مقرر الإشارات والنظم

قسم هندسة الروبوت والأنظمة الذكية

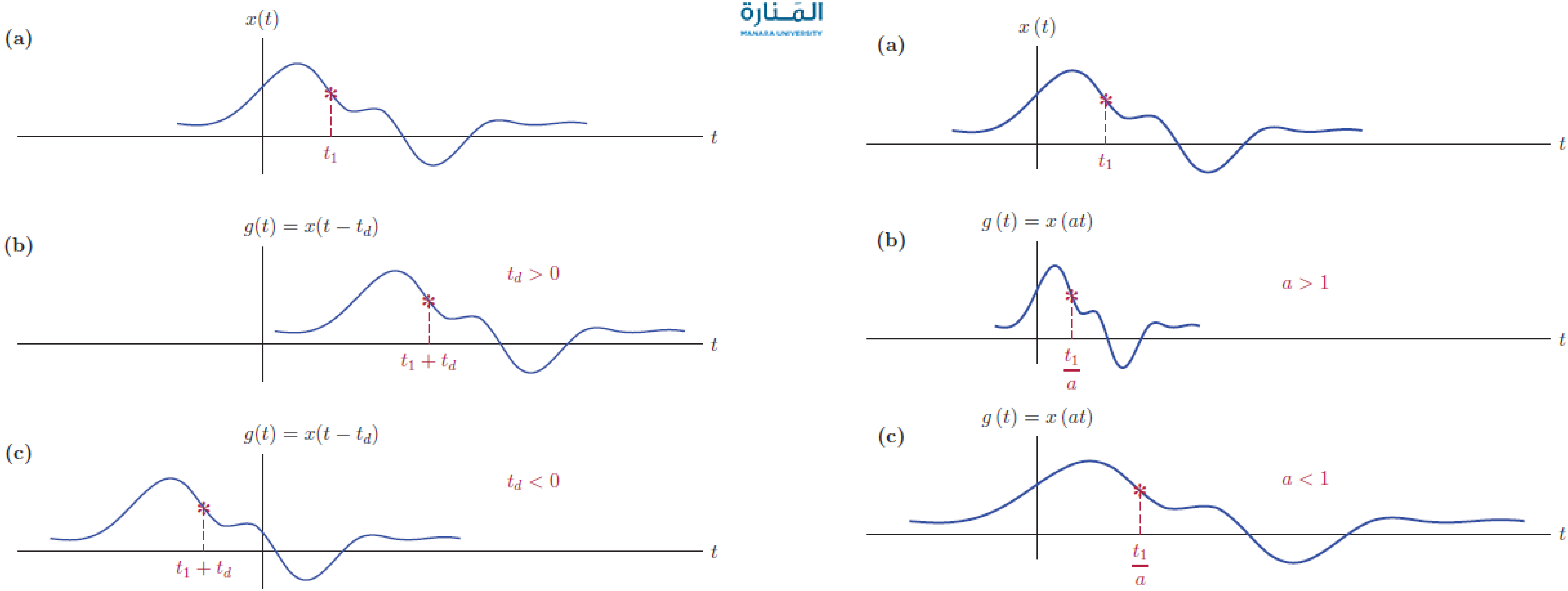
د. السموءل صالح

م. أوشين داؤد

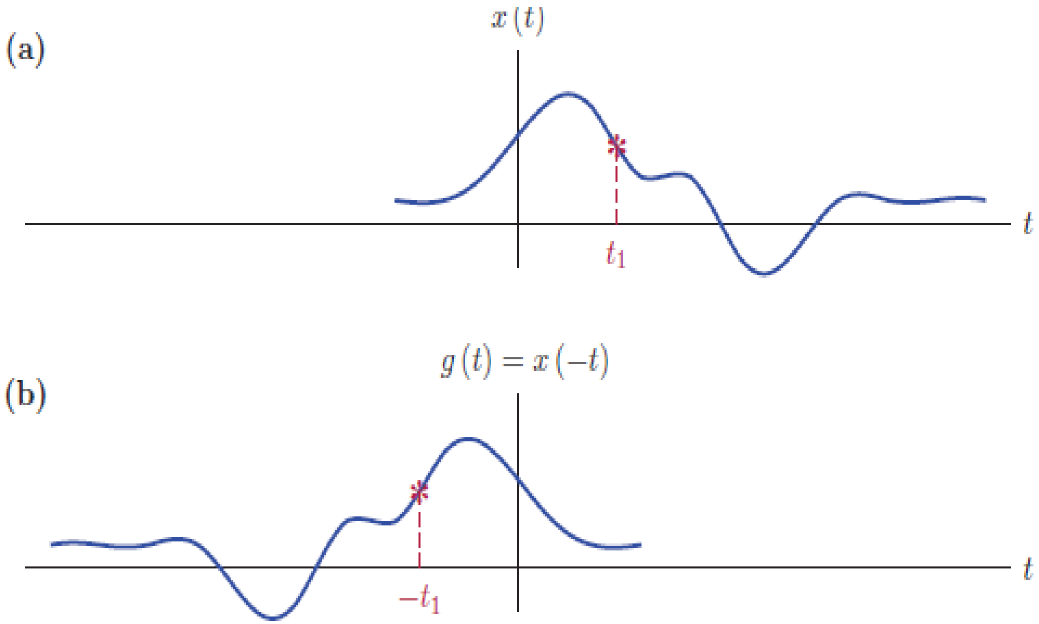
محاضرات العملي في الأسبوعين 1/3

الفصل الثاني ٢٠٢١/٢٠٢٢

Signals : time shifting & scaling



Signals : time reversal



Signals : time shifting & scaling : example

Consider the signal $x(t)$ shown in Fig. 1.16. Sketch the following signals:

a. $g(t) = x(2t - 5)$,
b. $h(t) = x(-4t + 2)$.

