# التكامل المحدد

# definite Integral

## مفهوم التكامل المحدد (Definite Integral Aspect)

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة على المجال المغلق $[a\ ,\ b]$ حيث $b>a$ ولتكن $F(x)$ دالة أصلية لـ $f(x)$ أي $F'(x)=f(x)$ من أجل $x\in[a,b]$. عندئذ يرمز للتكامل المحدد للدالة المستمرة المعطاة $f(x)$ على المجال $[a\ ,\ b]$ بالرمز:

$$\int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

ويمثل تزايد الدالة الأصلية الموافقة أي:

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a) \qquad (2)$$

وهي صيغة نيوتن ليبتنز.

بالإضافة إلى ذلك فإنه من أجل أي دالة $f(x)$ لدينا في النقطة الكيفية a:

$$\int_a^a f(x)dx=0$$

أي أن العلاقة $(2)$ صحيحة من أجل $a=b$.

يدعى a و b في العبارة $(1)$ بحدود التكامل السفلي والعلوي أي بما يوافق حدود المجال $[a\ ,\ b]$ ، والدالة $f(x)$ بالدالة المكاملة. بإدخال الرمز التالي:

$$F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$$

فإن العلاقة $(2)$ تأخذ الشكل:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b \qquad (3)$$

**مثال 1**

أوجد تكامل الدالة $x^2$ على المجال $[2,4]$ :

$$\int_2^4 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_2^4=\frac{64}{3}-\frac{8}{3}=18\frac{2}{3}$$

نشير إلى أننا سنحصل على النتيجة نفسها لو أخذنا دالة أصلية أخرى لـ $x^2$ مثل $\frac{x^3}{3}+1$ أو $\frac{x^3}{3}-2$ أو...

**نتيجة:**

$$\int_a^b f(x)dx=\int f(x)dx\Big|_a^b \qquad (4)$$

حيث $\int f(x)dx$ إحدى الدوال الأصلية للدالة $f(x)$ .

مثال2

$$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos 0) = 0$$

تعطي الصيغة (4) العلاقة بين التكامل المحدد والتكامل غير المحدد الموافق له, حيث أن الاختلاف بينهما يكمن في أن التكامل المحدود هو عدد أما التكامل غير المحدود فهو دالة.

**ملاحظة:**

ليكن $y' = f(x)$ أي أن $d\,y = f(x)dx$ بمكاملة العلاقة الأخيرة في المجال من a إلى b نجد:

$$y(b) - y(a) = \int_a^b f(x)dx$$

وهذه الصيغة كثيرة الاستخدام في التطبيقات.

## التكامل المحدد بحد علوي متغير:

بفرض أن f(x) دالة مستمرة على المجال [a,b] ولندرس التكامل:

$$\int_a^x f(t)dt \qquad (5)$$

حيث $t \in [a,x] \subset [a,b]$ (لتجنب الاختلاط رمزنا لمتغير التكامل بحرف آخر).

إذا كانت F(x) دالة أصلية لـ f(x) أي أن $F'(x) = f(x)$ فإنه بالاعتماد على صيغة نيوتن- ليبتنز نملك:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a) \qquad (6)$$

عندئذٍ:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = \frac{d}{dx}[F(x) - F(a)] = F'(x) - [F(a)]' = f(x) - 0 = f(x)$$

وبالتالي اشتقاق التكامل المحدد بحد علوي متغير بالنسبة لهذا المتغير يساوي إلى قيمة الدالة المكاملة عند هذا المتغير:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \qquad (7)$$

وبالتالي التكامل:

$$\int_a^x f(t)dt = \Phi(x) \qquad (8)$$

يعدّ دالة أصلية للدالة المكاملة f(x). نشير إلى أنه من العلاقة (5) ينتج أن $\Phi(a) = 0$ أي أن $\Phi(x)$ هي تلك الدالة الأصلية لـ f(x) التي تؤول إلى الصفر من أجل x=a.

**مثال 3**

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \sqrt{1+t^2}\,dt = \sqrt{1+x^2}$$

## التكامل المحدد بحد سفلي متغير:

$$\int_x^b f(t)dt \qquad ; \quad x\in(a,b)$$

بالاعتماد على صيغة نيوتن- ليبتنز نجد:

$$\frac{d}{dx}\int_x^b f(t)dt = \frac{d}{dx}[F(b)-F(x)] = F'(b)-[F(x)]' = -f(x)$$

أي أن اشتقاق التكامل المحدود بحد سفلي متغير بالنسبة لهذا المتغير يساوي قيمة الدالة المكاملة عند هذا المتغير مضروبة بإشارة ناقص.

