

مثال

تعطى معادلة سرعة سقوط جسم مادي بوجود مقاومة الهواء كما يلي :

$$v' + 9.81 = 0.00159v^2$$

a- أوجد سرعة السقوط بعد 1 ثانية من بدء السقوط باستخدام طريقة Euler و بخطوة مقدارها 1, علماً أن السقوط بدأ من وضع السكون (المطلوب حل رياضي وليس برنامج حاسوبي)

الحل:

طريقة Euler تعطى بالمعادلات التالية:

$$y_{i+1} = y(x_i) + f(x_i, y_i)h$$

$$x_{i+1} = x_i + h$$

نقوم بوضع المعادلة التفاضلية على شكل معادلة Euler

$$v' = 0.00159v^2 - 9.81$$

$$f(t, v) = 0.00159v^2 - 9.81$$

نضع $i=0$

$$y_1 = y(0) + f(0,0)h$$

$$y_1 = 0 - 9.81$$

إذاً تكون سرعة الجسم بعد 1 ثانية من بدء السقوط تساوي $9.81[m/s]$

b- أعد الحساب باستخدام طريقة Runge Kutta و بنفس الخطوة 1 (المطلوب حل رياضي وليس برنامج

حاسوبي)

الحل:

طريقة Runge Kutta تعطى بالمعادلات التالية:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1h\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2h\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + k_3h)$$

نقوم بحساب k_1, k_2, k_3, k_4

$$k_1 = f(0,0) = -9.81$$

$$k_2 = f(0 + (0.5)(1), 0 + (0.5)(-9.81)(1)) = f(0.5, -4.905) = -9.771$$

$$k_3 = f(0 + (0.5)(1), 0 + (0.5)(-9.771)(1)) = f(0.5, -4.886) = -9.772$$

$$k_4 = f(0 + 1, 0 + (-9.772)(1)) = f(1, -9.772) = -9.658$$

بالتعويض نجد:

$$y(0+1) = y(0) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h$$

$$y(0+1) = y(0) + \frac{1}{6}(-9.81 + 2(-9.771) + 2(-9.772) + -9.658)1 = -9.75 \text{ [m/s]}$$

إذاً تكون سرعة الجسم بعد 1 ثانية من بدء السقوط تساوي 9.75 [m/s]