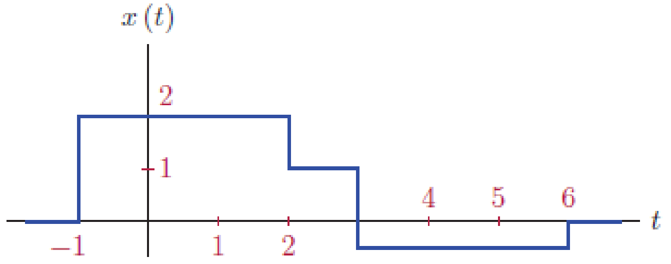
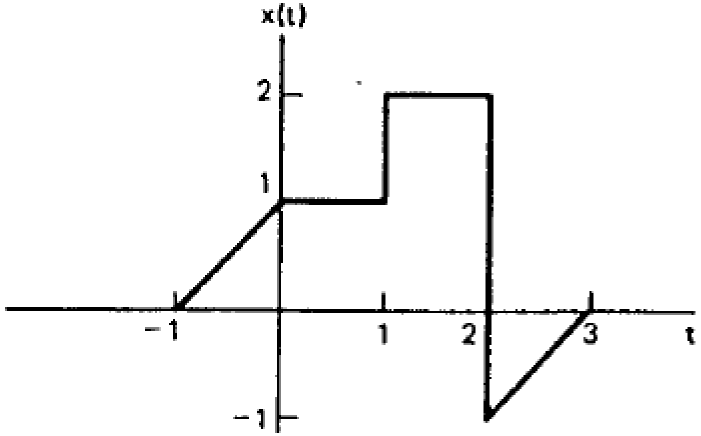


Figure 1.16 – The signal $x(t)$ for Example 1.3.

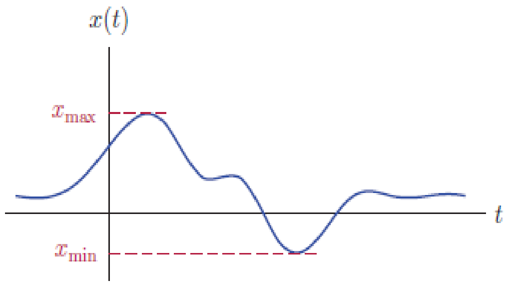


(i) $x(t - 2)$
(ii) $x(1 - t)$
(iii) $x(2t + 2)$
(iv) $x(2 - t/3)$

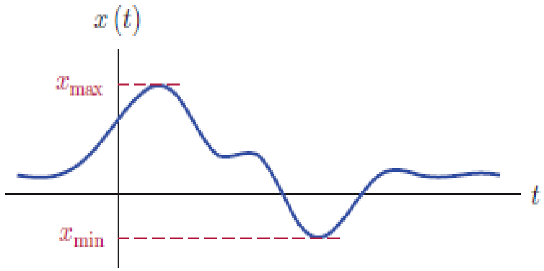
Signals : arithmetic operations:

$$g(t) = A + x(t)$$

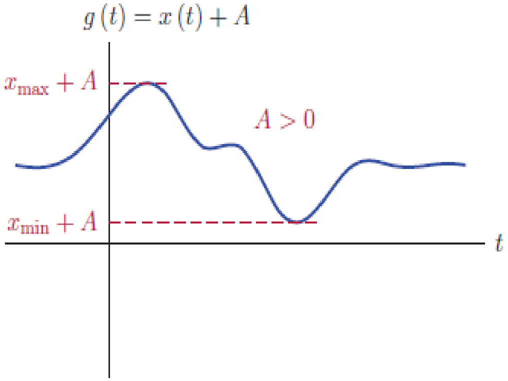
$$g(t) = B.x(t)$$

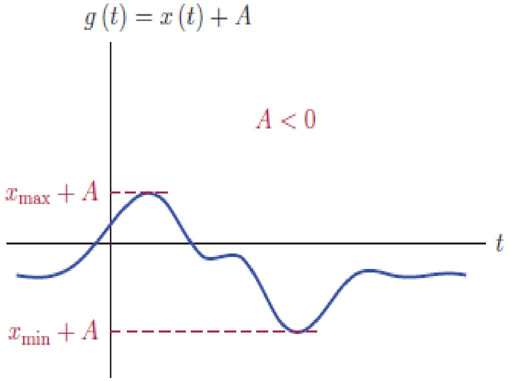


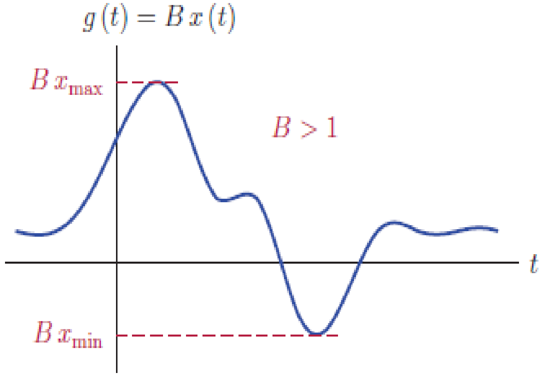
(a)