**ملاحظة:**

إذا كانت f(x) دالة مستمرة على المجال [a,b] فإنه بالاعتماد على علاقة التكامل غير المحدود بالدالة الأصلية يكون:

$$\int f(x)dx = c + \int_a^x f(t)dt$$

حيث $a\le x\le b$ و c ثابت اختياري.

## الخواص الرئيسية للتكامل المحدد:

1- $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

أي أن التكامل المحدود لا يتعلق بمتغير التكامل.

2- $$\int_a^a f(x)dx = F(a)-F(a) = 0$$

التكامل المحدد بحدود متساوية يساوي الصفر.

3- $$\int_b^a f(x)dx = F(a)-F(b) = -[F(b)-F(a)] = -\int_a^b f(x)dx$$

إذا بدلنا بين موضعي حدود التكامل فإن التكامل المحدد يغير إشارته.

4- ليكن $[a,b]=[a,c]\cup[c,b]$ حيث $a\le c\le b$ عندئذٍ بفرض أن $F'(x)=f(x)$ فإن:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = F(c)-F(a)+[F(b)-F(c)]$$

$$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

5- $$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx \qquad ; \quad A\in R$$

6- $\int_b^a [f(x)+g(x)-h(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx - \int_a^b h(x)dx$

7- إذا كان $f(x) \ge 0$ حيث $a \le x \le b$ فإن $\int_a^b f(x)dx \ge 0$

8- إذا كان $f(x) \le g(x)$ حيث $a \le x \le b$ و f , g دوال مستمرة على المجال [a,b] فإن:

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

## تطبيقات التكامل المحدد

إن تطبيقات حساب التكاملات المحددة ذات أهمية خاصة، وتبرز هذه الأهمية في التطبيقات العملية المباشرة وخاصة في حساب مساحة السطوح المستوية المكتوبة بالشكل الديكارتي.

**مبرهنة**: إذا كانت $f$ دالة متصلة على الفترة $[a,b]$ عندئذٍ المساحة $A$ للمنطقة $D$ المحصورة بين منحني الدالة ومحور السينات والمستقيمين $x=a, x=b$ تعطى بالعلاقة:

$$A = \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

وهنا نناقش الحالات الآتية :

1) إذا كانت $f(x) \ge 0$ فإن المنحني يكون فوق محور السينات وتكون قيمة التكامل موجبة وهي المساحة الفعلية كما في (1).

2) إذا كانت $f(x) \le 0$ فإن المنحني يكون تحت محور السينات وقيمة التكامل تكون سالبة لذلك تعطى المساحة بالعلاقة:

$$A = \left| \int_a^b f(x)dx \right| \qquad (2)$$

3) إذا كانت $f(x) \le 0$ وبآن واحد $f(x) \ge 0$ أي المنحني يكون في فترات معينة فوق محور السينات وفي فترات أخرى تحت محور السينات وقيمة التكامل تأخذ قيم موجبة وسالبة ولا تعطي المساحة الفعلية المطلوبة لذلك نجمع المساحات تحت المنحني بإشارة موجبة كما في العلاقة (2)

مثال (1): أوجد المساحة بين منحني الدالة $y = \cos x$ وبين:

1- $x=0$ , $x=\frac{\pi}{2}$ ومحور الفواصل.

2- $x=\frac{\pi}{2}$ , $x=\frac{3\pi}{2}$ ومحور الفواصل.

3- $x=\frac{3\pi}{2}$ , $x=2\pi$ ومحور الفواصل.

4- $x=0$ , $x=2\pi$ ومحور الفواصل.

الحل :

$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$A_2 = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = -2 \Rightarrow A_2 = |-2| = 2$$

$$A_3 = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x dx = \sin x \Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = 0-(-1) = 1$$

$$A_4 = \int_0^{2\pi} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{2\pi} = 0-0 = 0$$

نلاحظ في الحالة (4) إن التكامل يساوي الصفر وهو المجموع الجبري لقيم التكاملات في (1) و (2) و (3) بالرغم من أن المساحة لها قيمة غير صفرية وهي مجموع المساحات الثلاثة بعد الأخذ بعين الاعتبار بأن تأخذ المساحة التي تقع تحت محور السينات بالقيمة الموجبة وبالتالي المساحة الفعلية

