5 \Rightarrow dx = 2tdt$$

$$\int x\sqrt{x-5}\, dx = \int (t^2+5)t \cdot 2tdt =$$

$$2\int t^4 dt + 10\int t^2 dt = \frac{2}{5}t^5 + \frac{10}{3}t^3 + c$$

بالعودة إلى المتحول x نجد:

$$\int x\sqrt{x-5}\, dx = \frac{2}{5}(x-5)^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{3}(x-5)^{\frac{3}{2}} + c$$

3) $\int \frac{\sqrt[3]{1+ctg\, x}}{\sin^2 x} dx$

نضع: $t = 1 + ctg\, x \Rightarrow dt = \frac{-dx}{\sin^2 x}$

عندئذٍ:

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+ctg\,ax}}{\sin^2 x}dx = -\int (1+ctg\,x)^{\frac{1}{3}} d(1+ctg\,x)$$

$$= -\int t^{\frac{1}{3}} dt = \frac{-3}{4} t^{\frac{4}{3}} + c = \frac{-3}{4}(1+ctg\,x)^{\frac{4}{3}} + c$$

**ج) طريقة التكامل بالتجزئة:(Method integrand by parts)**

لتكن u و v دالتين مستمرتين قابلتين للاشتقاق بالنسبة لـ x. بالاعتماد على تفاضل جداء دالتين لدينا:

$$d(uv) = udv + vdu$$

$$udv = d(uv) - vdu$$

بالمكاملة نحصل على:

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu$$

أو:

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (7)$$

و هذه هي صيغة التكامل بالتجزئة.

تشير الصيغة السابقة إلى أن التكامل $\int udv$ يؤدي إلى التكامل $\int vdu$ الذي يمكن أن يكون أسهل من التكامل المعطى ويمكن أن يعطى مباشرة من الجدول.

أمثلة 7:

1) $\int \ln x dx$

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = dx \Rightarrow v = x$$

عندئذٍ وحسب الصيغة (7) نجد:

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - x + c$$

2) $\int x\cos x dx$

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \cos x dx \Rightarrow v = \int \cos x dx = \sin x$$

عندئذٍ وحسب الصيغة (7) نجد:

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + c$$

3) $\int x\,arc\tan x dx$

$$u = arc\tan x \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2}$$

$$dv = xdx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int x\,arc\tan x dx=\frac{x^2}{2}arc\tan x-\frac{1}{2}\int x^2\frac{dx}{1+x^2}=\frac{x^2}{2}arc\tan x-\frac{1}{2}\int\left(x^2+1-1\right)\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=\frac{x^2}{2}arc\tan x-\frac{1}{2}\int\left(x^2+1\right)\frac{dx}{1+x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=\frac{x^2}{2}arc\tan x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}arc\tan x+c=\frac{x^2+1}{2}arc\tan x-\frac{1}{2}x+c$$

أو بشكل آخر:

$$\int x\arctan x dx=\frac{1}{2}\int\arctan x\,d\left(1+x^2\right)$$

$$u=arc\tan x\Rightarrow du=\frac{dx}{1+x^2}$$

$$dv=d\left(1+x^2\right)\Rightarrow v=1+x^2$$

$$\int x\,arc\tan x dx=\frac{x^2+1}{2}arc\tan x-\frac{1}{2}\int\left(1+x^2\right)\frac{dx}{1+x^2}=\frac{x^2+1}{2}arc\tan x-\frac{1}{2}x+c$$

4) $I=\int e^x\cos x dx$

$$u=e^x\Rightarrow du=e^x dx$$

$$dv=\cos x dx\Rightarrow v=\int\cos x dx=\sin x$$

$$I=\int e^x\cos x dx=e^x\sin x-\int e^x\sin x dx=e^x\sin x-I_1$$

$$I_1=\int e^x\sin x dx$$

$$u=e^x\Rightarrow du=e^x dx$$

$$dv=\sin x dx\Rightarrow v=\int\sin x dx=-\cos x$$

$$I_1=\int e^x\sin x dx=-e^x\cos x+\int e^x\cos x dx=-e^x\cos x+I$$

$$I=\int e^x\cos x dx=e^x\sin x-I_1=e^x\sin x+e^x\cos x-I$$

$$2I=e^x\sin x+e^x\cos x\Rightarrow I=\frac{1}{2}\left(e^x\sin x+e^x\cos x\right)$$

## تمارين غير محلولة

1- باستخدام جدول التكاملات البسيطة أحسب التكاملات الآتية:

1) $\int (x^2-3x+1)dx$ , 2) $\int \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 dx$ , 3) $\int \frac{x-2\sqrt{x}+2}{x^2\sqrt[3]{x}}dx$

4) $\int (a^x+b^x)^2 dx$ , 5) $\int \sin 3x\cos 5x dx$ , 6) $\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$

7) $\int \frac{dx}{x^2+2}$ , 8) $\int \frac{dx}{2-3x^2}$ , 9) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$

10) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx$ , 11) $\int \tan^2 x dx$

12) $\int \frac{xdx}{x^2+1}$ , 13) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x}}$

2- باستخدام طريقة التحليل (النشر) أحسب التكاملات الآتية:

1) $\int \frac{x^2}{1-x}dx$ , 2) $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$ , 3) $\int \frac{x^2}{1-x^2}dx$

4) $\int \frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx$ , 5) $\int \frac{dx}{4-x^2}$ , 6) $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$

7) $\int \cos^2 5x dx$ , 8) $\int \sin x\cos 7x dx$ , 9) $\int \cos 3x\cos 5x dx$

3- باستخدام طريقة الإبدال (تغيير المتحول) أحسب التكاملات الآتية:

1) $\int x\sqrt{x-1}dx$ , 2) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ , 3) $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

4) $\int \frac{dx}{1+2e^x}dx$

4- باستخدام طريقة التكامل بالتجزئة أحسب التكاملات الآتية:

1) $\int arc\tan x dx$ , 2) $\int x\ln x dx$ , 3) $\int x\sin x dx$

4) $\int xe^x dx$ , 5) $\int \frac{dx}{x^2}$ , 6) $\int x^2e^x dx$