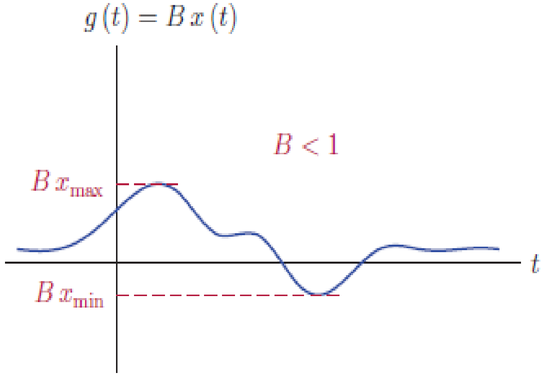


(a)





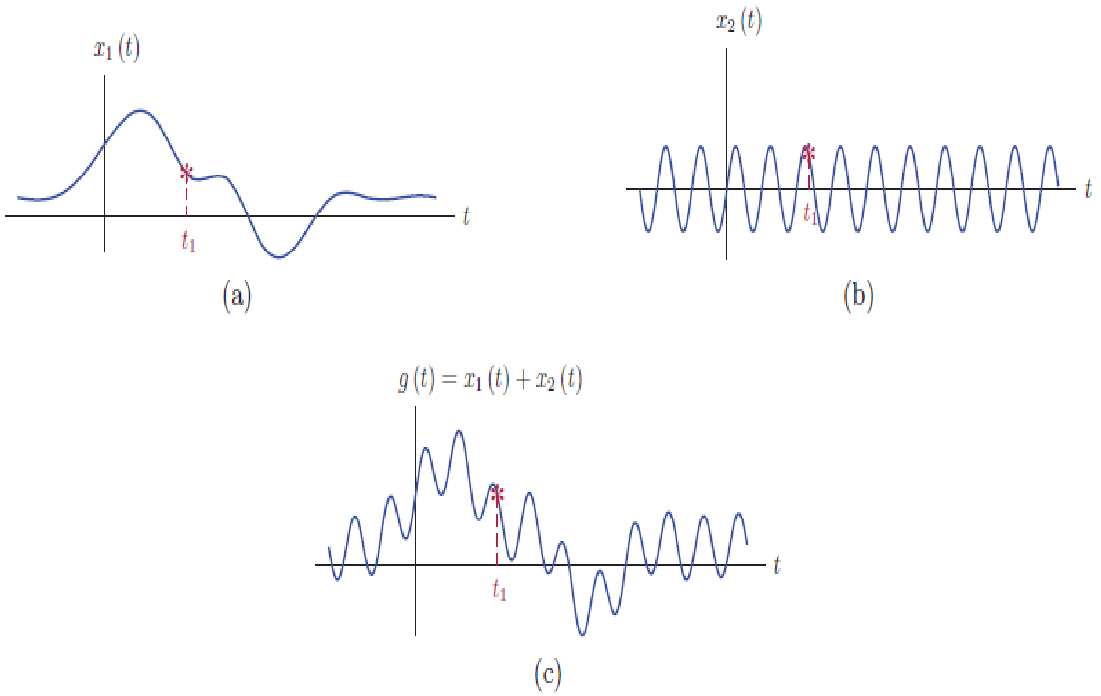


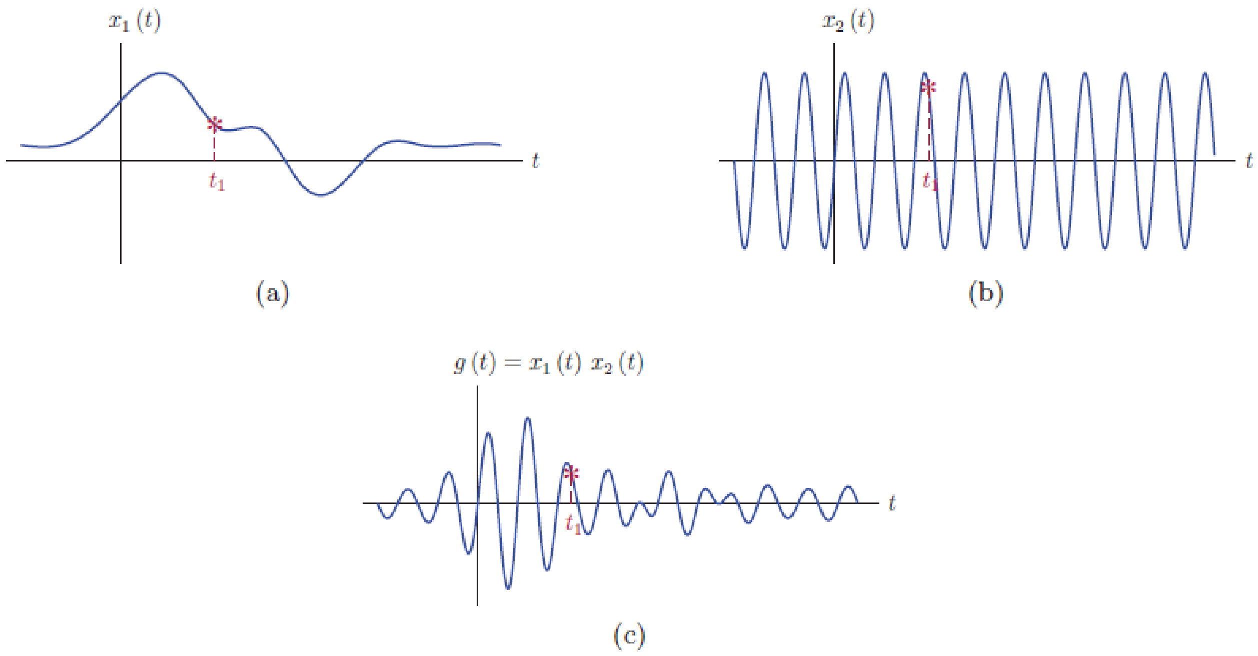


Signals : arithmetic operations:

$$g(t) \;= x1(t) + x2(t)$$

$$g(t) = x1(t).\,x2(t)$$





Signals : arithmetic operations: examples

Consider the signal shown in Fig. 1.8. Sketch the signals

a. $g_1(t) = 1.5\,x(t) - 1$

b. $g_2(t) = -1.3\,x(t) + 1$

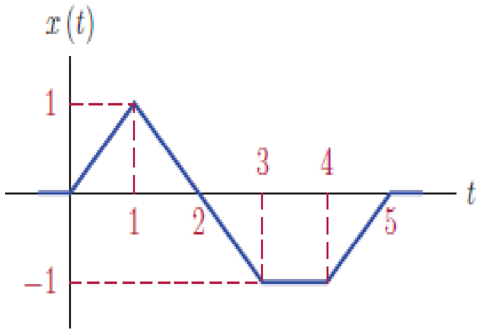
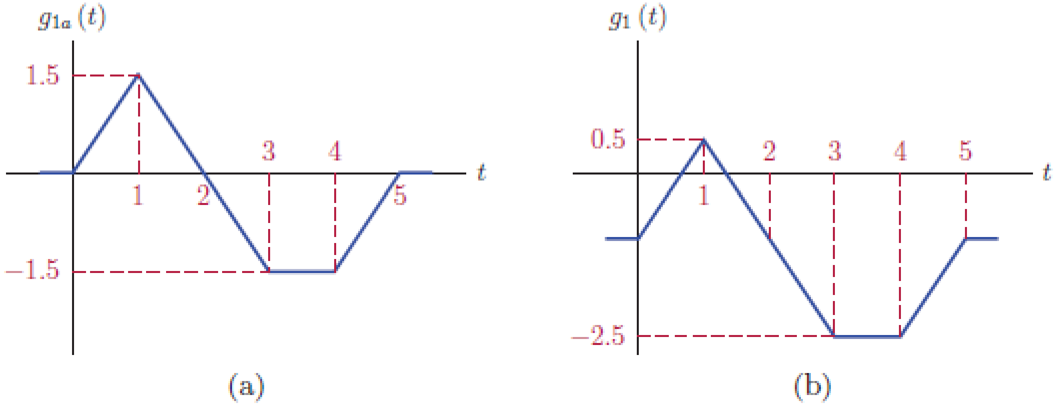


Figure 1.8 – The signal $x(t)$ for Example 1.1.



Signals : arithmetic operations: examples

Two signals $x_1(t)$ and $x_2(t)$ are shown in Fig. 1.11. Sketch the signals

a. $g_1(t) = x_1(t) + x_2(t)$
b. $g_2(t) = x_1(t)\, x_2(t)$

$$x_1(t) = \begin{cases} 2\,, & 0 < t < 1 \\ 1\,, & 1 < t < 2 \\ -1\,, & 2 < t < 3 \\ 0\,, & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{and} \quad x_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t\,, & 0 < t < 2 \\ -2t+5\,, & 2 < t < 3 \\ t-4\,, & 3 < t < 4 \\ 0\,, & \text{otherwise} \end{cases}$$