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 1 + |-2| + 1 = 4$$

**مثال (3):** احسب المساحة المحصورة بين المستقيمات:

$$y = -\tfrac{1}{2}x + \tfrac{9}{2} \; ; \; y = 0 \; , \; x = 1$$

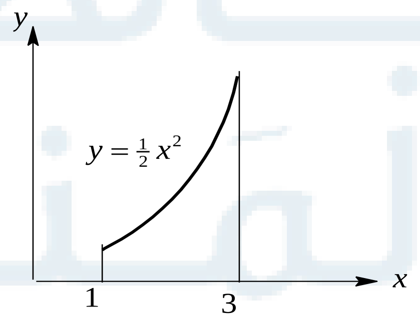
**الحل:** إذا رمزنا للمساحة المحصورة بين المستقيمات المفترضة بالرمز A، لوجدنا أن:

$$A = \int_1^9 \left(-\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}\right)dx = \left[-\frac{x^2}{4} + \frac{9}{2}x\right]_1^9 = 16$$

**مثال (4):** احسب المساحة المحصورة بالمستقيمات $y=0$، $x=1$ و $x=3$، وبالمنحني $y = \frac{1}{2}x^2$

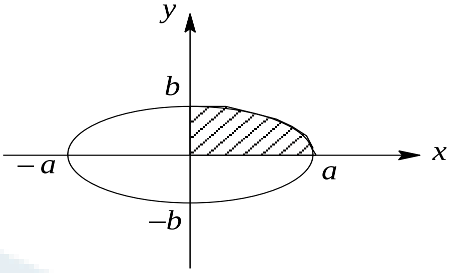
**الحل:** تعطى المساحة المحصورة بالمستقيمات السابقة والمنحني السابق، والموضحة بالشكل بالعلاقة :

$$A = \int_1^3 \frac{1}{2}x^2 dx = \frac{1}{2}\int_1^2 x^2 dx = \frac{1}{6}\left[x^3\right]_1^3 = \frac{1}{6}(27-1) = \frac{13}{3}$$




**مثال (5):** احسب مساحة القطع الناقص الذي معادلته: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

الحل: بما أن القطع الناقص متناظر بالنسبة للمحاور الإحداثية، لذلك يكفي حساب مساحة الجزء الواقع في الربع الأول، وضرب الناتج بـ 4 .




تعطى مساحة القطع الناقص بالشكل الآتي : $A = 4\int_{a}^{b} y\,dx$

من معادلة القطع الناقص، نجد: $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ (الجزء الواقع في الربع الأول)

$$A = 4\int_{0}^{a} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

بحل هذا التكامل بتغيير المتحول بشكل مثلثي : $x = a\sin t$ فنجد:

$$S = \frac{4b}{a} \cdot \frac{\pi a^2}{4} = \pi ab$$

تعطى المساحة $A$ المحدودة بالمنحنيين $y = f_1(x), y = f_2(x)$ والمستقيمين $x = a\ ,x = b$ حيث $f_1(x) \geq f_2(x)$ بالعلاقة الآتية:

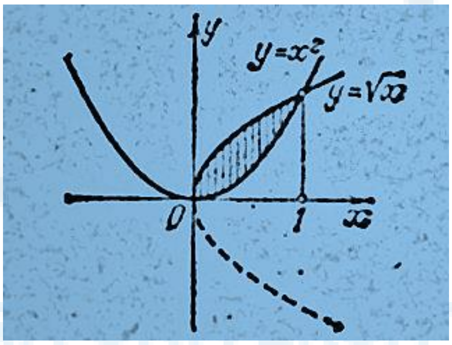
$$A = \int_{a}^{b} [f_1(x) - f_2(x)]dx$$

مثال 6

احسب المساحة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2\ , y = \sqrt{x}$ .

الحل: نقاط التقاطع بين المنحنيين $y = x^2\ , y = \sqrt{x}$ هي $x_1 = 0\ , x_2 = 1$ بالتالي:

$$A = \int_{0}^{1} \left(\sqrt{x} - x^2\right)dx = \int_{0}^{1} \sqrt{x}\,dx - \int_{0}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ \Big|_{0}^{1} - \frac{x^3}{3}\ \Big|_{0}^{1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$




## تمارين غير محلولة

**أحسب التكاملات الآتية:**

$$1)\sum_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx \quad , \quad 2)\int_0^1 x^2 dx \quad , \quad 3(\int_1^e \frac{dx}{x}$$

$$4)\int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \quad , \quad 5)\int_0^{2\pi} x\sin 2x dx \quad , \quad 6)\int_0^1 (x-1)e^{-x} dx$$

$$7)\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\, dx \quad , \quad 8)\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \quad , \quad 9)\int_0^{\pi} e^x \sin x dx$$

10) احسب المساحة المحصورين بين $y = x^2 ,\ y = 2 - x^2$ .

11) احسب المساحة المحصورة بين المنحني $y = \sin x \ ,\ 0 \le x \le 2\pi$ والمحور $ox$ .