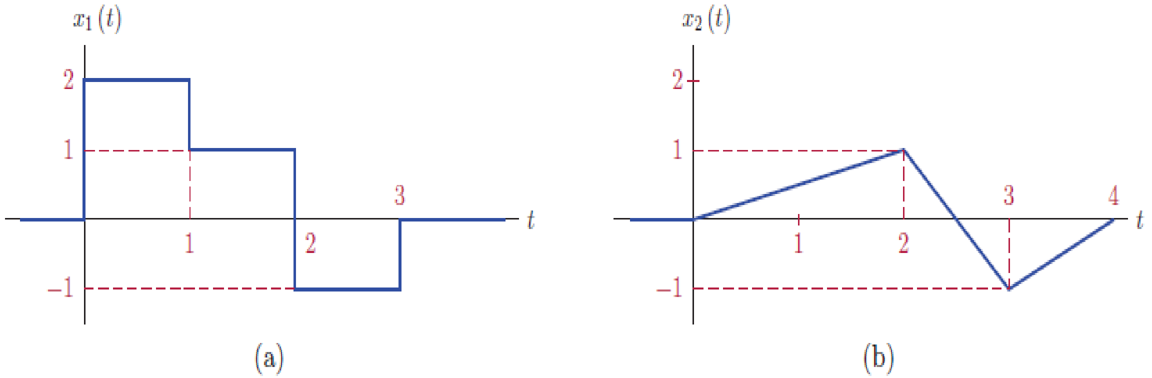


Figure 1.11 – Signals $x_1(t)$ and $x_2(t)$ for Example 1.2.

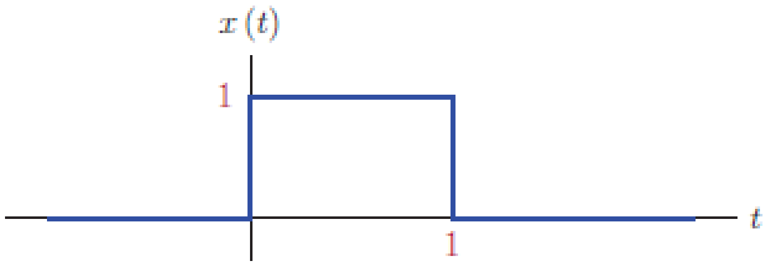
$$g_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t + 2\,, & 0 < t < 1 \\ \frac{1}{2}t + 1\,, & 1 < t < 2 \\ -2t+4\,, & 2 < t < 3 \\ t-4\,, & 3 < t < 4 \\ 0\,, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$g_2(t) = \begin{cases} t\,, & 0 < t < 1 \\ \frac{1}{2}t\,, & 1 < t < 2 \\ 2t-5\,, & 2 < t < 3 \\ 0\,, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Signals: Odd & Even components: examples

اوجد المركبتين الفردية والزوجية للإشارة التالية:

$$x(t) = rect\ (t - 0.5)$$



$$xo(t) = ½ * \left(x(t) - x(-t) \right) = \frac{1}{2} * (rect\ (t - 0.5) - rect(-t + 0.5))$$

$$xe(t) = ½ * \left(x(t) + x(-t) \right) = \frac{1}{2} * (rect\ (t - 0.5) + rect(-t + 0.5))$$

(a) (b)

Signals: Odd & Even components: examples

اوجد المركبتين الفردية والزوجية للإشارة التالية:

$$x(t) = 5\cos(10t + \frac{\pi}{3})$$

$$cos\ (a+b) = cosa.\cos b - sina\ sinb$$
$$cos\ (a-b) = cosa.\cos b + sina\ sinb$$

$$xo(t) = ½ * \left(x(t) - x(-t)\right) = \frac{1}{2} * \left(5\cos\left(10t + \frac{\pi}{3}\right) - 5\cos\left(-10t + \frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$= \frac{5}{2} * \left(\cos(10t).\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin(10t)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos(10t).\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin(10t)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$= -5\sin(10t)\sin(\frac{\pi}{3})$$

$$xe(t) = ½ * \left(x(t) + x(-t)\right) = \frac{1}{2} * \left(5\cos\left(10t + \frac{\pi}{3}\right) + 5\cos\left(-10t + \frac{\pi}{3}\right)\right) =$$
$$= \frac{5}{2} * \left(\cos(10t).\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin(10t)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos(10t).\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin(10t)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$= 5\cos(10t)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2.5\cos(10t)$$

Signals: Odd & Even components

$$x(t) = x(t)_e + x(t)_o$$

$$x(t)_o = \frac{1}{2} * (x(t) - x(-t)$$

$$x(t)_e = \frac{1}{2} * (x(t) + x(-t))$$

Signals: Odd & Even components: example

اوجد المركبتين الفردية والزوجية للإشارة التالية:

$$x(t) = e^{jbt}.\mathrm{u(t)}$$

الحل (بالاعتماد على قوانين اولر :

$$so(t) = ½ * \left(s(t) - s(-t) \right) = ½ * \left(e^{jbt} - e^{-jbt}\right) = \mathrm{j\,sin\,(bt)}$$

$$se(t) = ½ * (s(t) + s(-t)) = ½ * \left(e^{jbt} + e^{-jbt}\right) = \mathrm{cos(bt)}$$

ملاحظة: كل من المركبتين الفردية الزوجية معرف على المجال 0 وحتى +∞

Signals: energy & power

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t))^2 \; dt$$

$$P = \lim_{T \to \infty} \left(\frac{1}{T}\right) \int_{-T/2}^{+T/2} (x(t))^2 \; dt$$

- Energy signals are those that have finite energy and zero power, i.e., $E_x < \infty$, and $P_x = 0$.
- Power signals are those that have finite power and infinite energy, i.e., $E_x \to \infty$, and $P_x < \infty$.

Signals: energy & power :examples

$$x(t) = A\sin(wt + \emptyset)$$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t))^2 \; dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (A\sin(wt+\emptyset))^2 \; dt = \frac{A^2}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} (1-\cos(2wt+2\emptyset)) \; dt =$$

$$\frac{A^2}{2}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} dt \; - \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2wt+2\emptyset) \; dt\right] = \; \infty$$

It is not an energy signal

$$P = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} (x(t))^2 \; dt \; = \lim_{T\to\infty}\left[\frac{A^2}{2T}\left[\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} dt \; - \int_{-T/2}^{+T/2} \cos(2wt+2\emptyset) \; dt\right]\right] = \frac{A^2}{2}$$

It is a power signal

Signals: energy & power :examples

$$x(t) = Ae^{-at}u(t) \quad : \quad a > 0$$

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} (x(t))^2 \ dt = \int_{0}^{+\infty} (Ae^{-at})^2 \ dt = -\frac{A^2}{2a}[e^{-2at} |_0^\infty] = \frac{A^2}{2a}$$

It is an energy signal -> it is not a power signal

calculate the energy and power for x(t) when :

a=0: it is a power signal

a<0 : it is neither energy signal nor power signal

Systems : Linearity & Time-invariance

Conditions for linearity:

$$\text{Sys}\{x_1(t) + x_2(t)\} = \text{Sys}\{x_1(t)\} + \text{Sys}\{x_2(t)\}$$

$$\text{Sys}\{\alpha_1\, x_1(t)\} = \alpha_1\, \text{Sys}\{x_1(t)\}$$

additivity rule &

Homogeneity rule

Superposition principle:

$$\text{Sys}\{\alpha_1\, x_1(t) + \alpha_2\, x_2(t)\} = \alpha_1\, \text{Sys}\{x_1(t)\} + \alpha_2\, \text{Sys}\{x_2(t)\}$$

Superposition principle

Linearity

Condition for time-invariance:

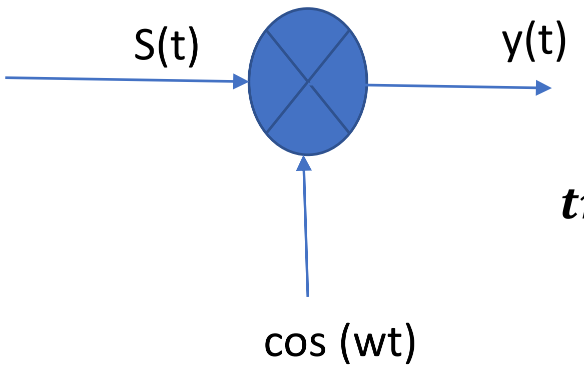
$$\text{Sys}\{x(t)\} = y(t) \quad \text{implies that} \quad \text{Sys}\{x(t-\tau)\} = y(t-\tau)$$

Time-invariance

Systems : Linearity & Time-invariance: examples

تمرين :

اثبت ان النظام التالي (ضارب بإشارة (cos(wt)خطي وثابت مع الزمن



الحل :

لإثبات الخطية يجب ان نثبت ان :

$$tr\ (as1(t) + as2(t)) = atr\ (s1(t)) + atr(s2(t))$$

نبدأ بالطرف الأول :

$$tr\ (as1(t) + as2(t)) = cos(wt)\big(as1(t) + as2(t)\big) = cos(wt)as1(t) + cos(wt)as2(t)$$

اما الطرف الثاني :

$$atr\ (s1(t)) + atr(s2(t)) = acos(wt)s1(t) + acos(wt)s2(t)$$

نلاحظ تساوي الطرفين فهو نظام خطي .

لاثبات الثبات مع الزمن : باعتباران $y(t) = tr(s(t))$

يجب اثبات ان $tr(s(t - t0)) = y\ (t - t0)$

نبدأ من الطرف الأول :

$$tr(s(t - t0)) = cos(wt)s(t - t0)$$

اما الطرف الثاني : (نحصل عليه من معادلة y(t) بتبديل كل t ب t-t0)

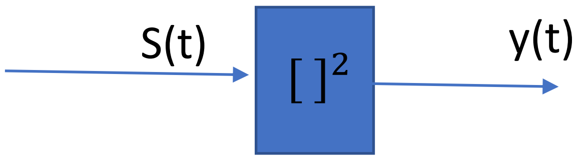
$$y(t - t0) = cos(w(t - t0))s(t - t0)$$

نلاحظ ان الطرفين غير متساويان فالنظام غير ثابت مع الزمن

Systems : Linearity & Time-invariance: examples

تمرين :

ادرس هذه النظام من حيث الخطي و الثبات مع الزمن



الحل :

لإثبات الخطية يجب ان نثبت ان :

$$tr\,(as1(t)+as2(t)) = atr\,(s1(t)) + atr(s2(t))$$

نبدأ بالطرف الأول :

$$tr\,(as1(t)+as2(t)) = \left(as1(t)+as2(t)\right)^2$$

اما الطرف الثاني :

$$atr\,(s1(t)) + atr(s2(t)) = \left(as1(t)\right)^2 + \left(as2(t)\right)^2$$

نلاحظ عدم تساوي الطرفين فهو نظام غير خطي .

لاثبات الثبات مع الزمن : باعتبار ان $y(t) = tr(s(t))$

يجب اثبات ان $tr(s(t-t0)) = y\,(t-t0)$

نبدأ من الطرف الأول :

$$tr(s(t-t0)) = (s(t-t0))^2$$

اما الطرف الثاني : (نحصل عليه من معادلة y(t) بتبديل كل t ب t-t0)

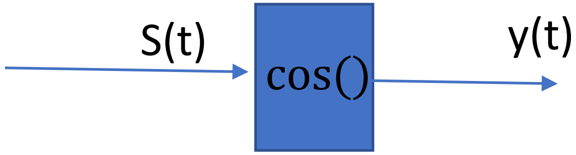
$$y(t-t0) = (s(t-t0))^2$$

نلاحظ ان الطرفين متساويان فالنظام ثابت مع الزمن

Systems : Linearity & Time-invariance: examples

تمرين :

ادرس هذه النظام من حيث الخطي و الثبات مع الزمن



الحل :

لإثبات الخطية يجب ان نثبت ان :

$$tr\,(as1(t)+as2(t)) = atr\,(s1(t)) + atr(s2(t))$$

نبدأ بالطرف الأول :

$$tr\,(as1(t)+as2(t)) = cos(as1(t)+as2(t))$$

اما الطرف الثاني :

$$atr\,(s1(t)) + atr\big(s2(t)\big) = cos(as1(t)) + cos\,(as2(t))$$

نلاحظ عدم تساوي الطرفين فهو نظام غير خطي .

لإثبات الثبات مع الزمن : باعتبار ان $y(t) = tr(s(t))$

يجب اثبات ان $tr(s(t-t0)) = y\,(t-t0)$

نبدأ من الطرف الأول :

$$tr(s(t-t0)) = cos(s(t-t0))$$

اما الطرف الثاني : (نحصل عليه من معادلة y(t) بتبديل كل t ب t-t0)

$$\mathrm{y}(t-t0) = cos(s(t-t0))$$

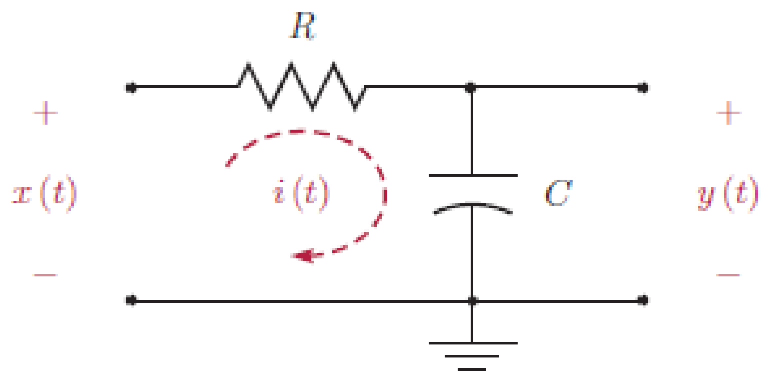
نلاحظ ان الطرفين متساويان فالنظام ثابت مع الزمن

Systems : Linearity & Time-invariance: examples

تمرين :

ادرس هذا النظام من حيث الخطية و الثبات مع الزمن

حيث يعتبر الدخل هو الجهد x(t) والخرج هو الجهد y(t) على طرفي المكثف



لكي نستطيع دراسة هذا النظام لا بد أولاً من استخراج معادلة تعبر عن علاقة الدخل بالخرج :

حسب قانون كيرشوف للجهود سوف نكتب :

$$x(t) = v_R(t) + v_c(t)$$

$$v_R(t) = i(t).R$$

$$i(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt} = C\frac{dy(t)}{dt}$$

$$x(t) = RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t)$$

$$\frac{1}{RC}x(t) = \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t)$$

$$\boxed{bx(t) = \frac{dy(t)}{dt} + ay(t)}$$

Constant coefficient First order , first degree differential ordinary equation

كي تكون المعادلة السابقة خطية يجب ان يتحقق مبدأ التنضيد :

أولاً : سنقوم بإيجاد الخرج لاشارتي دخل منفصلتين

بافتراض اشارتي دخل $x1(t)$,$x2(t)$ فتنتج الاستجابتان :

$$\boxed{bx1(t) = \frac{dy1(t)}{dt} + ay1(t)}$$

$$\boxed{bx2(t) = \frac{dy2(t)}{dt} + ay2(t)}$$

$$\boldsymbol{x3(t) = \alpha 1x1(t) + \alpha 2x2(t)}$$

$$\boldsymbol{y3(t) = \alpha 1y1(t) + \alpha 2y2(t)}$$

Systems : Linearity & Time-invariance: examples

$$\frac{dy3(t)}{dt} + ay3\ (t) = \frac{d}{dt}[\alpha 1y1(t) + \alpha 2y2(t)] + [a(\alpha 1y1(t) + \alpha 2y2(t))]$$

$$\frac{dy3(t)}{dt} + ay3\ (t) = \alpha 1\left[\frac{dy1(t)}{dt} + ay1(t)\right] + \alpha 2\left[\frac{dy2(t)}{dt} + ay2(t)\right]$$

$$\frac{dy3(t)}{dt} + ay3\ (t) = \alpha 1bx1(t) + \alpha 2bx2(t)$$

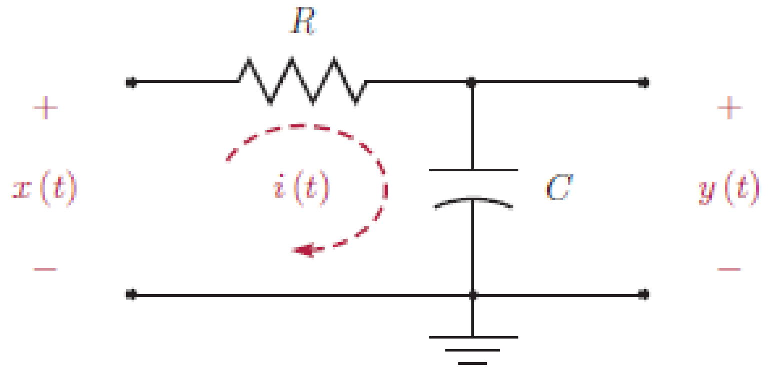
$$\frac{dy3(t)}{dt} + ay3\ (t) = b\ x3(t) \rightarrow$$

أثبتنا أن الاستجابة y3(t) المشكلة من مجموع استجابتين للنظام لإشارتين منفصلتين هي استجابة للنظام للإشارة x3(t) والتي تشكل مجموع اشارتي دخل ومنه نستنتج ان النظام خطي ونلاحظ أنه سببي

اختبار الثبات مع الزمن: نقوم بإزاحة إشارة الدخل بمقدار t0 فيكون الخرج مزاحاً بنفس المقدار وهو ثابت مع الزمن

$$x(t - t0) = RC\ \frac{dy(t - t0)}{dt} + y\ (t - t0)$$

Systems : Linearity & Time-invariance: examples



هل يبقى النظام السابق خطياً بوجود شحنة أولية للمكثف V ؟

حسب قانون كيرشوف للجهود سوف نكتب :

$$x(t) = v_R(t) + v_c(t) + v$$

$$v_R(t) = i(t).R$$

$$i(t) = C\frac{dv_c(t)}{dt} = C\frac{dy(t)}{dt}$$

$$x(t) = RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) + v$$

$$\frac{1}{RC}x(t) = \frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) + \frac{v}{RC}$$

$$\boxed{bx(t) = \frac{dy(t)}{dt} + ay(t) + D}$$

كي تكون المعادلة السابقة خطية يجب ان يتحقق مبدأ التنضيد :

أولاً : سنقوم بإيجاد الخرج لاشارتي دخل منفصلتين

بافتراض اشارتي دخل $x1(t)$,$x2(t)$ فتنتج الاستجابتان :

$$\boxed{bx1(t) = \frac{dy1(t)}{dt} + ay1(t) + D}$$

$$\boxed{bx2(t) = \frac{dy2(t)}{dt} + ay2(t) + D}$$

$$\boldsymbol{x3(t) = \alpha1x1(t) + \alpha2x2(t)}$$

$$\boldsymbol{y3(t) = \alpha1y1(t) + \alpha2y2(t)}$$

$$\frac{dy3(t)}{dt} + ay3\ (t) = \frac{d}{dt}[\alpha1y1(t) + \alpha2y2(t)] + \big[a\big(\alpha1y1(t) + \alpha2y2(t)\big)\big]$$

$$\frac{dy3(t)}{dt} + ay3\ (t) = \alpha1\left[\frac{dy1(t)}{dt} + ay1(t)\right] + \alpha2\left[\frac{dy2(t)}{dt} + ay2(t)\right]$$

$$\frac{dy3(t)}{dt} + ay3\ (t) = \alpha1[bx1(t) - D] + \alpha2[bx2(t) - D]$$

$$\frac{dy3(t)}{dt} + ay3\ (t) = b\ x3(t) - 2D \rightarrow$$

أثبتنا أن الاستجابة y3(t) المشكلة من مجموع استجابتين للنظام لإشارتين منفصلتين هي ليست استجابة للنظام للإشارة x3(t) والتي تشكل مجموع اشارتي دخل ومنه نستنتج ان النظام غير خطي وهو غير سببي

*** نستطيع اثبات عدم الخطية من خلال التعويض المباشر بمبدأ التنضيد

Constant-coefficient ordinary differential equation:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

The differential equation

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

represents a linear system provided that all initial conditions are equal to zero:

$$y(t_0) = 0\,, \quad \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=t_0} = 0\,, \quad \ldots, \quad \left.\frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}}\right|_{t=t_0} = 0$$

The end